18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Zwei und sechzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1863.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des zwei und sechzigsten Bandes.

Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen. Von Herrn ***R. Lipschitz*** zu Breslau. . . . . Seite 1

Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Von Herrn ***Carl Neumann*** zu Halle. . . . . — 36

Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales. Par M. ***William Roberts*** à Dublin. . . . . — 50

Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren. Von Herrn ***J. Weingarten.*** . . . . . — 61

Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung. Von Herrn ***A. Clebsch*** zu Carlsruhe. . . . . — 64

Die speciellen ***Lamé***schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung. Von Herrn ***E. Heine*** in Halle. . . . . — 110

Ueber die ***Steiner***schen Gegenpunkte, welche durch zwei in eine Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind. Von Herrn ***von Staudt*** in Erlangen. . . . . — 142

Ueber die Determinante, deren Elemente die Quadrate der sechszehn Verbindungslinien der Eckpunkte zweier beliebiger Tetraeder sind. Von Herrn ***Siebeck*** zu Liegnitz. . . . . — 151

Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist. Von Herrn ***J. Weingarten.*** . . — 160

Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées. Par M. ***Edouard Combescure*** à St. Etienne. . . . . — 174

Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. ***Chasles*** abhängt. Von Herrn ***O. Hesse*** zu Heidelberg. — 188

Ebene Curven, zwischen deren Bogen und Coordinaten eine Gleichung zweiten Grades besteht. Von Herrn ***R. Hoppe.*** . . . . . — 193

Jacob Steiner. . . . . . — 199

Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. Nachtrag zu der Abhandlung S. 229 Band 59 dieses Journals. Von Herrn ***Oskar Emil Meyer*** in Göttingen. . — 201

Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova. Auctore ***H. E. Schröter,*** Vratislaviae. Seite 215

Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen. . . . . — 232

Sur les volumes des surfaces podaires. (Extrait du mémoire lu dans la séance du 20 novembre 1862 de la société royale de Londres et imprimé dans les Philosophical Transactions of the Royal Society Vol. 153.) Par M. *T. A. Hirst* à Londres. . . . . — 246

Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung. Von Herrn ***H. Schröter*** zu Breslau. . . . . — 265

Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Von Herrn *Aronhold.* . . . . . — 281

Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen. Von Herrn *Franz Wetzig* zu Leipzig. . . . . — 346

Druckfehlerverzeichniss.

S.	174	Zeile	14	v. o.	statt et	lies de.
-	176	-	3	v. o.	- $\Psi = 0$	- $\Psi = \sigma$.
-	176	-	8	v. o.	- r	- τ.
-	181	-	7	v. u.	- celle	- telle.
-	186	-	14	v. o.	- position	- portion.

Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Breslau.)

Die Untersuchungen, welche *Clairaut* im Jahre 1743 unter dem Titel Théorie de la figure de la terre tirée des Principes de l'Hydrostatique herausgab, enthalten die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichts für eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine feste Axe rotirende flüssige Masse, die aus unendlich vielen unendlich dünnen homogenen Schichten besteht, und bei der die Grenzflächen jeder Schicht (die Oberfläche der ganzen Masse mit eingerechnet) Rotationsellipsoide sind, welche die Axe der ganzen Masse zu ihrer Rotationsaxe und den Schwerpunkt derselben zu ihrem Mittelpunkte haben. Es gilt hierbei die Einschränkung, dass der Quotient der Centrifugalkraft durch die Resultante der Anziehung der ganzen Masse für die Punkte des Aequators der Oberfläche und die Abplattungen der sämmtlichen ellipsoidischen Flächen kleine Werthe derselben Ordnung sind, und dass man die Grössen, die dem Quadrate oder den höheren Potenzen dieser Werthe proportional sind, vernachlässigt. In der angeführten Schrift wird der Satz ausgesprochen und begründet, der den Zusammenhang zwischen der Resultante der Anziehung der ganzen Masse auf die Punkte ihrer Oberfläche und der Gestalt dieser Oberfläche, unabhängig von dem Gesetze, nach dem sich die Dichtigkeit der Masse von Schicht zu Schicht ändern mag, darstellt, und der den Namen seines Entdeckers trägt. *Clairaut* bestimmt aber auch die Abhängigkeit der Abplattungen jener ellipsoidischen Grenzflächen von dem beliebig anzunehmenden Gesetze der Dichtigkeitsänderung durch eine Differentialgleichung und giebt die Integration derselben für die Annahme, dass die Dichtigkeit der Masse in jeder Schicht einer Potenz der Aequatorialaxe von einer ihrer Grenzflächen proportional ist.

Die Bedeutung der von *Clairaut* entwickelten Resultate für die Bestimmung der Gestalt der Himmelskörper wurde noch grösser, als *Legendre*

den Beweis führte, dass eine rotirende flüssige Masse, bei der die Form der Grenzflächen der unendlich dünnen Schichten nur der Bedingung unterliegt, von der Gestalt der Kugel wenig abzuweichen, die von *Clairaut* vorausgesetzte Beschaffenheit haben muss, wenn der Quotient der Centrifugalkraft durch die Resultante der Anziehung der ganzen Masse für die Punkte des Aequators der Oberfläche und die Abweichung der sämmtlichen Grenzflächen von der Kugelgestalt kleine Werthe derselben Ordnung sind, und wenn man die kleinen Grössen der höheren Ordnungen vernachlässigt. Denn da die Betrachtung einer flüssigen Masse sowohl der Voraussetzung, dass der feste Zustand der Himmelskörper aus einem flüssigen hervorgegangen sei, wie auch der Annahme, dass das Innere derselben sich noch in feuerflüssigem Zustande befinde, entspricht, da ferner nach der durch *Legendre* erschlossenen Einsicht die Grenzflächen der unendlich dünnen Schichten keine andere Form als die von *Clairaut* angenommene Form von Rotationsellipsoiden haben können, so kann der Erforschung der hier auftretenden Phänomene keine allgemeinere Theorie als die von *Clairaut* gegebene zu Grunde gelegt werden.

Die oben erwähnte *Clairaut*sche Differentialgleichung, zu welcher *Legendre* auf einem anderen Wege gelangt, behandelt derselbe unter einer neuen Voraussetzung in Betreff der Dichtigkeit der Masse in den einzelnen Schichten. Wenn $\varrho(b)$ die Dichtigkeit in irgend einer Schicht bezeichnet, wenn b der Radius einer Kugel ist, deren Fläche mit der äusseren Grenzfläche dieser Schicht gleichen Inhalt hat *), und wenn K, L Constanten sind, so ist es die Relation

$$\varrho(b) = K\frac{\sin Lb}{b}.$$

(S. Mémoires de l'académie des sciences, année 1789, Suite des recherches sur la figure des planètes, pag. 372 — 454.)

Laplace untersucht in einer Abhandlung, welche am Anfange desselben Bandes gedruckt, nach einer Anmerkung *Legendre*'s aber später, als die so eben angeführte von diesem, der Academie überreicht ist (Mém. sur la théorie des Satellites de Jupiter) eine rotirende flüssige Masse von derselben Beschaffenheit, von deren Betrachtung auch *Legendre* ausgeht, fügt aber die Annahme hinzu, dass bei derselben nicht nur die Gravitation der Flüssigkeitstheile gegen einander, sondern auch die Anziehung durch beliebige ausserhalb

*) Diese Definition ist absichtlich so gefasst, dass sie auch für den später zu erörternden Fall, wo diese Grenzflächen nicht mehr Ellipsoide sein müssen, gültig bleibt.

liegende Massen wirksam sei, während der Werth dieser Anziehung auf die Theile der flüssigen Masse, dividirt durch die Resultante der Anziehung der flüssigen Masse auf die Punkte ihrer Oberfläche, als kleine Grösse von gleicher Ordnung mit dem Werthe der Abweichung jener Grenzflächen von der Kugelgestalt angenommen wird. Durch die Stellung dieses Problems öffnet sich der theoretischen Forschung ein grosses Gebiet. Nachdem für den vom Schwerpunkte der ganzen Masse nach einem Punkte einer Grenzfläche gezogenen Radius vector eine nach Kugelfunctionen*) fortschreitende Entwickelung angenommen ist, zeigt es sich, dass die sämmtlichen Glieder dieser Reihe, folglich die Gestalten jener Grenzflächen, vollkommen bestimmt sind, sobald für die Aenderung der Dichtigkeit von Schicht zu Schicht ein beliebiges Gesetz gegeben ist. Die Bildung eines jeden Gliedes der Reihe erfordert aber die Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und sowie das Glied, welches die Kugelfunction zweiter Ordnung enthält, genau der Abplattung der Ellipsoide in dem *Clairaut*schen Problem entspricht, so ist auch die zu diesem Gliede gehörende Differentialgleichung mit der von *Clairaut* aufgestellten übereinstimmend.

Der Gang dieser Betrachtung unterscheidet sich übrigens von dem Gange des oben berührten Beweises von *Legendre* nur dadurch, dass bei dem letzteren die Kugelfunctionen von höherer als der zweiten Ordnung zwar formell auftreten, aber sämmtlich den Werth Null erhalten müssen, während diese Glieder bei *Laplace* Werthe bekommen, die von der Anziehung der äusseren Massen abhängen. Bei der Anwendung der *Laplace*schen Untersuchung auf die Bestimmung der Gestalt der einzelnen Himmelskörper unseres Sonnensystems, den Saturn ausgenommen, fallen die Glieder, welche Kugelfunctionen von höherer als der zweiten Ordnung enthalten, fort, und es ergeben sich die von *Legendre* gefundenen Resultate. Dabei darf man aber nicht vergessen, dass die Bemerkung *Legendre*s über das frühere Datum seiner Abhandlung nicht mit der Behauptung zusammenfällt, dass diese von *Laplace* bei der Verfassung der seinigen gekannt sei, und dass also diejenigen Resultate, welche *Laplace* mit *Legendre* gemeinsam hat, ebenso gut das Eigenthum des ersteren sind, wie des letzteren.

Laplace hat den Inhalt jener Abhandlung in das dritte Buch der mécanique céleste aufgenommen; im elften Buche dieses Werkes, das die

*) Diese später eingeführte Benennung brauche ich des bequemeren Ausdrucks wegen.

Ueberschrift hat: de la figure et de la rotation de la terre, zeigt derselbe einen neuen Gesichtspunkt für die hierher gehörenden Fragen, indem er hervorhebt, dass man über das Gesetz, nach dem die Dichtigkeit der Erdmasse sich von Schicht zu Schicht ändert, eine Hypothese bilden müsse, um die aus derselben abzuleitenden Folgerungen mit den Thatsachen der Beobachtung zu vergleichen. Zu diesem Ende nimmt *Laplace* an, dass in der ursprünglich flüssigen Masse des Planeten der Quotient der Zunahme des Druckes durch die Zunahme der Dichtigkeit der Dichtigkeit selbst proportional sei, und findet hieraus für das Gesetz der Dichtigkeit die obenerwähnte Formel von *Legendre*

$$\varrho(b) = K\frac{\sin Lb}{b},$$

wobei er dessen Abhandlung anführt. Wenn bei dem vorliegenden Problem die Aequatorialaxe der ganzen Masse, die Rotationsgeschwindigkeit derselben und das Gesetz der Dichtigkeit gegeben sind, so liefert die Theorie drei Stücke, die mit drei unabhängigen Resultaten der Beobachtung verglichen werden können: erstens die Dichtigkeit der Erdoberfläche, deren mittlerer Werth dem constanten Werthe der Theorie entspricht, zweitens die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erdmasse, welche durch die Versuche von *Cavendish* bestimmt ist, und drittens den Werth der Abplattung der Erdoberfläche, welcher durch Combination mehrerer Pendelbeobachtungen unabhängig von dem Gesetze der Dichtigkeit, das für das Innere der Masse gilt, ermittelt wird *). *Laplace* sucht nun die beiden Constanten der von ihm gewählten Formel so zu bestimmen, dass den drei angegebenen Anforderungen möglichst gut genügt wird, entscheidet sich aber hierbei für kein festes Resultat.

Gegen die Hypothese über die Beziehung zwischen dem Druck und der Dichtigkeit, auf welche *Laplace* jene Formel basirt, hat man eingewendet, dass sie zu willkürlich sei, um zu sicheren Schlüssen einen Anhalt zu bilden. Wenn aber dem so ist, und wenn wir überhaupt nicht im Stande sind, die Form des Gesetzes der Dichtigkeit a priori anzugeben, so scheint es nicht ungerechtfertigt, eine Form, die die genügende Zahl, d. h. hier von drei, Constanten enthält, frei anzunehmen und diese Constanten aus den Beobachtungen zu bestimmen. Ob eine auf diesem Wege gefundene Formel als annähernde

*) Der Werth der Schwerkraft unter dem Aequator, der sich mit dem Werthe der Abplattung zugleich ergiebt, dient zur Elimination der Krafteinheit für die Massenanziehung, die a priori nicht bekannt ist.

Darstellung des Gesetzes gelten darf, muss ich dem Urtheil der geehrten Leser anheimstellen.

Ich habe die Form

$$\varrho(b) = D - E b^{\lambda}$$

gewählt, bei der $\varrho(b)$ und b die oben angegebene Bedeutung haben, und D, E, λ die Constanten bezeichnen, deren letzte stets positiv sein soll *). Unter dieser Annahme führt die Integration der erwähnten *Clairaut*schen Differentialgleichung auf die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, und während D und E durch λ sehr einfach ausgedrückt werden, bleibt zur Bestimmung von λ eine transscendente Gleichung von der Beschaffenheit, dass der Quotient von zwei *Gauss*schen Reihen die functiones contiguae sind, und in deren sämmtliche Elemente die Grösse λ eingeht, einem gegebenen Werthe gleich werden soll. Mit Hülfe von einigen Eigenschaften der Kettenbrüche gelang es, den strengen Beweis zu führen, dass dieser Gleichung nur ein einziger reeller positiver Werth λ genügt, und die Bedingungen zu erkennen, die für die Existenz eines solchen nothwendig und ausreichend sind. Bei dem Falle der Erde sind diese Bedingungen erfüllt, und so ergiebt sich für die Constanten D, E, λ eine eindeutige Bestimmung, während die Anwendung der Kettenbrüche gleichzeitig ein zu der Berechnung der Grösse λ geeignetes Verfahren an die Hand giebt. Die Werthe der Constanten D, E, λ, die ich auf Grund der geeignetsten mir zugänglichen Daten ermittelt habe, sind am Schlusse der Abhandlung mitgetheilt.

Da übrigens die Relation $\varrho = D - E b^{\lambda}$ den Vortheil gewährt, dass unter Annahme derselben bei dem allgemeineren von *Laplace* behandelten Problem, wo beliebige ausserhalb der rotirenden Masse befindliche Massen auf dieselbe anziehend wirken, die sämmtlichen übrigen Intégrationen und Constantenbestimmungen ebenso leicht ausgeführt werden können, als die den Kugelfunctionen zweiter Ordnung entsprechenden, so ist für den Anfang der Untersuchung diese allgemeinere Form des Problems beibehalten worden.

---

§. 1.

Der bequemeren Uebersicht wegen sollen jetzt die wesentlichsten bei der Rotation einer flüssigen Masse vorkommenden Formeln aus dem vierten

---

*) Die Stelle der mécanique céleste, Buch III, cap. 4, art. 30, welche hierzu die Anregung gab, wird weiter unten besprochen werden.

Capitel des dritten Buches der mécanique céleste hergesetzt werden, jedoch so, dass diejenigen Glieder der Entwickelungen, die sich im Laufe der Untersuchung als nothwendig verschwindend ergeben, von vorn herein weggelassen sind. Der Ort eines beliebigen Punktes wird bestimmt durch die Entfernung desselben r vom Schwerpunkte der ganzen Masse und durch die Länge und die Breite auf einer um denselben als Centrum beschriebenen Kugel; die eine Seite der durch dasselbe hindurchgehenden Rotationsaxe der Masse wird als positive (nördliche) betrachtet, die Länge mit φ, das Complement der Breite mit ϑ bezeichnet. Für einen beliebigen Punkt der flüssigen Masse wird die Entwickelung

$$(1.) \qquad r = b\left(1+\sum_{2}^{x} Y_n(b)\right)$$

vorausgesetzt, wo b der Parameter der (äusseren) Grenzfläche einer bestimmten, unendlich dünnen homogenen Schicht mit der Massendichtigkeit $\varrho(b)$ ist, wo $Y_n(b)$ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung in Bezug auf die Elemente ϑ und φ ist, in deren $2n+1$ Constanten der Parameter b eingeht, und wo die sämmtlichen $Y_n(b)$ einer kleinen Grösse erster Ordnung proportional sind, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden. Eine scharfe Definition des Parameters b liefert die Bemerkung, dass der Inhalt der zu demselben gehörenden Oberfläche durch das Integral $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ gemessen wird, da der Cosinus des Winkels des Radius vector mit der Flächennormale hier um Grössen der zweiten Ordnung von der Einheit verschieden ist. Setzt man aber in das Integral für r^2 den Werth $b^2\left(1+2\sum_{2}^{\infty} Y_n(b)\right)$, so entsteht nach einem bekannten Satze der Werth des Integrals $4\pi b^2$. Also ist b der Radius einer Kugel, deren Flächeninhalt dem Inhalte der in Rede stehenden Oberfläche gleich ist.

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit der gegebenen Rotation mit ω bezeichnet, so hat der Ausdruck

$$(2.) \qquad \frac{\omega^2}{2}\cos^2\vartheta\, r^2 = \frac{\omega^2}{3}\left(1-P_2(\cos\vartheta)\right)r^2$$

die Eigenschaft, dass seine nach drei auf einander senkrechten Richtungen genommenen Differentialquotienten die betreffenden Componenten der aus der Rotation sich ergebenden Centrifugalkraft in Bezug auf den Punkt (r, ϑ, φ) liefern. Wenn c den Werth von b, der der Oberfläche der ganzen Masse entspricht, und f die Einheit der Kraft für die Massenanziehung bezeichnet, so

stellt der Ausdruck $\omega^2 c$ die Centrifugalkraft, der Ausdruck $\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta$ die Anziehung der ganzen Masse für die Punkte des Aequators der Oberfläche im Durchschnitt*) dar, und der Quotient $\frac{\omega^2 c}{\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta}$ soll einer kleinen Grösse erster Ordnung proportional sein.

Das Potential V der Anziehung, welche die ausserhalb der flüssigen Masse befindlichen Massen auf einen Punkt (r, ϑ, φ) desselben ausüben, wird durch die Reihe

$$(3.) \qquad V = \sum_2^\infty V_n r^n$$

ausgedrückt, in der V_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung von den Elementen ϑ und φ bedeutet, und der Werth $nV_n c^{n-1}$ getheilt durch den Ausdruck $\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta$ einer kleinen Grösse erster Ordnung proportional angenommen wird.

Die Bedingung des Gleichgewichts für die rotirende Masse, dass die Resultante aller hier wirkenden Kräfte in Bezug auf irgend einen Punkt der flüssigen Masse senkrecht gegen die Fläche constanter Dichtigkeit gerichtet sein muss, der derselbe angehört, nimmt die Form an, dass das Aggregat W der Potentiale von sämmtlichen anziehenden Massen und des Ausdrucks $\frac{\omega^2}{3}(1-P_2(\cos\vartheta))r^2$ eine reine Function des Parameters b sein muss, und hieraus entsteht die Gleichung:

$$(4.) \quad \begin{cases} W = 4\pi\int_0^b f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta\,\frac{1}{r} + 4\pi\sum_2^\infty \int_0^b f\varrho(\beta)\,\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta}\,d\beta\,\frac{1}{(2n+1)r^{n+1}} \\ \quad + 4\pi\int_b^c f\varrho(\beta)\beta\,d\beta + 4\pi\sum_2^\infty \int_b^c f\varrho(\beta)\,\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{-n+2})}{d\beta}\,d\beta\,\frac{r^n}{2n+1} \\ \quad + \frac{\omega^2}{3}r^2 - \frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)r^2 + \sum_2^\infty V_n r^n = \text{Function } (b). \end{cases}$$

Nach Substitution der Reihe (1.) für r liefert das Princip, dass eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe einer von ϑ und φ unabhängigen Grösse nur dadurch gleich werden kann, dass die sämmtlichen Glieder, die Kugel-

*) Dieser Ausdruck ist hier nicht im strengen mathematischen Sinne gebraucht, sondern soll nur den Umstand bezeichnen, dass der Unterschied zwischen den correspondirenden Werthen für den vorliegenden Zweck unwesentlich ist.

functionen von höherer als der nullten Ordnung enthalten, verschwinden, die Gleichung

$$(5.)\quad \begin{cases} -4\pi Y_n(b)\int_0^b f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta\,\frac{1}{b} + 4\pi\int_0^b f\varrho(\beta)\,\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta}\,\frac{1}{(2n+1)b^{n+1}} \\ +4\pi\int_b^c f\varrho(\beta)\,\frac{d(Y_n(\beta)\beta^{-n+2})}{d\beta}\,d\beta\,\frac{b^n}{2n+1} - \left[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)b^2\right] + V_n b^n = 0, \end{cases}$$

für $n \gtrless 2$. Die eckige Klammer [ ] soll andeuten, dass das eingeschlossene Glied zwar für $n=2$, aber für keinen anderen Werth von n Geltung habe. Aus der Gleichung (5.) folgt nun durch Differentiation die Differentialgleichung

$$(6.)\quad \frac{d^2 Y_n(b)}{db^2} = \left(\frac{n(n+1)}{b^2} - \frac{2\varrho(b)b}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}\right)Y_n(b) - \frac{2\varrho(b)b^2}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}\,\frac{dY_n(b)}{db},$$

welcher man die Form

$$(6^*.)\quad \frac{d^2 Y_n}{(d\log b)^2} + \left(\frac{2\varrho(b)b^3}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta} - 1\right)\frac{dY_n}{d\log b} + \left(\frac{2\varrho(b)b^3}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta} - n^2 - n\right)Y_n = 0$$

geben kann. Der Ausdruck $\dfrac{\varrho(b)b^3}{3\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta}$, mittelst dessen die Function ϱ von b, d. h. das Gesetz der Dichtigkeit, in diese Differentialgleichung eingeht, ist gleich der Dichtigkeit in irgend einer Schicht, dividirt durch die mittlere Dichtigkeit des Theiles der flüssigen Masse, welcher durch diese Schicht eingeschlossen wird.

§. 2.

Aus der Relation

$$(7.)\quad \varrho(b) = D - Eb^\lambda,$$

welche von hier ab der Untersuchung zu Grunde liegen soll, ergiebt sich der Werth des Integrals

$$(8.)\quad \int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta = \frac{Db^3}{3} - \frac{Eb^{\lambda+3}}{\lambda+3},$$

da D, E, λ von b unabhängige Werthe bezeichnen, und es wird

$$(9.)\quad \frac{\varrho(b)b^3}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta} = \frac{Db^3 - Eb^{\lambda+3}}{\frac{Db^3}{3} - \frac{Eb^{\lambda+3}}{\lambda+3}} = \frac{D - Eb^\lambda}{\frac{D}{3} - \frac{E}{\lambda+3}b^\lambda}.$$

Dieser Ausdruck giebt die Veranlassung, statt der Veränderlichen b eine neue t einzuführen, die mit derselben durch die Gleichung

$$(10.) \qquad t = \frac{3E}{(\lambda+3)D} b^{\lambda}$$

verbunden ist. Auf diese Weise geht die Gleichung (9.) in die Gleichung

$$(11.) \qquad \frac{\varrho(b)\, b^3}{\int_0^b \varrho(\beta)\beta^2 d\beta} = \frac{3-(\lambda+3)t}{1-t}$$

über und die Differentialgleichung (6*.) verwandelt sich, da

$$d\log b = \frac{1}{\lambda} d\log t$$

ist, in die folgende:

$$(12.) \quad (1-t)\frac{d^2 Y_n}{(d\log t)^2} + \frac{5-(5+2\lambda)t}{\lambda}\frac{dY_n}{d\log t} + \frac{6-n^2-n-(6-n^2-n-2\lambda)t}{\lambda^2} Y_n = 0.$$

Die Form derselben stimmt mit der Form der von *Riemann* in seiner Abhandlung über die durch die *Gauss*ische Reihe darstellbaren Functionen*) pag. 19 für die Function $P\left(\begin{matrix}\alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{matrix} x\right)$ gegebenen Differentialgleichung genau überein, weshalb ich zwei particulare Integrale, die nach steigenden Potenzen der Grösse t geordnet sind, sogleich hinschreiben kann. Es sei der positive Werth der Quadratwurzel $\sqrt{4\lambda^2+12\lambda+(2n+1)^2} = R_n$, ferner

$$(13.) \qquad \frac{2n+1+R_n}{2\lambda} = \alpha_n, \quad \frac{2n+1-R_n}{2\lambda} = \beta_n, \quad \frac{2n+1}{\lambda} = \gamma_n,$$

so sind es, wenn man nach *Gauss*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,t) = 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}t+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}t^2+\cdots$$

setzt, die beiden Reihen:

$$(14.) \qquad t^{\frac{n-2}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, t)$$

und

$$(15.) \qquad t^{\frac{-n-3}{\lambda}} F(-\alpha_n+1, -\beta_n+1, -\gamma_n+1, t).$$

Dieselben entsprechen den Ausdrücken, die *Laplace* art. 30 des angeführten Capitels erhält, indem er von der Erwägung ausgeht, dass, wenn die Dichtigkeit der Schichten von der Mitte der Masse nach der Oberfläche hin abnehme,

*) Abhandl. d. k. G. d. W. z. Göttingen. Bd. VII.

dieselbe in eine nach steigenden Potenzen von b fortschreitende Reihe entwickelt werden könne, und dass deshalb

$$\varrho(b) = D - Eb^\lambda - \text{etc.}, \qquad \frac{\varrho(b)\,b^3}{3\int_0^b \varrho(\beta)\,\beta^2\,d\beta} = 1 - \frac{\lambda E b^\lambda}{(\lambda+3)D} + \text{etc.}$$

anzunehmen sei; und wir bemerken nach dem Vorgange von *Laplace*, dass von den Particularlösungen (14.) und (15.) nur die erstere für unseren Zweck geeignet ist, da die zweite für $b = 0$, d. i. auch für $t = 0$, einen unendlich grossen Werth erhält.

Es fragt sich nun, ob ein Grund vorliegt, eine solche Relation zwischen den Constanten des Problems anzunehmen, dass die Grösse $t = \frac{3E}{(\lambda+3)D} b^\lambda$ für alle Werthe von $b = 0$ bis $b = c$ numerisch unter der Einheit bleiben muss; denn wäre dies nicht der Fall, so hätte man für das Integral der Gleichung (12.) je nach dem Bereich, in dem die Variable sich befindet, andere Formen von Reihen anzuwenden. Da die Constante λ nur positive Werthe annehmen soll, wie oben bemerkt ist, so hat t seinen grössten numerischen Werth für $b = c$ und es handelt sich um die Grenzen des Werthes $u = \frac{3E}{(\lambda+3)D} c^\lambda$. Dieser Werth ist aber stets kleiner als die Einheit und auch positiv, wenn der Quotient des Verhältnisses der mittleren Dichtigkeit der ganzen rotirenden Masse zu der Dichtigkeit an der Oberfläche derselben ein unechter Bruch ist; und da bei unserer Erde diese Voraussetzung unzweifelhafte Gültigkeit hat, so soll dieselbe schon von hier ab festgehalten werden. Wird dieser Quotient durch ξ bezeichnet, so geht die Gleichung

$$(16.) \qquad \frac{\varrho(c)\,c^3}{3\int_0^c \varrho(\beta)\,\beta^2\,d\beta} = \frac{1}{\xi},$$

vermöge der Gleichung (11.) und der Substitution $b = c$, $t = u$, in die folgende über:

$$(17.) \qquad \frac{3-(\lambda+3)u}{3(1-u)} = \frac{1}{\xi},$$

die für u den Werth

$$(18.) \qquad u = \frac{\xi - 1}{\frac{\lambda+3}{3}\xi - 1}$$

liefert, und dieser besitzt wegen der Ungleichheiten $\xi > 1$, $\lambda > 0$ die ange-

führten Eigenschaften. Also bleiben die Reihen (14.) und (15.) für alle hier auftretenden Werthe von t convergent, und die Function $Y_n(b)$ hat nothwendig die Form

$$(19.) \qquad Y_n(b) = K_n t^{\frac{n-2}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, t),$$

wo K_n einen durch die Gleichung (5.) zu bestimmenden von b unabhängigen Werth bezeichnet.

Zu dieser Bestimmung ist es ausreichend der Variable b einen speciellen Werth beizulegen, und es liegt nahe $b = c$ zu setzen, wodurch (5.) die einfachere Form

$$(5^*.) \quad \begin{cases} -4\pi Y_n(c)\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta \frac{1}{c} + 4\pi\int_0^c f\varrho(\beta)\frac{d(Y_n(\beta)^{n+3}\beta)}{d\beta} d\beta \frac{1}{(2n+1)c^{n+1}} \\ -\left[\frac{\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta) c^2\right] + V_n c^n = 0 \end{cases}$$

annimmt. Um den Ausdruck $Y_n(b)$ aus (19.) hier zu substituiren, sei

$$\frac{(\lambda+3)D}{3E} = \varkappa, \qquad K_n = L_n \varkappa^{\frac{n-2}{\lambda}}, \qquad \beta = (\varkappa\tau)^{\frac{1}{\lambda}}$$

gesetzt, und es kommt, da $b = (\varkappa t)^{\frac{1}{\lambda}}$, $c = (\varkappa u)^{\frac{1}{\lambda}}$ ist:

$$(20.) \quad \begin{cases} -\frac{4\pi}{3} fD\, L_n(1-u)(\varkappa u)^{\frac{n}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, u) \\ +4\pi fD\, L_n\int_0^u \left(1-\frac{\lambda+3}{3}\tau\right)\frac{d\left((\varkappa\tau)^{\frac{2n+1}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, \tau)\right)}{d\tau} d\tau \frac{1}{(2n+1)(\varkappa u)^{\frac{n+1}{\lambda}}} \\ -\left[\frac{\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)(\varkappa u)^{\frac{2}{\lambda}}\right] + V_n(\varkappa u)^{\frac{n}{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Durch theilweise Integration erhält man

$$\int_0^u \left(1-\frac{\lambda+3}{3}\tau\right)\frac{d\left(\tau^{\frac{2n+1}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, \tau)\right)}{d\tau} d\tau$$

$$= \left(1-\frac{\lambda+3}{3}u\right) u^{\frac{2n+1}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, u) + \frac{\lambda+3}{3}\int_0^u \tau^{\frac{2n+1}{\lambda}} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, \tau) d\tau,$$

und weil nach (13.) $\frac{2n+1}{\lambda} = \gamma_n$, ferner das Integral

$$\int_0^u t^{\gamma_n} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, \tau) d\tau = \frac{u^{\gamma_n+1}}{\gamma_n+1} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+2, u)$$

ist, so wird aus der Gleichung (20.) nach Weglassung des allen Gliedern ge-

meinsamen Factors $(\varkappa u)^{\frac{n}{\lambda}}$ die Gleichung

$$(21.)\quad \begin{cases} 4\pi f D L_n \Big\{ -\frac{1}{3}(1-u)F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u) + \frac{1}{2n+1}\Big(\Big(1-\frac{\lambda+3}{3}u\Big)F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u) \\ \qquad + \frac{\lambda+3}{3(\gamma_n+1)}uF(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+2,u)\Big)\Big\} - \Big[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)\Big] + V_n = 0. \end{cases}$$

Dieselbe zieht sich durch die folgende Relation inter functiones contiguas zusammen

$$(22.)\quad \begin{cases} (1-u)F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u) + \Big(\frac{\gamma_n-\alpha_n-\beta_n}{\gamma_n+1} + \frac{\alpha_n\beta_n}{\gamma_n(\gamma_n+1)}\Big)uF(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+2,u) \\ \qquad = F(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,u), \end{cases}$$

welche man nach Anleitung der ersten Section der disqu. gener. circa seriem infinitam etc. *) leicht beweisen kann. Denn aus den Werthen von α_n, β_n, γ_n in (13.) folgen die Gleichungen:

$$\gamma_n-\alpha_n-\beta_n = 0, \qquad \frac{\alpha_n\beta_n}{\gamma_n} = -\frac{(\lambda+3)}{2n+1},$$

so dass zur Bestimmung von L_n die Gleichung

$$(23.)\quad \begin{cases} 4\pi f D L_n\Big(-\frac{1}{3}F(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,u) + \frac{1}{2n+1}\Big(1-\frac{\lambda+3}{3}u\Big)F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u) \\ \qquad -\Big[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)\Big] + V_n = 0 \end{cases}$$

bleibt. So erhält man den gesuchten Werth

$$(23\,*.)\quad L_n = \frac{3}{4\pi f D}\,\frac{-\Big[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)\Big] + V_n}{F(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,u) - \frac{3-(\lambda+3)u}{2n+1}F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u)}$$

und für die Kugelfunction $Y_n(b)$ den Ausdruck

$$(24.)\quad Y_n(b) = \frac{3}{4\pi f D}\,\frac{\Big(-\Big[\frac{\omega^2}{3}P_2(\cos\vartheta)\Big] + V_n\Big)(\varkappa t)^{\frac{n-2}{\lambda}}F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,t)}{F(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n,u) - \frac{3-(\lambda+3)u}{2n+1}F(\alpha_n+1,\beta_n+1,\gamma_n+1,u)}.$$

Mit der Aufstellung dieses Resultates schliesst der erste Theil dieser Untersuchung ab, dessen Zweck dahin geht, die Form der Flächen, in denen die Dichtigkeit ϱ constant ist, unter Voraussetzung der Gleichung (7.) *wirklich zu bestimmen,* nachdem *Laplace* allgemein gezeigt hat, dass diese Bestimmung

*) Comm. soc. Gott. recent. Vol. II.

für jedes Dichtigkeitsgesetz ausgeführt werden kann; denn die Einsetzung des Werthes von $Y_n(b)$ aus (24.) in die Gleichung (1.) giebt den Radius vector r als Function der Polarcoordinaten ϑ und φ, d. i. die Gleichung jener Flächen. Die Gleichung für die Oberfläche der ganzen Masse, die durch die Substitution $b = c$ erhalten wird,

$$r = c\left(1+\sum_{2}^{\infty} Y_n(c)\right),$$

kann man jetzt mit derjenigen Darstellung derselben vergleichen, die *Laplace* unabhängig von einem bestimmten Dichtigkeitsgesetze ableitet, indem er annimmt, dass die Resultante aller Kräfte, die auf einen Punkt der Oberfläche wirken, bekannt und in eine nach Kugelfunctionen der Elemente ϑ, φ fortschreitende Reihe entwickelt sei. Diese Resultante entsteht, indem man das Aggregat W in (4.) nach r differentiirt, dann für r die Reihe (1.) einsetzt, und darauf $b = c$ nimmt. Wird daher für diesen Differentialquotienten $\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)$ die Reihe

$$(25.) \qquad -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) = \mathfrak{W}_0 + \sum_{2}^{\infty} \mathfrak{W}_n$$

angenommen, wo $\mathfrak{W}_n$ eine bekannte Grösse und zwar eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung von den Elementen ϑ und φ bedeutet, so kommen die Gleichungen

$$(26.) \quad \begin{cases} \mathfrak{W}_0 = 4\pi \int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta \, \frac{1}{c^2} - \frac{2\omega^2}{3} c, \\ \mathfrak{W}_n = -8\pi Y_n(c) \int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta \, \frac{1}{c^2} \\ \quad + 4\pi \int_0^c f\varrho(\beta) \frac{d(Y_n(\beta)\beta^{n+3})}{d\beta} d\beta \, \frac{n+1}{(2n+1)c^{n+2}} + \left[\frac{2\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] - nc^{n-1} V_n, \end{cases}$$

für $n \gtrless 2$. Durch Verbindung derselben mit der Gleichung (5*) erhält man alsdann für $Y_n(c)$ die Bestimmung

$$(27.) \qquad Y_n(c) = \frac{-\left[\frac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\, c\right] + (2n+1) V_n c^{n-1} + \mathfrak{W}_n}{(n-1)\frac{4\pi}{c^2} \int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta},$$

während in Folge der Gleichung (24.)

$$(24^*.) \qquad Y_n(c) = \frac{3}{4\pi f D} \, \frac{\left(-\left[\frac{\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta)\right] + V_n\right) c^{n-2} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, u)}{F(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, u) - \frac{3-(\lambda+3)u}{2n+1} F(\alpha_n+1, \beta_n+1, \gamma_n+1, u)}$$

ist.

§. 3.

Ich lasse jetzt die Voraussetzung eintreten, dass die Wirkung der ausserhalb der rotirenden Masse befindlichen Massen aufhört, oder dass die sämmtlichen Functionen V_n der Reihe (3.) verschwinden. Dann lehrt die Gleichung (24.) dass auch die Grössen $Y_n(b)$ für $n > 2$ gleich Null werden, und dasselbe gilt hierauf wegen der Gleichung (27.) nothwendig von den Grössen $\mathfrak{W}_n$. Mithin wird die Form der Gleichungen (1.) und (25.) die folgende:

$$r = b(1+Y_2(b)), \qquad -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) = \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W}_2,$$

ferner hat man aus (24.)

$$Y_2(b) = \frac{3}{4\pi f D} \frac{-\frac{\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, t)}{F(\alpha, \beta, \gamma, u) - \frac{3-(\lambda+3)u}{5} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, u)},$$

wo statt der Grössen α_2, β_2, γ_2, wie von jetzt ab immer geschehen soll, α, β, γ geschrieben ist, und endlich aus (27.)

$$Y_2(c) = \frac{-\frac{5\omega^2}{3} P_2(\cos\vartheta) c + \mathfrak{W}_2}{\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich für $Y_2(c)$ und $\mathfrak{W}_2$ die Darstellung

$$Y_2(c) = \mathfrak{y} P_2(\cos\vartheta), \qquad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{w} P_2(\cos\vartheta),$$

wo $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{w}$ reine Constanten sind, und demgemäss für einen nach einem Punkte der Oberfläche der flüssigen Masse gezogenen Radius vector

$$(28.) \qquad r = c(1+\mathfrak{y} P_2(\cos\vartheta)),$$

und für die Resultante der Kräfte, die auf einen Punkt der Oberfläche wirken,

$$(29.) \qquad -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) = \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{w} P_2(\cos\vartheta).$$

Für $\mathfrak{y}$ kommen aber die beiden Gleichungen:

$$(30^a.) \qquad \mathfrak{y} = -\frac{1}{4\pi f D} \frac{\omega^2 F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma, u) - \frac{3-(\lambda+3)u}{5} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, u)},$$

und

$$(30^b.) \qquad \mathfrak{y} = \frac{-\frac{5\omega^2}{3} c + \mathfrak{w}}{\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta},$$

zu denen noch die Gleichung aus (26.)

$$(30^c.) \qquad \mathfrak{W}_0 = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta - \frac{2\omega^2 c}{3}$$

hinzuzufügen ist.

Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich zu dem zweiten Theile der Untersuchung, nämlich zu der Erörterung der Frage, wie die Constanten D, E, λ der Gleichung (1.)

$$\varrho(b) = D - Eb^\lambda,$$

aus der die Gleichung (30^a.) hervorgegangen ist, aus denjenigen Grössen gefunden werden, die für den Fall, dass die rotirende Masse unsere Erde ist, der directen Beobachtung zugänglich sind. Da alsdann die Grösse $-\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)$ der Gleichung (29.) mit dem Werthe der Schwerkraft in einem Punkte der Erdoberfläche von der geographischen Breite $\pi - \vartheta$ und der geographischen Länge φ zusammenfällt, da ferner, wenn l die Länge des einfachen Secundenpendels für den Punkt (ϑ, φ) bezeichnet, die bekannte Gleichung

$$(31.) \qquad -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) = \pi^2 l$$

gilt, so liefert die Combination von zwei oder mehreren Pendelbeobachtungen für Orte von verschiedenen Breiten die Grössen $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{w}$ *).

Die durch Beobachtung bekannten Grössen, vollständig aufgezählt, sind demnach die folgenden:

1) die Aequatorialaxe der rotirenden Masse $2a$,
2) die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ω,
3) die Constante $\mathfrak{W}_0$,
4) die Constante $\mathfrak{w}$,
5) die Dichtigkeit der Oberfläche $\varrho(c)$,
6) die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse $\xi\varrho(c)$.

Um aus (30^b.) und (30^c.) den Werth $\mathfrak{y}$ zu bestimmen, müsste $\omega^2 c$ bekannt sein; da aber die Grösse $1-\frac{a}{c}$ eine kleine Grösse der ersten Ordnung

*) In der Einleitung sind der klareren Vorstellung halber der Werth der Schwerkraft unter dem Aequator $= \mathfrak{W}_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{w}$, und die Abplattung der Oberfläche $= -\frac{3}{2}\mathfrak{y}$ als die beiden aus den Beobachtungen zu ermittelnden Constanten angenommen.

ist, so wird der Ausdruck

$$\frac{\omega^2 c\left(1-\frac{a}{c}\right)}{\frac{4\pi}{c^2}\int_0^c f\varrho(\beta)\beta^2 d\beta}$$

von der zweiten Ordnung und ist deshalb zu vernachlässigen, so dass man die Gleichung

$$\mathfrak{y} = \frac{\frac{-5\omega^2 a}{3} + \mathfrak{w}}{\mathfrak{W}_0 + \frac{2\omega^2 a}{3}},$$

oder, weil auch $\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}_0}$ von der ersten Ordnung sein muss, die Gleichung

$$(32.) \qquad \mathfrak{y} = \frac{\frac{-5\omega^2 a}{3} + \mathfrak{w}}{\mathfrak{W}_0}$$

erhält. Den Werth c bestimmt jetzt die Gleichung (28.), indem $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, folglich $P_2(\cos\vartheta) = \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}$ gleich $-\frac{1}{2}$ wird, und r in a übergeht,

$$a = c(1-\tfrac{1}{2}\mathfrak{y});$$

weil $\mathfrak{y}$ eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so ergiebt sich der Werth

$$(33.) \qquad c = a(1+\tfrac{1}{2}\mathfrak{y}).$$

Um die Werthe D und E durch die Grösse λ auszudrücken, hat man erstens in (7.) $b = c$ zu setzen, d. i.

$$\varrho(c) = D - Ec^\lambda,$$

und zweitens nach den Gleichungen (17.) und (18.), wo

$$u = \frac{3E}{(\lambda+3)D}c^\lambda$$

gesetzt ist,

$$\frac{3(1-u)}{3-(\lambda+3)u} = \xi, \qquad u = \frac{\xi-1}{\frac{\lambda+3}{3}\xi - 1}.$$

Demnach wird

$$Ec^\lambda = \frac{(\lambda+3)D}{3}u = \frac{(\lambda+3)(\xi-1)}{(\lambda+3)\xi-3}D,$$

$$\varrho(c) = D - Ec^\lambda = \frac{\lambda}{(\lambda+3)\xi-3}D,$$

folglich

$$(34.) \qquad D = \frac{(\lambda+3)\xi-3}{\lambda}\varrho(c),$$

$$(35.) \qquad Ec^{\lambda} = \frac{(\lambda+3)(\xi-1)}{\lambda}\varrho(c),$$

oder, wenn man den Werth von c aus (33.) anwendet,

$$(35^{*}.) \qquad E = a^{-\lambda}\Big(1-\frac{\lambda}{2}\mathfrak{y}\Big)\frac{(\lambda+3)(\xi-1)}{\lambda}\varrho(c).$$

Schliesslich aber kommt durch Gleichsetzung der beiden Werthe von $\mathfrak{y}$ aus $(30^{a}.)$ und $(30^{b}.)$, da $\frac{1}{c^2}\int_0^c f\varrho\beta^2 d\beta = \frac{fD}{3}(1-u)c$ ist, die folgende Gleichung für die Grösse λ:

$$(36.) \qquad \frac{\omega^2 F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,u)}{F(\alpha,\beta,\gamma,u)-\frac{3-(\lambda+3)u}{5}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,u)} = \frac{5\omega^2 c-3\mathfrak{w}}{c(1-u)}.$$

Die Lösung des gestellten Problems hängt jetzt allein von der Discussion dieser Gleichung ab; deshalb scheint es angemessen, die Ausdrücke der Elemente α, β, γ, u durch λ noch einmal hinzuschreiben: es war nach (13.) und (18.)

$$(37.)\ \alpha = \frac{5+R}{2\lambda}, \quad \beta = \frac{5-R}{2\lambda}, \quad \gamma = \frac{5}{\lambda}, \quad u = \frac{\xi-1}{\frac{\lambda+3}{3}\xi-1}, \quad R = \sqrt{4\lambda^2+12\lambda+25}.$$

§. 4.

Multiplicirt man die beiden Seiten der Gleichung (36.) mit $\frac{1}{\omega^2}(1-u)$ und vertauscht in den Brüchen auf beiden Seiten Zähler und Nenner, so kommt

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,u)}{(1-u)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,u)} - \frac{3-(\lambda+3)u}{5(1-u)} = \frac{\omega^2 c}{5\omega^2 c-3\mathfrak{w}},$$

folglich, da nach (17.) $\frac{3-(\lambda+3)u}{3(1-u)} = \frac{1}{\xi}$ ist,

$$(38.) \qquad \frac{F(\alpha,\beta,\gamma,u)}{(1-u)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,u)} = \frac{\omega^2 c}{5\omega^2 c-3\mathfrak{w}} + \frac{3}{5\xi}.$$

Aus einer bekannten von *Euler* herrührenden Gleichung:

$$(38^{*}.) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,u) = (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,u),$$

erhält man durch Einsetzung von $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$ für α, β, γ die Relation

$$F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,u) = (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta-1}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1,u),$$

welche in unserem Falle sich, wie folgt, vereinfacht:

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, u) = (1-u)^{-1} F(\alpha, \beta, \gamma+1, u),$$

weil nach (37.) $\gamma-\alpha-\beta=0$ ist und die Elemente α und β mit einander vertauscht werden dürfen. Wird nun die rechte Seite der Gleichung (38.), die aus lauter gegebenen Grössen besteht,

$$(39.) \qquad \frac{\omega^2 c}{5\omega^2 c - 3\mathfrak{w}} + \frac{3}{5\xi} = \eta$$

gesetzt, so verwandelt sich die Gleichung in die folgende Gestalt:

$$(40.) \qquad \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)} = \eta,$$

welche für die vorzunehmende Discussion geeigneter ist als die ursprüngliche.

Es soll jetzt eine Relation inter functiones contiguas benutzt werden, um die linke Seite der Gleichung (40.) in einen Kettenbruch zu verwandeln. Setzt man in der Formel (16.) der angeführten *Gauss*schen Abhandlung $(\gamma+1)$ für γ, und u für x, so entsteht die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u) - F(\alpha, \beta, \gamma+1, u) = \frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} u F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, u),$$

welche durch Division mit der Function $F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)$ die folgende wird:

$$(41.) \qquad \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)} = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} u \frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)}.$$

Es ist aber in Folge der *Euler*schen Gleichung (38*.)

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, u) = (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} \quad F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+2, u),$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma+1, u) = (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta+1} F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+1, u),$$

folglich

$$\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)} = \frac{1}{1-u} \frac{F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+2, u)}{F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+1, u)},$$

und deshalb entsteht aus (41.) die Gleichung

$$(42.) \qquad \frac{F(\alpha, \beta, \gamma+1, u)}{F(\alpha, \beta, \gamma, u)} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} \frac{u}{1-u} \frac{F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+2, u)}{F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+1, u)}}.$$

Hier hat der Quotient, der im Nenner der rechten Seite als Factor der Grösse $\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)} \frac{u}{1-u}$ vorkommt, dieselbe Form wie der Quotient, der die linke Seite bildet, und kann aus diesem erhalten werden, indem respective die Grössen $\gamma-\alpha+1$, $\gamma-\beta+1$, $\gamma+1$ an die Stelle der Grössen α, β, γ treten. Diese

Substitution in (42.) ausgeführt giebt sogleich die Relation

$$\frac{F(\gamma-\alpha+1,\gamma-\beta+1,\gamma+2,u)}{F(\gamma-\alpha+1,\gamma-\beta+1,\gamma+1,u)} = \frac{1}{1+\dfrac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\dfrac{u}{1-u}\dfrac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+3,u)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2,u)}},$$

und die Einsetzung dieses Werthes in die rechte Seite von (42.) liefert den Anfang einer Kettenbruchentwickelung, die offenbar durch wiederholte Anwendung von (42.) nach Belieben ausgedehnt werden kann. Um die Anwendung dieser Entwickelung zu erleichtern, mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(43.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n+1,u)}{F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n,u)} = \psi_{2n}, \\ \dfrac{F(\gamma-\alpha+n+1,\gamma-\beta+n+1,\gamma+2n+2,u)}{F(\gamma-\alpha+n+1,\gamma-\beta+n+1,\gamma+2n+1,u)} = \psi_{2n+1}, \\ \dfrac{(\gamma-\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)} = e_{2n}, \\ \dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} = e_{2n+1}, \end{cases}$$

so dass für einen beliebigen Werth der ganzen Zahl m die Darstellung

$$(44.)\quad \psi_0 = \cfrac{1}{1+e_1\dfrac{u}{1-u}} \cfrac{}{1+e_2\dfrac{u}{1-u}} \cfrac{}{1+\ddots} \cfrac{}{\ddots+\dfrac{e_{m-1}\dfrac{u}{1-u}}{1+e_m\dfrac{u}{1-u}\psi_m}}$$

stattfindet.

Vermöge dieser Bezeichnung nimmt die Gleichung (40.) die Gestalt

$$(40\,*.)\quad \psi_0 = \frac{1}{\eta}$$

an. Aus der Gleichung $u = \dfrac{\xi-1}{\dfrac{\lambda+3}{3}\xi-1}$ folgt

$$(45.)\quad \frac{u}{1-u} = \frac{3(\xi-1)}{\xi}\frac{1}{\lambda} = \frac{\zeta}{\lambda},$$

wo die Grösse ζ, da ξ nach der oben gemachten Annahme stets grösser als die Einheit ist, immer positiv sein und unter dem Werthe 3 liegen muss. Um die Grössen e_{2n} und e_{2n+1} zu bilden, dienen die aus (37.) folgenden

Gleichungen

$$(37^*.)\qquad \begin{cases} (n+\alpha)(n+\beta) = n^2 + \frac{5}{\lambda}n - \frac{\lambda+3}{\lambda}, \\ \gamma-\alpha-\beta = 0, \quad \gamma = \frac{5}{\lambda}, \end{cases}$$

und man findet

$$(46.)\qquad \begin{cases} e_{2n}\ \frac{u}{1-u} = \frac{(n^2-1)\lambda+5n-3}{((2n-1)\lambda+5)(2n\lambda+5)}\zeta, \\ e_{2n+1}\frac{u}{1-u} = \frac{(n^2-1)\lambda+5n-3}{(2n\lambda+5)((2n+1)\lambda+5)}\zeta. \end{cases}$$

Der Kürze halber werde

$$(47.)\qquad e_m \frac{u}{1-u} = f_m$$

gesetzt, dann folgt aus (46.), dass die Grössen f_m für $m \gtreqless 2$ stets positiv sind, indem nach der Annahme $\lambda > 0$, $\zeta > 0$ ist, dagegen hat f_1 den negativen Werth $-\frac{\lambda+3}{5(\lambda+5)}\zeta$. Ferner schliesst man mittelst der Gleichungen (37*), dass die *Gauss*schen Reihen, welche für $m \gtreqless 1$ Zähler und Nenner der Functionen ψ_m bilden, aus lauter positiven Gliedern bestehen, und dass jedes Glied eines Zählers einen kleineren Werth besitzt als das gleichstellige Glied des zugehörigen Nenners. Folglich ist der Werth eines jeden ψ_m, für welches $m \gtreqless 1$ ist, ein positiver echter Bruch, und wenn man daher in die rechte Seite der Gleichung (44.) an die Stelle von ψ_m nach einander die Null und die Einheit setzt, so erhält man zwei Grenzen, die den Werth von ψ_0 einschliessen.

Es werde nun die Bezeichnung

$$(48.)\qquad \Psi_h^{(m)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{f_{h+1}}{1+\cfrac{f_{h+2}}{1+\ddots+\cfrac{f_{m-1}}{1+f_m}}}}$$

eingeführt, wo h nach der Natur der Sache kleiner als m sein muss, so sind $\Psi_0^{(m)}$ und $\Psi_0^{(m-1)}$ die angegebenen Grenzen für den Werth von ψ_0, oder in anderen Worten, derselbe liegt immer zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen der ohne Ende fortgesetzten Entwickelung (44.). Aus den allgemeinen Formeln für die Näherungswerthe eines Kettenbruchs*) ergeben sich in Folge des Umstandes, dass die Grössen f_2, f_3, ... sämmtlich

*) Methodus nova integral. val. etc. art. 17. Comm. soc. Gott. recent. Vol. III.

positiv sind, die Ungleichheiten

$$(49.)\quad \begin{cases} \psi_1^{(2)} < \psi_1^{(4)} < \psi_1^{(6)} \ \ldots \\ \psi_1^{(3)} > \psi_1^{(5)} > \psi_1^{(7)} \ \ldots \\ \psi_1^{(2n-1)} > \psi_1^{(2n)} < \psi_1^{(2n+1)} \\ \dfrac{\psi_1^{(m-1)} - \psi_1^{(m)}}{-\psi_1^{(m-2)} + \psi_1^{(m-1)}} < \dfrac{f_m}{1+f_m}. \end{cases}$$

Ein Blick auf die Gleichungen (46.) zeigt, dass die Grössen f_m für keinen hier vorkommenden Werth von λ*) mit wachsender Stellenzahl m über eine gewisse leicht anzugebende endliche Grenze hinaus zunehmen; mithin bleibt $\frac{f_m}{1+f_m}$ auch bei wachsendem m ein von der Einheit um eine endliche Grösse verschiedener echter Bruch, und die letzte der hingeschriebenen Ungleichheiten lehrt, dass die Differenz

$$\psi_1^{(m-1)} - \psi_1^{(m)}$$

durch passende Wahl von m einen numerischen Werth erhalten kann, der unter einer noch so kleinen gegebenen Grösse liegt. Wegen der Gleichung (48.) hat man offenbar

$$(48^a.)\qquad \psi_h^{(m)} = \frac{1}{1+f_{h+1}\,\psi_{h+1}^{(m)}},$$

und für den speciellen Werth $h = 0$

$$(48^b.)\qquad \psi_0^{(m)} = \frac{1}{1+f_1\,\psi_1^{(m)}},$$

wo f_1 nach einer früheren Bemerkung den negativen Werth $-\frac{\lambda+3}{5(\lambda+5)}\zeta$ hat. Hier kann der im Nenner stehende Ausdruck $1+f_1\psi_1^{(m)}$ niemals gleich Null werden, da $\psi_1^{(m)}$, wie die sämmtlichen Grössen $\psi_h^{(m)}$, bei $h \gtreqless 1$, einem positiven echten Bruche gleich ist, und da von den beiden Factoren von $-f_1$ $\frac{\lambda+3}{\lambda+5}$ und $\frac{\zeta}{5} < \frac{3}{5}$, dasselbe gilt. Deshalb zieht man aus (49.) den Schluss, dass die Ungleichheiten

$$(50.)\quad \begin{cases} \psi_0^{(2)} < \psi_0^{(4)} < \psi_0^{(6)} \ \ldots \\ \psi_0^{(1)} > \psi_0^{(3)} > \psi_0^{(5)} \ \ldots \\ \psi_0^{(2n-1)} > \psi_0^{(2n)} < \psi_0^{(2n+1)} \end{cases}$$

---

*) d. h. für keinen positiven Werth, da die negativen Werthe und der Werth Null ausgeschlossen sind.

bestehen, und dass die Differenz

$$\Psi_0^{(m-1)} - \Psi_0^{(m)}$$

bei wachsendem m numerisch kleiner wird als eine noch so kleine gegebene Grösse. Da aber die Function ψ_0, wie erwähnt worden, stets zwischen den Werthen $\Psi_0^{(m-1)}$ und $\Psi_0^{(m)}$ eingeschlossen ist, so enthalten die angeführten Thatsachen den Beweis dafür, dass die Näherungswerthe der ohne Ende fortgesetzten Entwickelung (44.) zu einer beliebig genauen Darstellung der Function ψ_0 geeignet sind, deren Art und Weise durch die Ungleichheiten

$$(51.) \qquad \Psi_0^{(2n-1)} > \psi_0 > \Psi_0^{(2n)}$$

bezeichnet ist.

§. 5.

Um zu dem Beweise des Satzes zu gelangen, dass die Gleichung (40*.) nur durch einen einzigen reellen positiven Werth λ befriedigt werden kann, bilde ich die algebraische Gleichung für λ:

$$(40^a.) \qquad \Psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta},$$

welche vom m^{ten} Grade ist, und zeige von dieser, dass sie stets nur eine einzige reelle positive Wurzel $\lambda^{(m)}$ haben kann, welchen Werth die Zahl m auch annehme. Dass diese Gleichung für λ vom m^{ten} Grade ist, ergiebt sich sogleich, wenn man die einzelnen Gleichungen, die $m = 1, 2, \ldots$ entsprechen, successive bildet, was später geschehen soll. Die ausgesprochene Behauptung wird aber dadurch begründet werden, dass aus der Kettenbruchentwickelung

$$(48^c.) \qquad \Psi_0^{(m)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{f_1}{1+\cfrac{f_2}{1+\cdots+\cfrac{f_{m-1}}{1+f_m}}}},$$

welche aus (48.) durch die Substitution $h = 0$ entsteht, der Differentialquotient $\frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda}$ abgeleitet wird, und dass derselbe sich für alle *nicht negativen* Werthe von λ als wesentlich positiv erweist; während nämlich bei der Function ψ_0 die Ausschliessung des Werthes $\lambda = 0$ durch die ursprüngliche Definition (43.) geboten war, so ist dieses bei der Function $\Psi_0^{(m)}$ nicht der Fall.

Die Gleichung (48^b.) liefert für die Grösse $f_1 \Psi_1^{(m)}$ den Ausdruck

$$f_1 \Psi_1^{(m)} = \frac{1 - \Psi_0^{(m)}}{\Psi_0^{(m)}};$$

nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichung die Logarithmen und differentiirt dieselben nach λ (wobei das Differential $d\lambda$ fortgelassen werden kann), so kommt

$$d\log f_1 + d\log \Psi_1^{(m)} = -\frac{d\Psi_0^{(m)}}{1-\Psi_0^{(m)}} - d\log \Psi_0^{(m)} = -\frac{d\log \Psi_0^{(m)}}{1-\Psi_0^{(m)}}$$

oder

$$(52.) \qquad d\log \Psi_0^{(m)} = (\Psi_0^{(m)}-1)(d\log f_1 + d\log \Psi_1^{(m)}).$$

Auf gleiche Weise folgt aus $(48^a.)$ die allgemeinere Relation

$$(53.) \qquad d\log \Psi_h^{(m)} = (\Psi_h^{(m)}-1)(d\log f_{h+1} + d\log \Psi_{h+1}^{(m)}).$$

Setzt man in dieser $h=1$ und substituirt den Werth von $d\log \Psi_1^{(m)}$ in (52.), setzt man dann in (53.) $h=2$ und substituirt in der neuen Form von (52.) den Werth von $d\log \Psi_2^{(m)}$, und wiederholt dies Verfahren bis zu der Substitution $h=m-1$ *), so entsteht folgende Darstellung des Differentials $d\log \Psi_0^{(m)}$:

$$(54.) \quad \begin{cases} d\log \Psi_0^{(m)} = (\Psi_0^{(m)}-1)\, d\log f_1 \\ \qquad\qquad + (\Psi_0^{(m)}-1)(\Psi_1^{(m)}-1)\, d\log f_2 \\ \qquad\qquad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad + (\Psi_0^{(m)}-1)(\Psi_1^{(m)}-1) \ldots (\Psi_{m-1}^{(m)}-1)\, d\log f_m . \end{cases}$$

Für den speciellen vorliegenden Zweck ist es angemessen, den Factor $(\Psi_0^{(m)}-1)$ auf die linke Seite der Gleichung zu werfen und zu bemerken, dass der Factor $\frac{1}{\Psi_0^{(m)}(\Psi_0^{(m)}-1)}$ von $d\Psi_0^{(m)}$ vermöge der Gleichung $(48^b.)$ gleich dem Ausdruck $\frac{(1+f_1\Psi_1^{(m)})^2}{-f_1\Psi_1^{(m)}}$ ist, der wegen der Ungleichheiten $f_1<0$ und $\Psi_1^{(m)}>0$ stets positiv und endlich bleibt, und wegen der Ungleichheit $1+f_1\Psi_1^{(m)}>0$ nicht verschwinden kann. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$(55.) \quad \begin{cases} \frac{(1+f_1\Psi_1^{(m)})^2}{-f_1\Psi_1^{(m)}} \frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda} = \frac{d\log f_1}{d\lambda} + (\Psi_1^{(m)}-1)\frac{d\log f_2}{d\lambda} \\ \qquad\qquad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad + (\Psi_1^{(m)}-1) \ldots (\Psi_{m-1}^{(m)}-1)\frac{d\log f_m}{d\lambda}, \end{cases}$$

und es ist klar, dass der Differentialquotient $\frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda}$ stets positiv sein muss, sobald die rechte Seite dieser Gleichung stets positiv ist.

---

*) wo $\Psi_m^{(m)}=1$, $d\log \Psi_m^{(m)}=0$ zu setzen ist.

Um sich von dem letzteren zu überzeugen, ist die Bildung der Differentialquotienten $\frac{d\log f_1}{d\lambda}$, $\frac{d\log f_2}{d\lambda}$, ... aus (46.) erforderlich, und man findet

$$(56.)\quad \begin{cases} \frac{d\log f_{2n}}{d\lambda} = \frac{n^2-1}{(n^2-1)\lambda+5n-3} - \frac{2n-1}{(2n-1)\lambda+5} - \frac{2n}{2n\lambda+5} \\ \qquad = \frac{-G_{2n}}{((n^2-1)\lambda+5n-3)((2n-1)\lambda+5)(2n\lambda+5)}, \\ G_{2n} = 2n(2n-1)(n^2-1)\lambda^2+4n(2n-1)(5n-3)\lambda+5(15n^2-17n+8), \\ \frac{d\log f_{2n+1}}{d\lambda} = \frac{n^2-1}{(n^2-1)\lambda+5n-3} - \frac{2n}{2n\lambda+5} - \frac{2n+1}{(2n+1)\lambda+5} \\ \qquad = \frac{-G_{2n+1}}{((n^2-1)\lambda+5n-3)(2n\lambda+5)((2n+1)\lambda+5)}, \\ G_{2n+1} = 2n(2n+1)(n^2-1)\lambda^2+4n(2n+1)(5n-3)\lambda+5(15n^2-7n+2). \end{cases}$$

Diese Darstellungen zeigen, dass die Grösse $\frac{d\log f_1}{d\lambda} = \frac{2}{(\lambda+3)(\lambda+5)}$ positiv ist, während die übrigen $\frac{d\log f_2}{d\lambda}$, $\frac{d\log f_3}{d\lambda}$, ... sämmtlich negative Werthe haben. Da nun die Grössen $\Psi_1^{(m)}$, $\Psi_2^{(m)}$, ... sämmtlich gleich positiven echten Brüchen sind, so erhellt, dass von den Gliedern der rechten Seite der Gleichung (55.) das erste und das zweite positiv sind, die übrigen aber vom zweiten ab abwechselnd positiv und negativ ausfallen. Wenn sich daher beweisen lässt, dass vom zweiten Gliede ab jedes Glied einen kleineren numerischen Werth hat als das demselben unmittelbar vorhergehende, so muss die ganze rechte Seite der Gleichung (55.) nothwendig einen positiven Werth haben.

Das $(h+1)^{\text{te}}$ Glied der in Rede stehenden Reihe wird aus dem h^{ten} durch Multiplication mit dem (negativen) Factor

$$\frac{\frac{d\log f_{h+1}}{d\lambda}}{\frac{d\log f_h}{d\lambda}}(\Psi_h^{(m)}-1)$$

gebildet; mithin kommt es darauf an zu zeigen, dass der numerische Werth desselben unter der Einheit liegt, oder dass für $h \gtrless 2$

$$(57.)\qquad -\frac{d\log f_h}{d\lambda} > -\frac{d\log f_{h+1}}{d\lambda}(1-\Psi_h^{(m)})$$

ist. Da aber für $h \gtrless 1$ wegen $f_{h+1} > 0$ die Function $\Psi_h^{(m)} \gtrless \frac{1}{1+f_{h+1}}$ ist,

so wird die Ungleichheit (57.) gelten, sobald die Ungleichheit

$$(57^a.) \qquad -\frac{d\log f_h}{d\lambda} > -\frac{d\log f_{h+1}}{d\lambda}\left(1-\frac{1}{1+f_{h+1}}\right)$$

erfüllt ist, der man folgende Form geben kann:

$$(57^b.) \qquad -\frac{d\log f_h}{d\lambda} > \left(\frac{d\log f_h}{d\lambda}-\frac{d\log f_{h+1}}{d\lambda}\right) f_{h+1}.$$

Ich unterscheide bei der Einsetzung der Formeln aus (46.) und (56.) zwischen einem geraden und einem ungeraden Werthe von h.

Erster Fall. $h=2n$. Die Ungleichheit

$$(58.) \qquad \begin{cases} \dfrac{G_{2n}}{((n^2-1)\lambda+5n-3)((2n-1)\lambda+5)(2n\lambda+5)} \\ > \left(-\dfrac{2n-1}{(2n-1)\lambda+5}+\dfrac{2n+1}{(2n+1)\lambda+5}\right)\dfrac{(n^2-1)\lambda+5n-3}{(2n\lambda+5)((2n+1)\lambda+5)}\zeta \end{cases}$$

oder durch Befreiung der linken Seite von ihrem Nenner

$$(58^a.) \qquad G_{2n} > \frac{10((n^2-1)\lambda+5n-3)^2\zeta}{((2n+1)\lambda+5)^2}$$

ist allgemein für $\lambda > 0$ gültig, sobald sie für $\lambda = 0$ besteht, da die Function G_{2n}, wie ihr Ausdruck in (56.) sogleich lehrt, mit wachsendem λ zunimmt, die rechte Seite von $(58^a.)$ aber mit wachsendem λ abnimmt, weil für $n \geqq 1$ $\frac{5n-3}{n^2-1} > \frac{5}{2n+1}$ ist. Für $\lambda = 0$ geht aber $(58^a.)$ in

$$(58^b.) \qquad 15n^2-17n+8 > \frac{2(5n-3)^2\zeta}{25}$$

über, und weil ζ stets unter dem Werthe 3 liegt, so ist $(58^b.)$ eine Folge der offenbar richtigen Ungleichheit

$$(58^c.) \qquad 15n^2-17n+8 > \frac{6(5n-3)^2}{25}.$$

Zweiter Fall. $h=2n+1$. Die Ungleichheit

$$(59.) \qquad \begin{cases} \dfrac{G_{2n+1}}{((n^2-1)\lambda+5n-3)(2n\lambda+5)((2n+1)\lambda+5)} > \Big(-\dfrac{n^2+2n}{(n^2+2n)\lambda+5n+2}+\dfrac{n^2-1}{(n^2-1)\lambda+5n-3} \\ \qquad +\dfrac{2n+2}{(2n+2)\lambda+5}-\dfrac{2n}{2n\lambda+5}\Big)\dfrac{(n^2+2n)\lambda+5n+2}{((2n+1)\lambda+5)((2n+2)\lambda+5)}\zeta \end{cases}$$

oder nach Wegschaffung des Nenners der linken Seite

$$(59^a.) \quad G_{2n+1} > \left(\frac{10((n^2+2n)\lambda+5n+2)((n^2-1)\lambda+5n-3)}{((2n+2)\lambda+5)^2}-\frac{(5n^2-n+2)(2n\lambda+5)}{(2n+2)\lambda+5}\right)\zeta$$

folgt aus derjenigen, die man erhält, indem man den zweiten negativen Summanden des Factors von ζ fortlässt. Die so gebildete Ungleichheit besitzt,

wie leicht einzusehen, wieder die Eigenschaft von (58^a.), dass ihre linke Seite mit von der Null an zunehmendem λ wächst, die rechte abnimmt. Man hat deshalb nur $\lambda = 0$ zu setzen, wodurch die Ungleichheit

$$(59^b.) \qquad 15n^2 - 7n + 2 > 2(n+\tfrac{2}{5})(n-\tfrac{3}{5})\zeta$$

kommt, welche wegen der Bedingung $\zeta < 3$ aus der evidenten Ungleichheit

$$(59^c.) \qquad 15n^2 - 7n + 2 > 6(n+\tfrac{2}{5})(n-\tfrac{3}{5})$$

folgt.

Auf diese Weise ist die Ungleichheit (57^b.) und folglich auch die Ungleichheit (57.) vollständig bewiesen, und die Behauptung, dass der Differentialquotient $\frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda}$ für $\lambda \geqq 0$ stets positiv ist, gerechtfertigt.

Um das Schema für die geordneten Gleichungen $\Psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta}$ zu erhalten, kann man die Function $\Psi_0^{(m)}$ statt in der in (48^c.) gegebenen Form in der folgenden darstellen:

$$(60.) \qquad \Psi_0^{(m)} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{5}g_1}{\lambda + 5 + \cfrac{g_2}{2\lambda + 5 + \ddots + \cfrac{g_m}{m\lambda + 5}}}},$$

wo $f_m = \frac{g_m}{((m-1)\lambda+5)(m\lambda+5)}$ gesetzt ist, und daher nach (46.) g_m diese Bedeutung hat:

$$(61.) \qquad g_{2n} = ((n^2-1)\lambda + 5n - 3)\zeta, \qquad g_{2n+1} = ((n^2-1)\lambda + 5n - 3)\zeta.$$

Nimmt man daher

$$(62.) \qquad \Psi_0^{(m)} = \frac{S^{(m)}}{T^{(m)}}$$

und bildet die Grössen $S^{(m)}$ und $T^{(m)}$ nach den oben angeführten Formeln *)

$$S^{(0)} = 1, \qquad T^{(0)} = 1,$$
$$S^{(1)} = (\lambda+5)S^{(0)}, \qquad T^{(1)} = (\lambda+5)T^{(0)} + \tfrac{1}{5}g_1,$$
$$S^{(2)} = (2\lambda+5)S^{(1)} + g_2 S^{(0)}, \qquad T^{(2)} = (2\lambda+5)T^{(1)} + g_2 T^{(0)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

so ist klar, dass die Grössen $S^{(m)}$ und $T^{(m)}$ ganze rationale Functionen von λ vom m^{ten} Grade werden, da die Grössen g_m lineare Ausdrücke in λ sind. Mithin wird die Gleichung $\Psi_0^{(m)} - \frac{1}{\eta} = \frac{S^{(m)}}{T^{(m)}} - \frac{1}{\eta} = 0$ durch Multiplication

*) Methodus nova integr. val. etc. art. 17.

mit dem Nenner $T^{(m)}$ geordnet, und für die Bildung der Gleichungen

$$(40^{b}.) \qquad T^{(m)} - \eta S^{(m)} = 0$$

kommt folgendes Schema:

$$(63.) \quad \begin{cases} T^{(0)} - \eta S^{(0)} = 1 - \eta, \\ T^{(1)} - \eta S^{(1)} = (\lambda + 5)(1 - \eta) + \frac{1}{5} g_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ T^{(m)} - \eta S^{(m)} = (m\lambda + 5)(T^{(m-1)} - \eta S^{(m-1)}) + g_m (T^{(m-2)} - \eta S^{(m-2)}), \end{cases}$$

durch das die frühere Bemerkung, dass die Gleichung $(40^{b}.)$ eine Gleichung m^{ten} Grades für λ ist, ihre Bestätigung findet.

Aus der vorhin bewiesenen Thatsache, dass der Differentialquotient $\frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda}$ für $\lambda \geqq 0$ stets positiv ist, folgt erstens, dass die Gleichung $(40^{c}.)$ $\Psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta}$ nie mehr als *eine* reelle positive Wurzel $\lambda^{(m)}$ haben kann, wie behauptet ist, es folgt aber auch zweitens, dass die Gleichung nur dann und dann stets eine solche Wurzel besitzt, wenn der Werth $\frac{1}{\eta}$ zwischen den beiden Werthen liegt, die $\Psi_0^{(m)}$ für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ annimmt. Aus den Gleichungen (46.) erkennt man, dass bei einem über jede Grenze hinaus wachsenden λ die Grössen f_m, bei denen $m \geqq 2$ ist, sich der Null nähern, während f_1 den Ausdruck $-\frac{\zeta}{5}$ zur Grenze hat, dass ferner bei $\lambda = 0$

$$(64.) \qquad f_{2n} = \frac{(5n-3)\zeta}{25}, \qquad f_{2n+1} = \frac{(5n-3)\zeta}{25}$$

wird. Der Werth von $\Psi_0^{(m)}$ für $\lambda = 0$, der $Q^{(m)}$ genannt werden mag, entsteht also aus $(48^{c}.)$ durch Substitution der vorstehenden Werthe von f_m; der Werth $\Psi_0^{(m)}$ für $\lambda = \infty$ zieht sich in das Glied $\frac{1}{1 - \frac{\zeta}{5}}$ zusammen.

§. 6.

Die Eigenschaften der Functionen $\Psi_0^{(m)}$, welche beim Zunehmen der Zahl m hervortreten, sind in §. 4 unter der Voraussetzung abgeleitet worden, dass die Grösse λ zwar einen beliebig kleinen endlichen positiven Werth, aber nicht den Werth Null annehmen darf. Es ist jetzt zweckmässig zu zeigen, dass diese Eigenschaften auch noch bei $\lambda = 0$ gelten, wo nach der eingeführten Bezeichnung $\Psi_0^{(m)}$ in $Q^{(m)}$ übergeht. Geht man zu diesem Ende auf die Functionen $\Psi_1^{(m)}$ zurück, so erhellt, dass die Ungleichheiten (49.) jedenfalls für $\lambda = 0$ bestehen bleiben, da dieselben nur voraussetzen, dass die Grössen

$f_2, f_3, \ldots$ positiv sind; und dies ist nach (64.) bei $\lambda = 0$ auch der Fall. Um aber aus der Ungleichheit

$$\frac{\psi_1^{(m-1)} - \psi_1^{(m)}}{-\psi_1^{(m-2)} + \psi_1^{(m-1)}} < \frac{f_m}{1+f_m}$$

zu schliessen, dass die Differenz $\psi_1^{(m-1)} - \psi_1^{(m)}$ mit wachsendem m sich der Null beliebig nähert, kann man sich auf den von *Weierstrass* *) bewiesenen Satz stützen, dass das Product

$$\left(1+\frac{1}{f_2}\right)\left(1+\frac{1}{f_3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{f_m}\right)$$

mit zunehmendem m über jeden gegebenen Werth hinaus wächst, so bald die aus lauter positiven Gliedern bestehende Reihe

$$\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\cdots+\frac{1}{f_m}$$

bei zunehmendem m nicht convergirt. In Folge von (64.) ist diese Bedingung hier offenbar erfüllt und der gezogene Schluss gerechtfertigt. Da nun der Uebergang von den Functionen $\psi_1^{(m)}$ zu den Functionen $\psi_0^{(m)}$ bei $\lambda = 0$ derselbe ist wie bei $\lambda > 0$, so ist die in Betreff der Grössen $Q^{(m)}$ ausgesprochene Behauptung erwiesen; d. h. es steht fest, dass die Ungleichheiten

$$Q^{(1)} > Q^{(3)} > Q^{(5)} \ldots,$$
$$Q^{(2)} < Q^{(4)} < Q^{(6)} \ldots,$$
$$Q^{(2n-1)} > Q^{(2n)} < Q^{(2n+1)}$$

richtig sind, und dass, weil die Differenz $Q^{(m-1)} - Q^{(m)}$ mit zunehmendem m ohne Ende abnimmt, die Grössen $Q^{(m)}$ in diesem Falle gegen eine gewisse feste Grenze convergiren, die mit Q bezeichnet werden soll. Es ist also Q der Werth des in infinitum fortgesetzten Kettenbruches

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{3\zeta}{25}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{2\zeta}{25}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{2\zeta}{25}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{7\zeta}{25}}$$
$$\cfrac{}{1+\cfrac{7\zeta}{25}}$$
$$\cfrac{}{1+\text{etc.}}$$

*) Band LI, pag. 19 dieses Journals.

Aus den entwickelten Eigenschaften der Grössen $Q^{(m)}$ ergiebt sich nun unmittelbar, dass, wenn Q kleiner ist, als ein beliebiger gegebener Werth $\frac{1}{\eta}$, in der Reihe $Q^{(1)}$, $Q^{(3)}$, ... eine gewisse Grösse $Q^{(2N-1)}$ die erste ist, welche unterhalb $\frac{1}{\eta}$ liegt, und dass dann die sämmtlichen Grössen $Q^{(m)}$, bei denen die (gerade oder ungerade) Zahl $m > 2N-1$ ist, unterhalb $\frac{1}{\eta}$ bleiben; und es ergiebt sich ebenso, dass, wenn Q grösser ist als ein beliebiger gegebener Werth $\frac{1}{\eta}$, in der Reihe $Q^{(2)}$, $Q^{(4)}$, ... eine gewisse Grösse $Q^{(2N)}$ die erste ist, die oberhalb $\frac{1}{\eta}$ liegt, und dass dann die sämmtlichen Grössen $Q^{(m)}$, bei denen die (gerade oder ungerade) Zahl $m > 2N$ ist, oberhalb $\frac{1}{\eta}$ bleiben.

Hält man diese Bedeutung der Zahlen $2N-1$ und $2N$ bei $Q < \frac{1}{\eta}$ und $Q > \frac{1}{\eta}$ fest, so ist klar, dass, sobald die Ungleichheit

$$(65.) \qquad Q < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$$

erfüllt ist, die sämmtlichen Gleichungen $\Psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta}$, bei denen $m \gtreqless 2N-1$ ist, durch einen reellen positiven Werth $\lambda^{(m)} = \lambda$ befriedigt werden, dass dagegen, sobald die Ungleichheit

$$Q > \frac{1}{\eta}$$

gilt, die sämmtlichen Functionen $\Psi_0^{(m)} - \frac{1}{\eta}$, bei denen $m \gtreqless 2N$ ist, für $\lambda \gtreqless 0$ stets positiv bleiben. Wird die Ungleichheit (65.) befriedigt angenommen, so gelten wegen der Ungleichheiten (50.) und wegen der Ungleichheit $\frac{d\Psi_0^{(m)}}{d\lambda} > 0$ für $\lambda \gtreqless 0$ in Betreff der relativen Grösse der Werthe $\lambda^{(2N-1)}$, $\lambda^{(2N)}$, ... die Beziehungen

$$(66.) \qquad \begin{cases} \lambda^{(2N-1)} < \lambda^{(2N+1)} < \lambda^{(2N+3)} \ldots, \\ \lambda^{(2N)} > \lambda^{(2N+2)} > \lambda^{(2N+4)} \ldots, \\ \lambda^{(2n-1)} < \lambda^{(2n)} > \lambda^{(2n+1)} \quad (\text{für } n \gtreqless N). \end{cases}$$

Denn wenn zwei Functionen A und B von λ, von denen $A > B$ ist, mit wachsendem λ beständig zunehmen, so muss der Werth von λ, für den A einem bestimmten Werthe gleich wird, immer kleiner sein als der Werth von λ, für den dasselbe bei B eintritt. Auch sieht man leicht, dass der Werth der Differenz $\lambda^{(m-1)} - \lambda^{(m)}$ mit wachsendem m sich der Null nähert.

Der Beweis dafür, dass die Gleichung (40 *.)

$$\psi_0 = \frac{1}{\eta},$$

welche für unser Problem den Werth λ bestimmen soll, eine einzige reelle positive Wurzel hat, sobald die Ungleichheiten (65.)

$$Q < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$$

befriedigt sind, und keine reelle positive Wurzel hat, sobald diese Ungleichheiten nicht befriedigt sind, lässt sich jetzt, wie folgt, zusammenfassen. Wenn die Ungleichheiten (65.) gelten, so giebt es nach dem oben Gesagten eine solche Zahl N, dass für $n \geqq N$ die Gleichungen $\Psi_0^{(2n-1)} = \frac{1}{\eta}$ und $\Psi_0^{(2n)} = \frac{1}{\eta}$ respective durch die reellen positiven Wurzeln $\lambda^{(2n-1)}$ und $\lambda^{(2n)}$ erfüllt werden. Wegen der Ungleichheiten (51.)

$$\Psi_0^{(2n-1)} > \psi_0 > \Psi^{(2n)}$$

und der mehrfach angewendeten Ungleichheiten

$$\frac{d\Psi_0^{(2n-1)}}{d\lambda} > 0, \qquad \frac{d\Psi_0^{(2n)}}{d\lambda} > 0,$$

hat die Function $\psi_0 - \frac{1}{\eta}$ bei $0 \leqq \lambda \leqq \lambda^{(2n-1)}$ einen negativen, bei $\lambda \geqq \lambda^{(2n)}$ einen positiven Werth. Aus dieser Ursache muss dieselbe, da sie sich, so lange $\lambda > 0$, mit λ stetig ändert, innerhalb der Grenzen $\lambda = \lambda^{(2n-1)}$ und $\lambda = \lambda^{(2n)}$ gleich Null werden; weil aber diese Grenzen durch Wachsenlassen von n beliebig nahe an einander gerückt werden können, so ist der *eine Grenzwerth*, dem sich $\lambda^{(2n-1)}$ und $\lambda^{(2n)}$ ohne Ende nähern, der *einzige Werth* λ, der die Gleichung $\psi_0 - \frac{1}{\eta} = 0$ befriedigt.

Wenn die Ungleichheiten (65.) nicht erfüllt sind, so kann man entweder $\frac{1}{\eta} \geqq \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$ oder $Q > \frac{1}{\eta}$ oder $Q = \frac{1}{\eta}$ haben. Wenn $\frac{1}{\eta} \geqq \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$ ist, so wird offenbar für jede Zahl m und für jeden endlichen positiven Werth λ die Function $\Psi_0^{(m)} - \frac{1}{\eta}$ negativ, und daher auch vermöge der Ungleichheiten (51.) die Function $\psi_0 - \frac{1}{\eta}$ negativ und niemals gleich Null. Der Werth $\lambda = \infty$, der bei $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$ genügt, ist durch die Natur unseres Problems ausgeschlossen. Wenn $Q > \frac{1}{\eta}$ ist, so existirt, wie bemerkt wurde, eine solche

Zahl N, dass die Differenz $\Psi_0^{(m)} - \frac{1}{\eta}$ für $m \gtreqless 2N$ und $\lambda \gtreqless 0$ positiv bleibt: mithin ist vermöge (51.) ebenfalls $\psi_0 - \frac{1}{\eta} > 0$, und die Gleichung (40*.) liefert keine reelle positive Wurzel. Es kann nun endlich $Q = \frac{1}{\eta}$ sein: in diesem Falle ist zu erwägen, dass für jeden die Null übertreffenden Werth von λ die Werthe $\Psi_0^{(2n-1)}$ und $\Psi_0^{(2n)}$ den Werth von ψ_0 beliebig enge einschliessen, und dass diese Grenzen, sobald λ stetig abnehmend gleich Null wird, ebenfalls stetig in die Werthe $Q^{(2n-1)}$ und $Q^{(2n)}$ übergehen, die mit wachsendem n gegen *dieselbe Grenze* Q convergiren. Nun gestattet zwar unsere Definition von ψ_0 als Quotient von zwei hypergeometrischen Reihen nicht, den Werth dieser Function für $\lambda = 0$ zu betrachten, da alsdann die Convergenz der Reihen aufhört (und zwar nicht allein, weil $u = 1$ wird, sondern auch weil die Elemente α und γ mit abnehmendem λ über jede Grenze hinaus wachsen); allein das stetige Verhalten der Grenzen $\Psi_0^{(2n-1)}$ und $\Psi_0^{(2n)}$ bei abnehmendem λ lässt keinen Zweifel darüber, dass der unendlich ausgedehnte convergirende Kettenbruch Q den Werth darstellt, dem sich die Function ψ_0 für ein ohne Ende abnehmendes λ nähert. Man darf deshalb sagen, dass bei $Q = \frac{1}{\eta}$ die Gleichung (40*.) durch einen unendlich kleinen positiven Werth von λ befriedigt wird. Da aber auch ein solcher Werth a priori ausgeschlossen ist, so bleibt die Ungleichheit (65.) die nothwendige und zureichende Bedingung für die Existenz eines reellen, positiven, endlichen Werthes λ, der den Anforderungen unseres Problems genügt.

Eine Methode zur Berechnung des Werthes λ aus den gegebenen Zahlenwerthen η und ζ bietet sich hier von selbst dar; man bildet die algebraischen Gleichungen $\Psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta}$ für $m = 2N-1,\ 2N,\ 2N+1,\ \ldots$ und sucht respective die reellen positiven Wurzeln derselben $\lambda^{(2N-1)},\ \lambda^{(2N)},\ \lambda^{(2N+1)},\ \ldots$ auf, welche sich nach (66.) dem gesuchten Werthe immer mehr nähern, indem sie abwechselnd unterhalb oder oberhalb desselben liegen. Auf diese Weise zeigt die Folge der Werthe $\lambda^{(m)}$ selbst den Grad der Genauigkeit an, welcher für die auszuführende Bestimmung erreicht ist. Nimmt man den Werth λ, welcher die Gleichung (40*.) befriedigt, als gefunden an, so liefern die Gleichungen (34.) und (35.) den Werth der Constanten D und Ec^λ der Formel (7.), und für die Dichtigkeit ϱ entsteht der Ausdruck

$$(7^*.) \qquad \varrho(b) = \left(\frac{(\lambda+3)\xi - 3}{\lambda} - \frac{(\lambda+3)(\xi-1)}{\lambda}\left(\frac{b}{c}\right)^\lambda\right)\varrho(c).$$

Um die abgeleiteten Resultate auf die gegebenen Verhältnisse der Erde anzuwenden, habe ich den Werth für die Länge der Aequatorialaxe $2a$, den Werth der Winkelgeschwindigkeit ω und die Daten zur Bestimmung der Constanten $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{w}$ aus dem Lehrbuche der mathematischen Geographie von *E. Schmidt* entnommen. Nach demselben ist *) a gleich 3271837,5 Toisen, die Rotationszeit der Erde gleich 0,99727 des mittleren Sonnentages, die Länge l des einfachen Secundenpendels wird in englischen Zollen, da $\sin\psi$ bei uns $= \cos\vartheta$ ist, durch folgende aus einer grossen Zahl von Beobachtungen gezogene Formel dargestellt **)

$$39{,}015233 + 0{,}202898\cos^2\vartheta.$$

Ich habe mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit, die Pariser Linie als Längeneinheit gewählt und bemerke, dass ein Pariser Fuss gleich 1,06575 des englischen Fusses ist; dann gehen die angeführten Daten in die folgenden über:

$$\begin{aligned} a &= 3271837{,}5 \times 864, \\ \omega &= 0{,}0000739213, \\ l &= 439{,}2988 + 2{,}28454\cos^2\vartheta. \end{aligned}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (29.) und (31.) hat man

$$\begin{aligned} \pi^2 l &= \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{w} P_2(\cos\vartheta) \\ &= \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{w}\left(\frac{3\cos^2\vartheta - 1}{2}\right), \end{aligned}$$

und deshalb sogleich

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_0 &= 439{,}2988\pi^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2{,}28454\pi^2 \\ &= 4328{,}191, \\ \mathfrak{w} &= \tfrac{2}{3}\cdot 2{,}28454\pi^2 \\ &= 15{,}03183. \end{aligned}$$

Der Werth der mittleren Dichtigkeit der Erdoberfläche ist nach Angabe des Lehrbuchs der Geognosie von *C. Fr. Naumann* (Bd. I, §. 17, pag. 35 der zweiten Ausgabe) gleich 2,5 gesetzt, wobei die Dichtigkeit des destillirten Wassers, wie gewöhnlich, als Einheit betrachtet ist. In dem genannten Werthe ist die Dicke der Erdkruste, die bei dieser Bestimmung zu Grunde gelegt worden, nicht näher bezeichnet; für den gegenwärtigen Zweck ist es, wie man leicht sieht, angemessen diese Dicke etwa gleich dem Unterschiede zwischen der Aequatorialaxe und der Polaraxe der Erde zu nehmen und dabei auf die

*) pag. 371. **) pag. 381.

Vertheilung des Meeres zu achten; auf den letzteren Umstand wird übrigens auch an der angeführten Stelle hingewiesen.

Für die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde ist der Werth 5,5832 das Resultat der von *Reich* angestellten Untersuchungen (*Poggendorf*s Annalen Bd. LXXXV, pag. 189) angenommen. Der Uebersicht wegen stelle ich die Werthe der sechs Constanten, wie folgt, zusammen:

1) die Aequatorial-Halbaxe $a = 3271837{,}5 \times 864$
2) die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0{,}0000739213$
3) $\mathfrak{W}_0 = 4328{,}191$
4) $\mathfrak{w} = 15{,}03183$
5) die Dichtigkeit der Oberfläche $\varrho(c) = 2{,}5$
6) die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse $\xi\varrho(c) = 5{,}5832$.

Hieraus bildet man zunächst

$$\omega^2 a = 15{,}03184$$

und dann nach der Gleichung (32.)

$$\mathfrak{y} = -0{,}00231534,$$

wodurch

$$\begin{aligned} c &= 3268049 \times 864 \text{ Linien} \\ &= 3268049 \text{ Toisen} \end{aligned}$$

kommt. Zur Bestimmung von ξ hat man die Gleichung

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{5{,}5832}{2{,}5} \\ &= 2{,}23328; \end{aligned}$$

nach (39.) ist ferner

$$\eta = \frac{\omega^2 c}{5\omega^2 c - 3\mathfrak{w}} + \frac{3}{5\xi}.$$

Da hier der Bruch $\frac{\omega^2 c}{5\omega^2 c - 3\mathfrak{w}}$ durch Division von zwei kleinen Grössen erster Ordnung entstanden ist, so wird der seiner Bestimmung anhaftende Fehler nicht vergrössert, wenn man statt desselben den Ausdruck $\frac{\omega^2 a}{5\omega^2 a - 3\mathfrak{w}}$ setzt, der hier $= 0{,}5$ wird; die Grösse $\frac{3}{5\xi}$ wird gleich 0,26866, mithin

$$\eta = 0{,}76866.$$

Endlich hat man die Gleichung

$$\zeta = 3 - \frac{3}{\xi} = 1{,}6567.$$

Ehe jetzt zu der Ausmittelung des Werthes λ geschritten wird, ist es nothwendig zu zeigen, dass die Ungleichheit (65.)

$$Q < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{1-\frac{\zeta}{5}}$$

erfüllt ist, von der die Existenz eines reellen positiven den Anforderungen der Aufgabe genügenden Werthes λ abhängt. In dem vorliegenden Falle genügt es, statt Q die obere Grenze $Q^{(1)} = \frac{1}{1-\frac{3\zeta}{25}}$ zu setzen, und daraus, dass die Ungleichheit auch bei dieser Aenderung gilt, folgt zugleich, wie oben gezeigt worden, dass die sämmtlichen Gleichungen

$$\psi_0^{(m)} = \frac{1}{\eta}$$

von $m = 1$ ab zur Bestimmung von Näherungswerthen $\lambda^{(m)}$ für die Grösse λ geeignet sind. Man hat nämlich

$$1-\frac{\zeta}{5} = 0{,}6687$$

$$1-\frac{3\zeta}{25} = 0{,}8012$$

$$\eta = 0{,}76866$$

und deshalb

$$1-\frac{3\zeta}{25} > \eta > 1-\frac{\zeta}{5},$$

wie behauptet worden ist.

Bildet man jetzt die Gleichungen $T^{(m)} - \eta S^{(m)} = 0$ für $m = 1, 2, 3, 4$ nach (63.), so ergeben sich die folgenden reellen positiven Wurzeln $\lambda^{(m)}$:

$$\lambda^{(1)} = 1{,}6268$$

$$\lambda^{(2)} = 2{,}4065$$

$$\lambda^{(3)} > 2{,}3868 \text{ und } < 2{,}387$$

$$\lambda^{(4)} > 2{,}3897 \text{ und } < 2{,}39.$$

Mithin unterscheiden sich $\lambda^{(3)}$ und $\lambda^{(4)}$ um weniger als vier Einheiten der vierten Ziffer; da aber, wie schon bemerkt worden, die Bildung des Werthes η immer einen Fehler der ersten Ordnung zulässt, d. h. hier einen Fehler vom Range der Grösse $y = -0{,}00231534$, so ist ein Fehler derselben Ordnung auch bei der Bestimmung von λ nicht zu umgehen und eine grössere Genauig-

keit als die durch die Grenzen 2,3868 und 2,39 umschriebene nicht zu erzielen. Da der Werth $\lambda^{(4)}$ näher an dem gesuchten Werthe von λ liegen muss, als der Werth $\lambda^{(3)}$, so wird man es vorziehen, den Werth

$$\lambda = 2{,}39$$

anzunehmen, und die Formel (7*.) liefert alsdann folgenden Ausdruck der Dichtigkeit:

$$\varrho(b) = 9{,}453 - 6{,}953\left(\frac{b}{c}\right)^{2{,}39}.$$

Es müsste also die Dichtigkeit im Mittelpunkte der Erde gleich 9,453 der Dichtigkeit des destillirten Wassers sein.

Breslau, den 23sten Juli 1862.

Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

(Von Herrn *Carl Neumann* zu Halle.)

In der Theorie der Wärme und in der Theorie der (statischen) Elektricität existiren zwei Probleme, welche unter einander, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, eine sehr nahe Verwandtschaft besitzen. Das eine derselben hat die

I. *Bestimmung des stationären Temperaturzustandes in einem Körper, dessen Oberfläche überall mit willkürlich gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact steht;*

das andere hat die

II. *Bestimmung der elektrischen Vertheilung in einem Körper, welcher sich im Bereich willkürlich gegebener und unveränderlicher elektrischer Kräfte befindet*

zum Gegenstande *).

In einer im Verlage von *H. W. Schmidt* in Halle a. S. 1862 erschienenen Schrift: „Lösung des allgemeinen Problemes des stationären Temperaturzustandes für einen homogenen Körper, welcher von zwei *nicht*concentrischen Kugelflächen begrenzt wird", habe ich diese beiden Probleme für einen homogenen Körper, welcher von irgend zwei einander nicht schneidenden Kugelflächen begrenzt wird, in voller Allgemeinheit gelöst. Ich beabsichtige hier die Resultate anzugeben, zu welchen ich dort gelangt bin, und die Methode anzudeuten, deren ich mich dabei bedient habe.

Ein Körper der eben genannten Art kann je nach der Lage der beiden ihn begrenzenden Kugelflächen sehr verschiedene Gestalten besitzen. Es können nämlich die beiden Flächen den Körper entweder *beide äusserlich*, oder es können ihn *beide innerlich*, oder es kann endlich die *eine* ihn *äusserlich*, die *andere* ihn *innerlich* begrenzen. Im ersten Fall haben wir es dann mit einem Körper zu thun, der aus zwei getrennten Stücken, nämlich aus

*) Bei dem Probleme II. handelt es sich also um diejenige Vertheilung, welche das in dem Körper enthaltene elektrische Fluidum unter der gegenseitigen Einwirkung seiner Theilchen und unter der gleichzeitigen Einwirkung jener willkürlich gegebenen und unveränderlichen äusseren Kräfte annimmt.

zwei Kugeln, besteht; im zweiten Fall mit einem Körper zu thun, der in seinem Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin ringsum unbegrenzt ist; im dritten Fall endlich mit einem Körper, der eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Jedes der Probleme I. und II. findet durch meine Abhandlung für alle drei Fälle seine vollständige Lösung *).

Im Wesentlichen handelt es sich bei Lösung der Probleme I. und II. für irgend einen der in Rede stehenden drei Fälle um *ein und dieselbe Aufgabe*, nämlich um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb eines von zwei Kugelflächen begrenzten Raumes allenthalben der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, welche ausserdem innerhalb dieses Raumes gewisse Stetigkeits-Bedingungen erfüllt **), welche ferner, falls der genannte Raum sich (wie das beim zweiten Falle stattfindet) ins Unendliche hin erstreckt, für die unendlich fernen Punkte auf gewisse Weise gegen Null convergirt ***), und welche endlich auf jenen Kugelflächen selber beliebig gegebene Werthe besitzt.

Ich bringe um diese Function V zu bestimmen zwei *verschiedene* Methoden in Anwendung, und gelange dadurch auch zu Resultaten von *verschiedener Form*. Was die erste Methode anbelangt, so werde ich mich hier auf Mittheilung des durch sie erzielten Resultates beschränken; bei der zweiten Methode hingegen ausser den Resultaten auch die Methode selber in ihren Grundzügen darlegen.

---

*) Was das II. Problem anbelangt, so ist dasselbe für den *ersten* der in Rede stehenden drei Fälle bekanntlich schon von *Poisson* behandelt, von *Poisson* aber nur unter der *besonderen* Voraussetzung gelöst worden, dass die gegebenen von Aussen her auf den Körper einwirkenden elektrischen Kräfte *Null* sind. Meine Untersuchung geht weiter. Ich gelange nämlich zur Lösung des Problems für *jeden* der drei Fälle und für *beliebig* gegebene äussere Kräfte.

**) Innerhalb des genannten Raumes müssen sowohl V selber als auch $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ überall stetig sein.

***) Für einen unendlich fernen Punkt muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punktes von irgend einem festen Punkt in der Endlichkeit, und $\varkappa$ irgend welche Constante vorstellt.

Erste Methode zur Bestimmung von V.

Zwei Kugelflächen, welche einander nicht schneiden, werden, welche Lage zu einander sie auch haben mögen, immer den ganzen unendlichen Raum in *drei* Räume zerlegen, von welchen einer — er mag R heissen — durch *beide* Kugelflächen, der zweite und dritte hingegen — sie mögen K und K' genannt werden — nur durch je *eine* Kugelfläche begrenzt wird. Ich werde mich hier auf den Fall beschränken, dass von den beiden gegebenen Kugelflächen die eine *ausserhalb* der anderen liegt. Alsdann werden K und K' die Innenräume dieser beiden Flächen vorstellen, während R denjenigen Raum bezeichnet, welcher die beiden Flächen umgiebt und nach Aussen hin sich ringsum ins Unendliche erstreckt. Diesen drei Räumen R, K, K' entsprechend lassen sich gleichzeitig drei Aufgaben hinstellen, indem für jeden dieser drei Räume nach derjenigen Function V gefragt werden kann, welche den obengenannten Bedingungen Genüge leistet und an der Begrenzung des Raumes gegebene Werthe besitzt. Für die Räume K und K' ist die Lösung dieser Aufgabe bekannt *); für den Raum R hingegen ist die Aufgabe *bis jetzt nicht gelöst worden*, und diese Aufgabe ist es, um welche es sich hier handelt.

Ich werde nun hier ein Verfahren mittheilen, durch welches die Lösung dieser letzten Aufgabe auf die Lösungen der beiden ersteren reducirt werden kann.

Zur Unterscheidung bezeichne ich die dem Raume K entsprechende Function V mit F, die dem Raume K' entsprechende Function V mit Φ, während die dem Raume R entsprechende nach wie vor V genannt werden soll. F und Φ mögen berechnet gedacht werden, und zwar der Art berechnet gedacht werden, dass F auf der Oberfläche von K, und Φ auf der von K' eben dieselben Werthe hat, welche die unbekannte, dem Raume R entsprechende Function V auf jenen Flächen besitzen soll.

Um nun, sobald F und Φ gefunden sind, den Werth von V in irgend einem Punkte p des Raumes R zu erhalten, dient folgendes Verfahren.

Man lege durch den Punkt p und durch die Mittelpunkte der beiden Kugelflächen eine Ebene und construire in dieser Ebene einen Kreis, welcher

---

*) Man kann sich dabei entweder der *Laplace*schen Reihenentwickelungen bedienen, oder auch eine Methode anwenden, die ich in einer kleinen Schrift (Verlag von *H. W. Schmidt* in Halle a. S. 1861) angegeben habe, und durch welche man *ohne* Reihenentwickelungen zum Ziele gelangt.

durch p hindurchgeht, und die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Punkte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte einander schneiden, mögen A und A' genannt werden.

Man ziehe sodann von p aus zwei gerade Linien nach den beiden Kugelmittelpunkten hin; die Schnittpunkte dieser Linien mit dem zuvor construirten Kreise seien a, a'. Ausser den beiden eben gezogenen Linien giebt es noch zwei andere gerade Linien, durch welche a, a' mit den Kugelmittelpunkten in Verbindung gesetzt werden können; die Schnittpnnkte dieser beiden Linien mit dem Kreise seien b, b'. Nun lassen sich von Neuem ausser den beiden zuletzt genannten Linien noch zwei andere Linien construiren, welche b, b' mit den Kugelmittelpunkten verbinden; die Durchschnittspunkte dieser Linien mit dem Kreise seien c, c', u. s. w.

Der Punkt p war irgendwo *innerhalb* des Raumes R angenommen worden. Die gegenwärtig construirten Punktpaare a, a'; b, b'; c, c'; ... hingegen werden alle *ausserhalb* R liegen. Es wird nämlich von jedem dieser Punktpaare immer der eine Punkt innerhalb K, der andere innerhalb K' liegen. Die Bezeichnung der Punktpaare mag nun der Art gewählt gedacht werden, dass a, b, c, ... sämmtlich innerhalb K, und a', b', c', ... sämmtlich innerhalb K' liegen. Ebenso mag auch von den beiden zuvor erwähnten Punkten A und A' der erstere derjenige sein, welcher innerhalb K, der letztere derjenige, welcher innerhalb K' liegt. Alle diese Punkte a, b, c, ..., a', b', c', ... sowohl als auch A, A' liegen auf der Peripherie des Kreises. Denkt man sich die Construction der Punkte a, b, c, ... und ebenso auch die der Punkte a', b', c' ... ins Unendliche hin fortgesetzt, so werden sich die ersteren dem Punkte A, die letzteren dem Punkte A' ins Unendliche nähern.

Bezeichnet man nun die Werthe, welche die vorhin genannte Function F in den Punkten a, b, c, ... besitzt, mit F_a, F_b, F_c, ... und die Werthe, welche die Function Φ in den Punkten a', b', c', ... besitzt, mit $\Phi_{a'}$, $\Phi_{b'}$, $\Phi_{c'}$, ..., so lässt sich der Werth V_p, welchen die zu bestimmende Function V im Punkte p besitzt, folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned}\xi_p V_p = {} & \xi_a F_a - \xi_b F_b + \xi_c F_c - + \cdots \\ & + \xi_{a'} \Phi_{a'} - \xi_{b'} \Phi_{b'} + \xi_{c'} \Phi_{c'} - + \cdots,\end{aligned}$$

wo die Coefficienten ξ eine sehr einfache geometrische Bedeutung haben. Für jeden der Punkte p, a, b, c, ..., a', b', c', ... repräsentirt nämlich ξ das

geometrische Mittel der beiden Abstände, welche dieser Punkt nach A und A' hin besitzt.

Durch diese Formel ist die zuvor angegebene Reduction ausgeführt, nämlich die Ermittelung von V zurückgeführt auf die Bestimmung von F und Φ.

Zu einem analogen Resultate gelange ich übrigens in meiner Abhandlung auch in dem Falle, wenn von den beiden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, die eine *innerhalb* der anderen liegt, und demnach der Raum selber eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Zweite Methode zur Bestimmung von V.

Ich wende, um V zu bestimmen, als Coordinaten die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme an, über deren Beschaffenheit Folgendes bemerkt werden mag.

Construirt man alle Punkte, deren Abstände nach zwei festen Punkten hin ein gegebenes Verhältniss besitzen, so werden diese Punkte in ihrer Gesammtheit eine Kugelfläche bilden. Aendert man den Werth jenes Verhältnisses, so wird man successive andere und andere Kugelflächen erhalten; und zwar werden die Mittelpunkte aller dieser Flächen mit jenen beiden festen Punkten in ein und derselben geraden Linie liegen. Dieses ist das *erste* der von mir angewendeten drei Flächensysteme. Den beiden festen Punkten — ich nenne sie die beiden *Pole* — gebe ich dabei in jedem speciellen Fall eine solche Lage, dass die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes mit zu den Kugelflächen dieses Systems gehören.

Construirt man ferner alle Punkte, von welchen aus gesehen die beiden Pole gleich weit von einander entfernt erscheinen, so erhält man Punkte, die in ihrer Gesammtheit eine gewisse Rotationsfläche bilden *). Aendert man die Grösse jener scheinbaren Entfernung, so erhält man andere und andere Rotationsflächen. Diese Flächen, deren gemeinsame Rotationsachse durch die Verbindungslinie der beiden Pole dargestellt wird, sind zu den vorhin ge-

---

*) Es wird diese Fläche eine Kugel sein, wenn der Winkel, unter welchem man nach den beiden Polen sieht, genau ein rechter ist. Ist hingegen dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer, so wird die Fläche *nicht* mehr kugelförmig sein. Sie wird alsdann in jedem der beiden Pole eine *Spitze* besitzen.

nannten Kugelflächen orthogonal und bilden in ihrer Gesammtheit das *zweite* der von mir angewendeten Flächensysteme.

Das *dritte* Flächensystem endlich wird durch die Meridianebenen der beiden ersten Flächensysteme, d. i. durch Ebenen repräsentirt, welche sämmtlich durch die beiden Pole hindurchgehen.

Ist der Raum, für welchen die Function V bestimmt werden soll, und sind also auch die beiden diesen Raum begrenzenden Kugelflächen gegeben, so lassen sich die beiden Pole sofort construiren *); sind diese aber construirt, so ist damit die Lage der drei Flächensysteme überhaupt vollständig bestimmt.

Die Parameter dieser drei Flächensysteme sind es also, deren ich mich bei meiner Untersuchung als Coordinaten bediene. Man könnte dieselben, falls ein Name erwünscht erscheinen sollte, die „*dipolaren Coordinaten*" nennen.

Einen besonders einfachen Charakter gewinnt die Beschaffenheit unserer drei Flächensysteme, sobald die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes *concentrisch* sind. Alsdann nämlich fällt der eine Pol in den gemeinsamen Mittelpunkt dieser beiden Flächen, der andere in die Unendlichkeit, und dem entsprechend verwandelt sich dann von jenen drei Flächensystemen das erste in ein System concentrischer Kugeln, das zweite in ein System von Rotationskegeln, und das dritte in die Meridianebenen dieser Kegel. Man übersieht daher sofort, dass die Parameter der drei Flächensysteme in diesem Specialfall in die gewöhnlichen Polarcoordinaten übergehen. Wollte man also, wie es wohl zweckmässig sein dürfte, die dipolaren Coordinaten für diesen Specialfall mit dem Namen „*monopolare Coordinaten*" bezeichnen, so würden die monopolaren Coordinaten identisch sein mit den gewöhnlichen Polarcoordinaten.

Ausserdem ist noch ein anderer Specialfall zu erwähnen, welcher dann eintritt, wenn die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes einander gerade *berühren*. Findet dieses statt, so fallen die beiden Pole in *einen* Punkt zusammen, und zwar in den Contactpunkt jener beiden Flächen. Man könnte daher die dipolaren Coordinaten in diesem Specialfall füglich mit dem Namen „*synpolare Coordinaten*" bezeichnen.

---

*) Man hat zu diesem Zweck nur durch die beiden Kugelmittelpunkte eine Ebene zu legen, und in dieser Ebene irgend einen Kreis zu construiren, welcher die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Punkte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte einander schneiden, sind dann die beiden Pole.

Zur Lösung der Aufgabe, um welche es sich hier handelt, nämlich zur Bestimmung der Function V ist es nun vor allen Dingen erforderlich, dass man den Ausdruck, in welchen sich der reciproke Werth der Entfernung zweier Punkte bei Einführung der neuen Coordinaten verwandelt, in eine Reihe zu entwickeln im Stande ist, in welcher jedes einzelne Glied Y der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0$$

Genüge leistet.

Für die *monopolaren* Coordinaten ist diese Entwickelung bekanntlich bereits von *Laplace* ausgeführt worden, und zwar mit Benutzung einer Function $P^{(n)}(\eta)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial.(1-\eta^2)\frac{\partial P^{(n)}(\eta)}{\partial \eta}}{\partial \eta}+n(n+1)P^{(n)}(\eta)=0$$

Genüge leistet, und deren Werth sich durch das bestimmte Integral

$$P^{(n)}(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\eta+\sqrt{\eta^2-1}.\cos\alpha)^n\,d\alpha$$

darstellen lässt.

Was nun die *dipolaren* Coordinaten anbelangt, so führt meine Untersuchung zu dem merkwürdigen Resultat, dass bei Anwendung dieser die Entwickelung jener reciproken Entfernung mit der eben erwähnten *Laplace*schen Entwickelung der *Form* nach identisch wird; nämlich zu dem Resultat, dass es im Wesentlichen nur der Vertauschung der monopolaren Coordinaten mit den dipolaren Coordinaten bedarf, um die eine Entwickelung in die andere umzuwandeln.

Wesentlich anders gestaltet sich hingegen die Sache bei Anwendung der *synpolaren* Coordinaten. Geht man nämlich von dem allgemeinen Fall der *dipolaren* Coordinaten zu dem Specialfall der synpolaren Coordinaten über, so tritt bei Ausführung jener Entwickelung an die Stelle der *Laplace*schen Function $P^{(n)}(\eta)$ eine gewisse andere bereits von *Fourier* und später namentlich von *Bessel* benutzte Function, welche ich mit $J(n\eta)$ bezeichne, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 J(n\eta)}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial J(n\eta)}{\partial \eta}+n^2 J(n\eta)=0$$

Genüge leistet, und deren Werth sich durch das bestimmte Integral

$$J(n\eta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\eta\cos\alpha)\,d\alpha$$

darstellen lässt. Und gleichzeitig mit dieser Umänderung verwandelt sich ausserdem die *Reihe*, durch welche jene Entwickelung dargestellt wird, in ein *bestimmtes Integral* *).

Ist die reciproke Entfernung zweier Punkte in der hier angedeuteten Art dargestellt, so kann man dann die Bestimmung der Function V leicht durchführen. Das Resultat, zu welchem man gelangt, ist, je nachdem die beiden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, von einander getrennt oder mit einander in Contact sind, von verschiedener Form, und muss daher für jeden dieser beiden Fälle besonders angegeben werden.

1. *Findet zwischen beiden Begrenzungsflächen keine Berührung statt*, so hat man zunächst die beiden Pole zu construiren, und dann die diesen Polen entsprechenden dipolaren Coordinaten in Anwendung zu bringen. Zufolge dessen, was zuvor über diese Coordinaten gesagt wurde, hängen die drei dipolaren Coordinaten irgend eines Punktes — sie mögen ϑ, ω, φ heissen — der Reihe nach 1) von dem Verhältniss der beiden Polabstände des Punktes, 2) von dem Neigungswinkel dieser beiden Abstände gegen einander, 3) von der Lage der durch den Punkt gelegten Meridianebene ab. In welcher Weise diese Abhängigkeiten festzusetzen sind, wird ziemlich gleichgültig sein. Ich nehme für ϑ den natürlichen Logarithmen des genannten Verhältnisses, für ω geradezu den genannten Neigungswinkel, und für φ den Winkel, welchen die durch den Punkt gelegte Meridianebene mit irgend einer festen Meridianebene macht.

Die Gleichung $\vartheta = \text{Const.}$ wird dann ein System von Kugelflächen darstellen, in welchem die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes mit enthalten sind. Es sei $\vartheta = c$ die Gleichung der einen und $\vartheta = \gamma$ die Gleichung der anderen Begrenzungsfläche. Ferner sei $2a$ der Abstand der beiden Pole von einander.

Um nun den Werth der unbekannten Function V in einem Punkte p, der irgendwo innerhalb des gegebenen Raumes liegt, hinstellen zu können,

---

*) In Betreff der synpolaren Coordinaten mag noch bemerkt werden, dass die darüber von mir angestellte Untersuchung beiläufig zu einem Resultat führt, welches für die Theorie der Functionen im Allgemeinen nicht ohne Interesse ist. Im Verlaufe der Untersuchung ergiebt sich nämlich, dass mit Hülfe der *Bessel*schen Function J jede willkürlich gegebene, von zwei Argumenten abhängende Function durch ein gewisses *drei*faches Integral dargestellt werden kann; dass also für die eben genannten Functionen eine Darstellung existirt, welche dem *Fourier*schen *zwei*fachen Integrale für eine Function eines Argumentes vollständig analog ist.

muss man ausser diesem Punkte p noch zwei andere Punkte s und σ zu Hülfe ziehen, von welchem der erste irgendwo auf der Begrenzungsfläche $\vartheta = c$, der andere irgendwo auf der Begrenzungsfläche $\vartheta = \gamma$ liegt. Bezeichnet man die Coordinaten dieser drei Punkte der Reihe nach mit ϑ_p, ω_p, φ_p, ferner mit $\vartheta_s = c$, ω_s, φ_s, endlich mit $\vartheta_\sigma = \gamma$, ω_σ, φ_σ, und setzt man ausserdem zur Abkürzung *)

$$e^{\vartheta_p} + e^{-\vartheta_p} - 2\cos\omega_p = \psi_p,$$

$$e^{c} + e^{-c} - 2\cos\omega_s = \psi_s, \quad \cos\omega_s\cos\omega_p + \sin\omega_s\sin\omega_p\cos(\varphi_s - \varphi_p) = u_{sp},$$

$$e^{\gamma} + e^{-\gamma} - 2\cos\omega_\sigma = \psi_\sigma, \quad \cos\omega_\sigma\cos\omega_p + \sin\omega_\sigma\sin\omega_p\cos(\varphi_\sigma - \varphi_p) = u_{\sigma p},$$

so hat man nun zunächst folgende beide, respective von den Punkten p, s und von den Punkten p, σ abhängende Ausdrücke $H_s^{(p)}$ und $H_\sigma^{(p)}$ zu bilden:

$$H_s^{(p)} = \frac{\psi_s\sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi_p}}{4a^2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1) \cdot \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma-\vartheta_p)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_p-\gamma)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma-c)} - e^{\frac{2n+1}{2}(c-\gamma)}} \cdot P^{(n)}(u_{sp}),$$

$$H_\sigma^{(p)} = \frac{\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_p}}{4a^2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1) \cdot \frac{e^{\frac{2n+1}{2}(c-\vartheta_p)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\vartheta_p-c)}}{e^{\frac{2n+1}{2}(c-\gamma)} - e^{\frac{2n+1}{2}(\gamma-c)}} \cdot P^{(n)}(u_{\sigma p}),$$

wo $P^{(n)}$ die vorhin genannte *Laplace*sche Function vorstellt. Alsdann ist der gesuchte Werth V_p der Function V im Punkte p folgender:

$$4\pi V_p = \int V_s H_s^{(p)}\, ds + \int V_\sigma H_\sigma^{(p)}\, d\sigma.$$

Hier sind unter ds und $d\sigma$ zwei respective bei den Punkten s und σ liegende Flächenelemente der beiden gegebenen Kugeln zu verstehen, und die Integrationen $\int$ respective über alle Elemente ds der einen und über alle Elemente $d\sigma$ der anderen Kugelfläche ausgedehnt zu denken. Dabei bezeichnen V_s und V_σ die willkürlich gegebenen Werthe, welche die Function V auf den beiden Kugelflächen besitzen soll.

Diese Formel für V ist ohne Unterschied gültig, mag nun von den beiden, den gegebenen Raum begrenzenden Kugelflächen die eine ausserhalb oder die eine innerhalb der anderen liegen.

---

*) Unter e ist überall die Basis der natürlichen Logarithmen, ferner, wie sogleich bemerkt werden mag, unter π die *Ludolph*sche Zahl zu verstehen.

2. *Findet zwischen den beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Raumes Berührung statt*, so fallen beide Pole in den Contactpunkt dieser Flächen. Von den dipolaren Coordinaten ϑ, ω, φ verlieren daher die beiden ersten, wie man sofort übersieht, in diesem Fall ihre Anwendbarkeit. Denn ϑ sowohl als auch ω werden, wenn beide Pole zusammenfallen, für *alle* Punkte des Raumes ein und denselben Werth besitzen, nämlich beständig $=0$ sein. Jedoch bieten sich leicht zwei andere Grössen dar, welche in diesem Fall die Rolle von ϑ und ω zu übernehmen geeignet sind, nämlich in Verbindung mit φ zur Ortsbestimmung eines Punktes verwandt werden können. Dividirt man nämlich ϑ und ω durch den gegenseitigen Abstand $2a$ der beiden Pole, so erhält man zwei Brüche

$$\lambda = \frac{\vartheta}{2a}, \qquad \varpi = \frac{\omega}{2a},$$

welche sich für den hier vorliegenden Fall zunächst unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, bei genauerer Untersuchung aber als Grössen von ganz bestimmten Werthen ausweisen. Diese Grössen λ, ϖ nun sind es, welche ich in Verbindung mit φ als Coordinaten anwende und mit dem Namen synpolare Coordinaten bezeichne.

Es wird nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass diese Coordinaten einfache geometrische Bedeutungen besitzen. Legt man nämlich durch irgend welchen Punkt α eine Meridianebene, d. i. eine Ebene, welche durch α und durch die Mittelpunkte der beiden gegebenen, einander berührenden Kugelflächen hindurchgeht; und construirt man in dieser Ebene zwei Kreise, welche beide durch α und durch den Contactpunkt jener Kugelflächen hindurchgehen, von welchen aber der erste die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte senkrecht durchschneidet, während der zweite dieselbe tangirt; so ist, falls λ, ϖ, φ die synpolaren Coordinaten des Punktes α vorstellen, der reciproke Radius des ersten Kreises gleich $\pm\lambda$, der reciproke Radius des zweiten gleich ϖ, und endlich der Winkel, unter welchem die genannte Meridianebene gegen irgend eine feste Meridianebene geneigt ist, gleich φ.

Um nun den Werth der unbekannten Function V in einem Punkte p zu ermitteln, der irgendwo innerhalb des gegebenen Raumes liegt, hat man wiederum noch zwei andere Punkte s und σ zu Hülfe zu nehmen, von welchen der erste irgendwo auf der einen, der zweite irgendwo auf der anderen Begrenzungsfläche liegt. Sind $\lambda = c$ und $\lambda = \gamma$ die Gleichungen dieser beiden

Flächen, so werden die Coordinaten der Punkte s und σ durch c, ϖ_s, φ_s und γ, ϖ_σ, φ_σ bezeichnet werden können. Sind ausserdem λ_p, ϖ_p, φ_p die Coordinaten des Punktes p, und setzt man zur Abkürzung

$$\lambda_p^2+\varpi_p^2=\psi_p,$$
$$c^2+\varpi_s^2=\psi_s, \qquad \sqrt{\varpi_s^2+\varpi_p^2-2\varpi_s\varpi_p\cos(\varphi_s-\varphi_p)}=u_{sp},$$
$$\gamma^2+\varpi_\sigma^2=\psi_\sigma, \qquad \sqrt{\varpi_\sigma^2+\varpi_p^2-2\varpi_\sigma\varpi_p\cos(\varphi_\sigma-\varphi_p)}=u_{\sigma p},$$

so hat man nun zunächst folgende beide, respective von den Punkten s, p und von den Punkten σ, p abhängende Ausdrücke $H_s^{(p)}$ und $H_\sigma^{(p)}$ zu bilden:

$$H_s^{(p)}=2\psi_s\sqrt{\psi_s}\sqrt{\psi_p}\int_0^\infty \frac{e^{n(\gamma-\lambda_p)}-e^{n(\lambda_p-\gamma)}}{e^{n(\gamma-c)}-e^{n(c-\gamma)}}\cdot J(n.u_{sp}).n\,dn,$$

$$H_\sigma^{(p)}=2\psi_\sigma\sqrt{\psi_\sigma}\sqrt{\psi_p}\int_0^\infty \frac{e^{n(c-\lambda_p)}-e^{n(\lambda_p-c)}}{e^{n(c-\gamma)}-e^{n(\gamma-c)}}\cdot J(n.u_{\sigma p}).n\,dn,$$

wo J die früher erwähnte *Bessel*sche Function bezeichnet.

Alsdann lässt sich der Werth V_p, welchen V in p besitzt, folgendermassen darstellen:

$$4\pi V_p=\mathrm{S}V_s H_s^{(p)}ds+\mathrm{S}V_\sigma H_\sigma^{(p)}d\sigma,$$

wo die Integrationen S über alle Elemente ds der einen und über alle Elemente $d\sigma$ der anderen Begrenzungsfläche auszudehnen sind, und wo V_s, V_σ wiederum die willkürlich gegebenen Werthe bezeichnen, welche V auf diesen beiden Flächen besitzen soll.

Diese Bestimmung von V ist gleichfalls ohne Unterschied gültig, mag nun von den beiden einander berührenden Kugelflächen, welche den gegebenen Raum begrenzen, die eine ausserhalb oder die eine innerhalb der anderen liegen.

In Betreff der eben auseinandergesetzten zweiten Methode mag schliesslich noch bemerkt werden, dass dieselbe auch dann anwendbar ist, wenn der gegebene Raum, für welchen die Function V bestimmt werden soll, nicht von *zwei* sondern nur von *einer* Kugelfläche begrenzt wird. Wird der Raum von *zwei* Kugelflächen begrenzt, so sind die beiden Pole für das anzuwendende Coordinatensystem vollständig bestimmt; wird derselbe dagegen nur von *einer* Kugelfläche begrenzt, so kann man von jenen beiden Polen den einen *willkürlich* wählen. Giebt man dem einen Pol eine *beliebige Lage*, so ergiebt sich für V ein Werth, welcher durch die dipolaren Coordinaten ausgedrückt

ist; lässt man dagegen den einen Pol *in den Mittelpunkt*, oder lässt man ihn *auf die Oberfläche* der Kugel fallen, so erhält man im ersten Fall eine Bestimmung von V vermittelst der monopolaren, im letzteren Fall eine Bestimmung von V vermittelst der synpolaren Coordinaten.

Dass von den beiden zu Anfang erwähnten Problemen I. und II. das Wärmeproblem durch die eben ausgeführte Bestimmung von V unmittelbar seine Lösung findet, wird man sofort erkennen; dass aber auch das andere, nämlich das Elektricitätsproblem, auf die Bestimmung einer solchen Function V reducirt werden kann, bedarf wohl noch einer näheren Erörterung.

Der Einfachheit wegen, beschränke ich mich hierbei auf den Fall, dass der Körper, mit welchem wir es zu thun haben, aus zwei von einander getrennten (oder auch einander berührenden) Kugeln besteht. Jede dieser Kugeln ist mit einem gegebenen Quantum Elektricität geladen. Es handelt sich darum, die Vertheilung zu ermitteln, welche diese Elektricitätsmengen auf den Oberflächen der beiden Kugeln unter ihrer gegenseitigen Einwirkung sowie unter der Einwirkung gegebener unveränderlicher Kräfte annehmen.

Ich beginne damit, dass ich zuvörderst das Potential derjenigen Einwirkung berechne, welche nach Eintritt der eben erwähnten Gleichgewichtslage die auf *beiden* Kugelflächen vorhandenen elektrischen Belegungen zusammengenommen auf beliebige Punkte des Raumes ausüben werden. Der Werth dieses Potentiales wird für *jeden* der drei Räume, in welche der ganze unendliche Raum durch jene zwei Kugelflächen zerlegt wird, durch eine *andere* Function dargestellt werden. Der Werth des Potentiales für den Raum *ausserhalb* beider Kugeln mag mit V, der Werth desselben für den Raum *innerhalb* der *einen* Kugelfläche mag mit F, und der Werth desselben für den Raum *innerhalb* der *anderen* mit Φ bezeichnet werden.

Für das Potential V ergeben sich nun zunächst folgende Bedingungen. Bezeichnet P das Potential der gegebenen und unveränderlichen Kräfte, welche auf die Kugeln einwirken, so muss V eine stetige Function sein, welche in dem Raume ausserhalb der beiden Kugeln allenthalben der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, welche ferner für die unendlich fernen Punkte dieses Raumes

auf gewisse Weise gegen Null convergirt*), und welche endlich an der Oberfläche der einen Kugel der Relation $V+P=C$, an der Oberfläche der anderen Kugel der Relation $V+P=I'$ Genüge leistet, wo C und I' vor der Hand noch willkürliche Constanten vorstellen. Diese Bedingungen sind zur Bestimmung des Potentiales V vollständig ausreichend. In der That bemerkt man sofort, dass diese Bedingungen identisch sind mit denjenigen, welchen die im Vorhergehenden behandelte Function V genügen sollte. Man wird daher eine der beiden im Vorhergehenden angegebenen Methoden sofort benutzen können, um dieses Potential V zu berechnen.

Was ferner das Potential F anbelangt, so ist F eine stetige Function, welche innerhalb der ersten Kugel allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$$

genügen, und welche ausserdem an der Oberfläche dieser Kugel die Relation $F+P=C$ erfüllen muss. Analoge Bedingungen ergeben sich mit Bezug auf die zweite Kugel für das Potential Φ. Man sieht daher sofort, dass die Bestimmung dieser Functionen F und Φ keine Schwierigkeiten darbietet, dass nämlich die Werthe derselben vermittelst der bekannten *Laplace*schen Methode sofort berechnet werden können.

Jedoch sind auch hierbei die *neuen* Methoden, von denen oben die Rede war, nicht ohne Nutzen. Wollte man nämlich der *Laplace*schen Methode folgen, so würde man bei Berechnung von F und Φ verschiedene Coordinatensysteme zu Grunde legen müssen, indem man einmal den Mittelpunkt der einen, das andere Mal den der anderen Kugel zum Anfangspunkt nehmen müsste. Wendet man dagegen die zweite der beiden Methoden an, von welchen oben die Rede war, so kann man sich bei Bestimmung von F und Φ *ein und desselben* Coordinatensystemes, und zwar *eben desselben* Coordinatensystemes bedienen, welches bereits bei Berechnung des vorhin besprochenen Potentiales V angewendet werden muss; so dass man also alle drei Potentiale V, F und Φ unmittelbar als Functionen *ein und derselben* Coordinaten**) darstellen kann.

---

*) Für einen unendlich fernen Punkt muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punktes von irgend einem festen Punkte in der Endlichkeit, und $\varkappa$ eine beliebige Constante vorstellt.

**) Diese Coordinaten sind die dipolaren, wenn die beiden Kugeln von einander getrennt sind, hingegen die synpolaren, wenn dieselben einander berühren.

Sind V, F, Φ berechnet, so kann man dann bekanntlich die Dichtigkeiten der gesuchten elektrischen Belegungen der beiden Kugelflächen leicht durch gewisse Differentialquotienten dieser Potentiale darstellen. Bezeichnet man nämlich jene Dichtigkeit bei der einen Kugel mit E, bei der anderen mit H, so ist

$$4\pi E = \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$4\pi H = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

wo r den Radius der einen, ϱ den der anderen Kugel vorstellt.

Endlich werden dann die in diesen Ausdrücken für E und H noch enthaltenen willkürlichen Constanten C und C' leicht der Art bestimmt werden können, dass die auf jeder Kugel vorhandene Elektricitätsmenge den für dieselben gegebenen Werth besitzt.

Man sieht aus dieser Darstellung, dass die von mir für die Lösung des Elektricitätsproblemes gegebene Methode nicht nur allgemeiner als die *Poisson*sche sondern auch bedeutend directer und einfacher als jene ist.

Halle, 1862.

Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales.

(Par M. *William Roberts* à Dublin.)

1. Soit

$$(1.) \qquad F(\varrho)+F_{,}(\mu)+F_{,,}(\nu) = \alpha$$

l'équation d'une des trois séries de surfaces dont il s'agit, exprimée en coordonnées elliptiques, α étant un paramètre variable. Les quantités ϱ, μ, ν s'expriment, comme l'on sait, en x, y, z par les équations suivantes:

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2} = 1.$$

Maintenant soit

$$P\,d\varrho+M\,d\mu+N\,d\nu = 0$$

la différentielle de (1.): il est clair que P, M, N sont des fonctions de ϱ, μ, ν respectivement, et toutes les surfaces qui appartiennent à ce système seront coupées orthogonalement par celles d'un autre système ayant pour équation différentielle totale

$$P'\,d\varrho+M'\,d\mu+N'\,d\nu = 0$$

pourvu qu'on ait

$$\frac{PP'(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}+\frac{MM'(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}+\frac{NN'(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)} = 0.$$

La condition qu'on vient d'écrire résulte des valeurs des éléments ds', ds'', ds''' des lignes de courbure des trois surfaces homofocales au point ϱ, μ, ν, savoir

$$ds' = d\varrho\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}},$$

$$ds'' = d\mu\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}},$$

$$ds''' = d\nu\sqrt{\frac{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

On s'aperçoit sans difficulté qu'on satisfait á cette condition en faisant

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - b^2}, \qquad MM' = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \qquad NN' = -\frac{1}{b^2 - \nu^2}$$

ou bien encore en faisant

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - c^2}, \qquad MM' = -\frac{1}{c^2 - \mu^2}, \qquad NN' = -\frac{1}{c^2 - \nu^2}.$$

Par conséquent si l'on pose

$$u = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - b^2)} + \int \frac{d\mu}{M(\mu^2 - b^2)} - \int \frac{d\nu}{N(b^2 - \nu^2)},$$

$$v = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - c^2)} - \int \frac{d\mu}{M(c^2 - \mu^2)} - \int \frac{d\nu}{N(c^2 - \nu^2)}$$

et que l'on désigne par β et γ deux constantes arbitraires, les équations $u = \beta$, $v = \gamma$, $u + \beta v = \gamma$ représenteront trois systèmes dont chacun coupe orthogonalement le système donné (1.). Tous les systèmes de surfaces qui coupent orthogonalement le système donné s'obtiennent, comme on le trouvera aisément, en intégrant l'équation suivante aux différentielles partielles,

$$\frac{P(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} - \frac{M(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \varrho}{\partial \mu} - \frac{N(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \varrho}{\partial \nu} = 0.$$

Mais on voit que cette équation a pour intégrale particulière $u + \beta v = \gamma$: cette intégrale renfermant deux constantes arbitraires, on sait que l'intégrale générale sera

$$\Phi(u, v) = 0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

2. Nous nous proposons maintenant de déterminer les cas, où deux familles de surfaces, dont chacune est donnée par une relation linéaire entre u et v sont elles-mêmes mutuellement orthogonales. Afin de trouver les formes de P, M, N, qui conduisent au but proposé, faisons

$$u + fv = \beta, \qquad u + gv = \gamma,$$

f et g étant des constantes, et supposons que les familles (β) et (γ) qui coupent orthogonalement le système (α) donné par l'équation (1.) s'entre-coupent aussi elles-mêmes à angles droits. Différentiant l'équation du système (β) en regardant β comme constante, on trouvera

$$\frac{d\varrho}{P}\left(\frac{\varrho^2 - \frac{c^2 + fb^2}{1+f}}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}\right) + \frac{d\mu}{M}\left(\frac{\frac{c^2 + fb^2}{1+f} - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\right) + \frac{d\nu}{N}\left(\frac{\nu^2 - \frac{c^2 + fb^2}{1+f}}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\right) = 0.$$

Pareillement le système (γ) nous donnera

$$\frac{d\varrho}{\mathrm{P}}\left(\frac{\varrho^2-\frac{c^2+gb^2}{1+g}}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}\right)+\frac{d\mu}{\mathrm{M}}\left(\frac{\frac{c^2+gb^2}{1+g}-\mu^2}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\right)+\frac{d\nu}{\mathrm{N}}\left(\frac{\nu^2-\frac{c^2+gb^2}{1+g}}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\right)=0.$$

Maintenant posons

$$\frac{c^2+fb^2}{1+f}=\theta^2, \qquad \frac{c^2+gb^2}{1+g}=\lambda^2,$$

où il est très-important d'observer que les quantités θ et λ sont précisément les mêmes que M. *Liouville* a désignées par α et β dans son Mémoire intitulé: *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.* Tome XII (première série) du Journal de Mathématiques pp. 418 et 420. Cela nous fera voir que, en égard aux remarques de M. *Liouville*, les équations des systèmes (β) et (γ) peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\int\frac{l^2\,d\varrho}{\mathrm{P}(\varrho^2-\lambda^2)}+\int\frac{m^2\,d\mu}{\mathrm{M}(\mu^2-\lambda^2)}-\int\frac{n^2\,d\nu}{\mathrm{N}(\lambda^2-\nu^2)}=\beta,$$

$$\int\frac{l^2\,d\varrho}{\mathrm{P}(\varrho^2-\theta^2)}-\int\frac{m^2\,d\mu}{\mathrm{M}(\theta^2-\mu^2)}-\int\frac{n^2\,d\nu}{\mathrm{N}(\theta^2-\nu^2)}=\gamma,$$

en mettant pour abréger

$$l^2=\frac{(\varrho^2-\theta^2)(\varrho^2-\lambda^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)},$$

$$m^2=\frac{(\theta^2-\mu^2)(\mu^2-\lambda^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)},$$

$$n^2=\frac{(\theta^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}.$$

La condition qui exprime l'orthogonalité mutuelle des sytèmes (β) et (γ) est

$$(2.)\qquad \frac{(\mu^2-\nu^2)l^2}{\mathrm{P}^2}-\frac{(\varrho^2-\nu^2)m^2}{\mathrm{M}^2}+\frac{(\varrho^2-\mu^2)n^2}{\mathrm{N}^2}=0.$$

3. On satisfait évidemment à cette condition en faisant

$$\frac{l^2}{\mathrm{P}^2}=\frac{m^2}{\mathrm{M}^2}=\frac{n^2}{\mathrm{N}^2},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si chacune de ces quantités a la même valeur constante. Supposons donc

$$\frac{l}{\mathrm{P}}=\frac{m}{\mathrm{M}}=\frac{n}{\mathrm{N}}=1,$$

ce qui nous donnera le système triple de surfaces orthogonales que voici:

$$(3.)\quad \begin{cases} \int l\,d\varrho \quad + \int m\,d\mu \quad + \int n\,d\nu \quad = \alpha, \\ \int \frac{l\,d\varrho}{\varrho^2-\lambda^2} + \int \frac{m\,d\mu}{\mu^2-\lambda^2} - \int \frac{n\,d\nu}{\lambda^2-\nu^2} = \beta, \\ \int \frac{l\,d\varrho}{\varrho^2-\theta^2} - \int \frac{m\,d\mu}{\theta^2-\mu^2} - \int \frac{n\,d\nu}{\theta^2-\nu^2} = \gamma. \end{cases}$$

Ce système est précisément celui qui a été donné par M. *Liouville* dans sa Note *Sur un théorème de M. Chasles*, Journal de Mathématiques, cahier de Janvier 1851. Toutes les surfaces (α) sont parallèles entre elles, et elles ont pour lieux des centres de courbure deux surfaces homofocales du second degré, représentées par les constantes θ et λ. Les systèmes (β) et (γ) se composent des surfaces développables dont chacune est le lieu des normales menées à une surface (α) le long d'une de ses lignes de courbure, de sorte qu'à chaque ligne de courbure répond une surface (β) ou (γ).

En supposant que $\theta = c$, $\lambda = b$, les deux surfaces homofocales lieux des centres de courbure de (α) deviennent les coniques focales du système homofocal donné. Par conséquent dans ce cas les surfaces (α) sont celles que M. *Ch. Dupin* a considérées depuis longtemps. (Voir un article de *Hachette*, correspondance de l'école Polytechnique. Tome I, pg. 22.) La surface dont il s'agit, nommée *cyclide* par M. *Ch. Dupin*, est l'enveloppe d'une sphère qui se meut en touchant constamment trois sphères fixes. Dans ce cas particulier les équations (3.) prennent une forme très-simple, savoir:

$$\varrho + \mu + \nu = \alpha,$$
$$\frac{(\varrho-b)(\mu-b)(b-\nu)}{(\varrho+b)(\mu+b)(b+\nu)} = \beta,$$
$$\frac{(\varrho-c)(c-\mu)(c-\nu)}{(\varrho+c)(c+\mu)(c+\nu)} = \gamma.$$

Les surfaces (α) sont des cyclides parallèles entre elles et les surfaces (β) et (γ) des cônes de révolution. Les sommets des cônes (β) sont rangés sur l'ellipse focale, tandis que leur base commune est l'hyperbole focale, les sommets des cônes (γ) au contraire se meuvent sur l'hyperbole focale, tandis que leur base commune est l'ellipse focale.

4. On satisfait encore à la condition (2.) de l'orthogonalité en posant

$$\varrho^2 \mathrm{P}^2 = l^2, \quad \mu^2 \mathrm{M}^2 = m^2, \quad \nu^2 \mathrm{N}^2 = n^2,$$

ce qui donne le système triple suivant de surfaces orthogonales:

$$(4.)\quad \begin{cases} \int \frac{l\,d\varrho}{\varrho} \pm \int \frac{m\,d\mu}{\mu} \pm \int \frac{n\,d\nu}{\nu} = \alpha, \\ \int \frac{l\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-\lambda^2} \pm \int \frac{m\mu\,d\mu}{\mu^2-\lambda^2} \mp \int \frac{n\nu\,d\nu}{\lambda^2-\nu^2} = \beta, \\ \int \frac{l\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-\theta^2} \mp \int \frac{m\mu\,d\mu}{\theta^2-\mu^2} \mp \int \frac{n\nu\,d\nu}{\theta^2-\nu^2} = \gamma. \end{cases}$$

Ce dernier système triple de surfaces mutuellement orthogonales n'a pas encore été considéré, que je sache. Aucune famille de surfaces parallèles ou développables ne s'y trouve comprise, ce qui le rend d'autant plus intéressant. Etudions-en avec un peu de détail quelques cas particuliers.

Supposons en effet que $\theta = c$, et que $\lambda < \mu > \nu$, et notre système deviendra

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\varrho}{\varrho}\sqrt{\frac{\varrho^2-\lambda^2}{\varrho^2-b^2}} \pm \int \frac{d\mu}{\mu}\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu^2-b^2}} \pm \int \frac{d\nu}{\nu}\sqrt{\frac{\lambda^2-\nu^2}{b^2-\nu^2}} = \alpha, \\ &\int \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \mp \int \frac{\nu\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = \beta, \\ &\int \frac{\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-c^2}\sqrt{\frac{\varrho^2-\lambda^2}{\varrho^2-b^2}} \mp \int \frac{\mu\,d\mu}{c^2-\mu^2}\sqrt{\frac{\mu^2-\lambda^2}{\mu^2-b^2}} \mp \int \frac{\nu\,d\nu}{c^2-\nu^2}\sqrt{\frac{\lambda^2-\nu^2}{b^2-\nu^2}} = \gamma. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'équation du système (β), comme on s'en aperçoit sans difficulté, s'intègre algébriquement. Il n'en est pas de même des systèmes (α) et (γ). Mais cependant il est remarquable que les courbes d'intersection d'une surface (β) avec les surfaces qui appartiennent à l'une ou à l'autre des familles (α) et (γ), c'est à dire, les lignes de courbure des surface (β) sont algébriques. En effet l'équation différentielle du système (α) peut être mise sous la forme que voici:

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \frac{\nu\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} \\ &\quad -\lambda^2\left\{\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \frac{d\mu}{\mu\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \frac{d\nu}{\nu\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}}\right\} = 0 \end{aligned}$$

et celle du système (γ) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \frac{\nu\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} \\ &+(c^2-\lambda^2)\left\{\frac{\varrho\,d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \mp \frac{\mu\,d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}}\right. \\ &\qquad \left. \mp \frac{\nu\,d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Cela nous fait voir que les lignes de courbure de la surface (on écrit maintenant α au lieu de β et *vice versa*) ayant pour équation

$$\int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{\nu\, d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = \alpha$$

sont données par ses intersections avec les deux familles de surfaces

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \pm \int \frac{d\nu}{\nu\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = \beta,$$

$$\int \frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} \mp \int \frac{\mu\, d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} \mp \int \frac{\nu\, d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = \gamma,$$

dont les équations sont algébriques. Mais dans ce cas les surfaces (β) et (γ) ne sont pas orthogonales ni aux surfaces du système (α) ni entre elles.

Maintenant prenons les signes dans l'équation des surfaces (α) comme il suit:

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} + \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} - \frac{\nu\, d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0.$$

Cette équation, étant intégrée, donne

$$\{\sqrt{\varrho^2-b^2}+\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}\}\{\sqrt{\mu^2-b^2}+\sqrt{\mu^2-\lambda^2}\}\{\sqrt{b^2-\nu^2}+\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\} = \alpha.$$

L'une des deux séries des lignes de courbure de la surface représentée par l'équation qu'on vient d'obtenir, sera donnée par ses intersections avec la famille de surfaces données par l'équation différentielle

$$\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} + \frac{d\mu}{\mu\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} - \frac{d\nu}{\nu\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0$$

qui, étant intégrée, donne

$$\{b\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\varrho^2-b^2}\}\{b\sqrt{\mu^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\}\{b\sqrt{\lambda^2-\nu^2}+\lambda\sqrt{b^2-\nu^2}\} = \beta\varrho\mu\nu$$

et l'autre série proviendra de ses intersections avec les surfaces ayant pour équation différentielle

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}} - \frac{\mu\, d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{(\mu^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}} + \frac{\nu\, d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{(b^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}} = 0,$$

ce qui donne, en effectuant les intégrations,

$$\{\sqrt{(c^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\varrho^2-b^2)}\}\{\sqrt{(c^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\mu^2-b^2)}\}$$
$$\cdot\{\sqrt{(c^2-b^2)(\lambda^2-\nu^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\nu^2)}\}$$
$$= \gamma\sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}.$$

En prenant les signes d'une manière différente, on en déduira que les lignes de courbure de la surface ayant pour équation

$$\frac{\{\sqrt{\varrho^2-b^2}+\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}\}\{\sqrt{\mu^2-b^2}+\sqrt{\mu^2-\lambda^2}\}}{\sqrt{b^2-\nu^2}+\sqrt{\lambda^2-\nu^2}} = \alpha$$

seront données par ses intersections avec les deux familles de surfaces, représentées par les équations que voici:

$$\frac{\{b\sqrt{\varrho^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\varrho^2-b^2}\}\{b\sqrt{\mu^2-\lambda^2}+\lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\}}{b\sqrt{\lambda^2-\nu^2}+\lambda\sqrt{b^2-\nu^2}} = \frac{\beta\varrho\mu}{\nu},$$

$$\frac{\{\sqrt{(c^2-b^2)(\varrho^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\varrho^2-b^2)}\}\{\sqrt{(c^2-b^2)(\mu^2-\lambda^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(\mu^2-b^2)}\}}{\sqrt{(c^2-b^2)(\lambda^2-\nu^2)}+\sqrt{(c^2-\lambda^2)(b^2-\nu^2)}}$$

$$= \frac{\gamma\sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Revenons maintenant sur notre système triple de surfaces orthogonales (4.). Si l'on y fait $\theta = c$, $\lambda = b$, les équations différentielles deviendront

$$\frac{d\varrho}{\varrho} \pm \frac{d\mu}{\mu} \pm \frac{d\nu}{\nu} = 0,$$

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2-b^2} \pm \frac{\mu\, d\mu}{\mu^2-b^2} \mp \frac{\nu\, d\nu}{b^2-\nu^2} = 0,$$

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\varrho^2-c^2} \mp \frac{\mu\, d\mu}{c^2-\mu^2} \mp \frac{\nu\, d\nu}{c^2-\nu^2} = 0.$$

Nous ferons abstraction du cas, où tous les signes dans la première de ces équations sont positifs et où le système (α) se réduit à $\varrho\mu\nu = \alpha$, c'est à dire à une suite de plans parallèles au plan des yz. En prenant les signes d'une manière différente, on a le système triple suivant de surfaces mutuellement orthogonales:

$$\frac{\mu\nu}{\varrho} = \alpha,$$

$$\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{\varrho^2-b^2} = \beta,$$

$$\frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{\varrho^2-c^2} = \gamma.$$

Les équations des surfaces qui appartiennent au système qu'on vient d'obtenir peuvent s'écrire d'une manière qui mérite d'être signalée. En effet, en se rappelant les valeurs de x, y, z, exprimées en ϱ, μ, ν, savoir

$$bcx = \varrho\mu\nu,$$

$$b\sqrt{c^2-b^2}\,y = \sqrt{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)},$$

$$c\sqrt{c^2-b^2}\,z = \sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)},$$

on verra que le système triple dont il s'agit peut être présenté sous la forme suivante:

$$\frac{x}{\varrho^2} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{y}{\varrho^2 - b^2} = \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{z}{\varrho^2 - c^2} = \frac{1}{\gamma},$$

ϱ étant une fonction de x, y, z, donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1.$$

Cette observation conduit à une construction géometrique des surfaces dont il s'agit. Voici le théorème qui en résulte.

Étant donnée une série d'ellipsoides homofocaux, soit un point pris arbitrairement sur l'un des axes, et considérons ce point comme le sommet de cônes circonscrits aux ellipsoides du système homofocal. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et en faisant varier la position du sommet sur le même axe, on aura une série de surfaces renfermant un paramètre arbitraire. Pareillement deux autres systèmes, dont chacun contient une constante arbitraire, s'obtiennent de la même manière, en prenant des points, situés sur les deux autres axes, pour sommets de cônes circonscrits. Les surfaces qui appartiennent respectivement à ces trois systèmes, se coupent mutuellement, deux à deux, à angles droits.

De plus les courbes dans lesquelles ces trois familles de surfaces se coupent deux à deux (ou ce qui est la même chose leurs lignes de courbure) sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans principaux. En effet rappelons-nous que α, β, γ représentent les distances au centre des sommets des cônes circonscrits mesurées respectivement suivant les axes des x, y et z. Soit O le centre et faisons $OA = \alpha$, $OB = \beta$: il est évident que l'intersection de la surface (α) avec la surface (β) sera le lieu des points (M), dont un quelconque est situé sur l'un des ellipsoides homofocaux et jouit de la propriété que le plan tangent qui y touche l'ellipsoide coupe les axes des x et des y respectivement aux deux points donnés A et B. D'après un théorème de M. *Chasles* la normale menée à l'ellipsoide homofocal au point M perce le plan des xy dans un point P qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique focale située dans ce plan. Par conséquent le point P est donné. Abaissons donc de P une perpendiculaire PQ sur AB, et le lieu de M ou la ligne de courbure provenant de l'intersection de (α) avec (β) sera un cercle décrit avec PQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire

à AOB. Pareillement on peut démontrer que les deux autres lignes de courbure (α, γ) et (β, γ) sont des cercles situés comme il a été dit ci-dessus.

Les équations en x, y, z des surfaces qui composent le système triple qu'on vient de considérer, sont

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha x - b^2} + \frac{z^2}{\alpha x - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\beta y + b^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z^2}{\beta y + b^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\gamma z + c^2} + \frac{y^2}{\gamma z + c^2 - b^2} + \frac{z}{\gamma} = 1.$$

5. On satisfait encore à la condition (2.) de l'orthogonalité en faisant

$$P^2 = \frac{l^2}{h + k\varrho^2}, \qquad M^2 = \frac{m^2}{h + k\mu^2}, \qquad N^2 = \frac{n^2}{h + k\nu^2},$$

h et k étant deux constantes quelconques, assujetties, bien entendu, aux conditions qu'exige l'emploi des coordonnées elliptiques. Ces valeurs fournissent la solution la plus générale possible, renfermant quatre constantes arbitraires h, k, θ, λ du problème que nous nous étions proposé dans le n° 2. Le système triple de surfaces orthogonales qui en résulte est donné par les équations:

$$\int \frac{l\,d\varrho}{\sqrt{h + k\varrho^2}} \pm \int \frac{m\,d\mu}{\sqrt{h + k\mu^2}} \pm \int \frac{n\,d\nu}{\sqrt{h + k\nu^2}} = \alpha,$$

$$\int \frac{l\sqrt{h + k\varrho^2}}{\varrho^2 - \lambda^2} d\varrho \pm \int \frac{m\sqrt{h + k\mu^2}}{\mu^2 - \lambda^2} d\mu \mp \int \frac{n\sqrt{h + k\nu^2}}{\lambda^2 - \nu^2} d\nu = \beta,$$

$$\int \frac{l\sqrt{h + k\varrho^2}}{\varrho^2 - \theta^2} d\varrho \mp \int \frac{m\sqrt{h + k\mu^2}}{\theta^2 - \mu^2} d\mu \mp \int \frac{n\sqrt{h + k\nu^2}}{\theta^2 - \nu^2} d\nu = \gamma.$$

Considérons maintenant le cas particulier de ce dernier système, qu'on obtient en posant les constantes θ et λ respectivement égales à c et à b. Voici le système triple qui s'ensuit:

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{h + k\varrho^2}} \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{h + k\mu^2}} \pm \int \frac{d\nu}{\sqrt{h + k\nu^2}} = \alpha,$$

$$\int \frac{\sqrt{h + k\varrho^2}}{\varrho^2 - b^2} d\varrho \pm \int \frac{\sqrt{h + k\mu^2}}{\mu^2 - b^2} d\mu \mp \int \frac{\sqrt{h + k\nu^2}}{b^2 - \nu^2} d\nu = \beta,$$

$$\int \frac{\sqrt{h + k\varrho^2}}{\varrho^2 - c^2} d\varrho \mp \int \frac{\sqrt{h + k\mu^2}}{c^2 - \mu^2} d\mu \mp \int \frac{\sqrt{h + k\nu^2}}{c^2 - \nu^2} d\nu = \gamma.$$

La famille des surfaces (α) est algébrique. En général les familles (β) et (γ) ne sont pas algébriques, mais en combinant leurs équations avec celle

du système (α), on verra que les lignes de courbure des surfaces (α) sont situées sur des surfaces algébriques. En effet les équations différentielles des systèmes (β) et (γ) peuvent s'écrire respectivement comme il suit:

$$(h+kb^2)\Big(\frac{d\varrho}{(\varrho^2-b^2)\sqrt{h+k\varrho^2}}\pm\frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{d\nu}{(b^2-\nu^2)\sqrt{h+k\nu^2}}\Big)$$
$$+k\Big(\frac{d\varrho}{\sqrt{h+k\varrho^2}}\pm\frac{d\mu}{\sqrt{h+k\mu^2}}\pm\frac{d\nu}{\sqrt{h+k\nu^2}}\Big)=0,$$

$$(h+kc^2)\Big(\frac{d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{h+k\varrho^2}}\mp\frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{h+k\nu^2}}\Big)$$
$$+k\Big(\frac{d\varrho}{\sqrt{h+k\varrho^2}}\pm\frac{d\mu}{\sqrt{h+k\mu^2}}\pm\frac{d\nu}{\sqrt{h+k\nu^2}}\Big)=0.$$

Par conséquent l'une des deux espèces des lignes de courbure d'une surface appartenant au système (α) est donnée par l'intersection de la surface en question avec la famille de surfaces ayant pour équation différentielle

$$\frac{d\varrho}{(\varrho^2-b^2)\sqrt{h+k\varrho^2}}\pm\frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{d\nu}{(b^2-\nu^2)\sqrt{h+k\nu^2}}=0,$$

tandis que l'autre espèce des lignes de courbure est donnée par l'intersection avec les surfaces représentées par l'équation différentielle

$$\frac{d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{h+k\varrho^2}}\mp\frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{h+k\mu^2}}\mp\frac{d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{h+k\nu^2}}=0,$$

et ces deux équations ont des intégrales algébriques.

Supposons maintenant que $h=a^2$, $k=-1$, et l'on aura pour l'équation différentielle de la famille (α)

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{a^2-\varrho^2}}+\frac{d\mu}{\sqrt{a^2-\mu^2}}+\frac{d\nu}{\sqrt{a^2-\nu^2}}=0,$$

ce qui nous donnera

$$\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{\varrho}{a}\Big)+\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{\mu}{a}\Big)+\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{\nu}{a}\Big)=\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{\alpha}{a}\Big),$$

d'où l'on déduit pour l'équation algébrique en coordonnées elliptiques de la famille (α)

$$a^2(\varrho^2+\mu^2+\nu^2)^2-4(a^2-\alpha^2)(\varrho^2\mu^2+\varrho^2\nu^2+\mu^2\nu^2)+4\alpha\varrho\mu\nu(\varrho^2+\mu^2+\nu^2+\alpha^2)$$
$$-2a^2\alpha^2(\varrho^2+\mu^2+\nu^2)+4\varrho^2\mu^2\nu^2-8a^2\alpha\varrho\mu\nu+a^2\alpha^4=0.$$

Les lignes de courbure de cette surface sont données par ses intersections avec les deux familles de surfaces ayant pour équations différentielles

$$\frac{d\varrho}{(\varrho^2-b^2)\sqrt{a^2-\varrho^2}}+\frac{d\mu}{(\mu^2-b^2)\sqrt{a^2-\mu^2}}-\frac{d\nu}{(b^2-\nu^2)\sqrt{a^2-\nu^2}}=0,$$

$$\frac{d\varrho}{(\varrho^2-c^2)\sqrt{a^2-\varrho^2}}-\frac{d\mu}{(c^2-\mu^2)\sqrt{a^2-\mu^2}}-\frac{d\nu}{(c^2-\nu^2)\sqrt{a^2-\nu^2}}=0,$$

d'où l'on déduit les équations suivantes de ces familles:

$$\frac{\{\sqrt{a^2-b^2}\varrho-b\sqrt{a^2-\varrho^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\mu-b\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\nu-b\sqrt{a^2-\nu^2}\}}{\{\sqrt{a^2-b^2}\varrho+b\sqrt{a^2-\varrho^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\mu+b\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-b^2}\nu+b\sqrt{a^2-\nu^2}\}}=\beta,$$

$$\frac{\{\sqrt{a^2-c^2}\varrho-c\sqrt{a^2-\varrho^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\mu-c\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\nu-c\sqrt{a^2-\nu^2}\}}{\{\sqrt{a^2-c^2}\varrho+c\sqrt{a^2-\varrho^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\mu+c\sqrt{a^2-\mu^2}\}\{\sqrt{a^2-c^2}\nu+c\sqrt{a^2-\nu^2}\}}=\gamma.$$

On obtient facilement l'équation en x, y, z des surfaces qui composent la famille (α) dans le cas qu'on vient de considérer. La voici:

$$a^2(x^2+y^2+z^2+b^2+c^2-\alpha^2)^2-4(a^2-\alpha^2)(b^2+c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2+b^2c^2)$$
$$+4\alpha bcx(x^2+y^2+z^2+b^2+c^2+\alpha^2-2a^2)+4b^2c^2x^2=0.$$

En y faisant $a=\alpha$, on retombe sur le cas des cyclides dont il a été question dans le n° 3.

Collège de la Trinité. Dublin, le 5 Janvier 1863.

Ueber die Flächen deren Normalen eine gegebene Fläche berühren.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Die Gesammtheit der Normalen einer krummen Fläche lässt sich, wie bekannt, in zwei Schaaren abwickelbarer Flächen zusammenfassen, welche die betrachtete Fläche in den Krümmungslinien schneiden. Die Rückkehrkanten dieser abwickelbaren Flächen erzeugen zwei Flächen, die durch jede dem Normalensystem angehörige Gerade berührt werden: die beiden Schalen der Fläche der Krümmungsmittelpunkte. In einer Abhandlung „Ueber eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen" (Bd. 59, pag. 382 dieses Journals) habe ich nachgewiesen, dass auf einer jeden dieser Schalen die Rückkehrkanten der betreffenden Schaar abwickelbarer Flächen und die Curven, welche die Endpunkte gleich langer Hauptkrümmungsradien verbinden, ein orthogonales Curvensystem bilden, welchem die von *Gauss* in den „disquisitiones circa superficies curvas" besonders hervorgehobene Eigenschaft zukommt, einem Linienelemente der betreffenden Schale die Form

$$\sqrt{d\varrho^2 + m\,d\sigma^2}$$

zu geben, in welchem Ausdruck ϱ die Grösse des im Anfangspunkt des Elementes endenden Hauptkrümmungsradius, σ den Parameter der ihm entsprechenden Krümmungscurve der Fläche, deren Normalensystem untersucht wird, $d\varrho$ und $d\sigma$ die Incremente dieser Grössen für den Endpunkt des Elementes angeben, während m der Gleichung:

$$m = \frac{\varrho - \varrho'}{2}\,\frac{\partial m}{\partial \varrho}$$

genügt, in der ϱ' die Grösse des zweiten zu ϱ gehörigen Hauptkrümmungsradius bezeichnet *).

Aus diesen Beziehungen ersieht man durch eine Schlussweise, deren Ausführung nur auf eine Reproduction der Seiten 388 und 389 der angeführten Abhandlung hinauskäme, dass die von *Monge* für specielle Fälle durchgeführte

*) A. a. O. sind die Grössen ϱ, σ, m respective durch p, q, G bezeichnet, während für das Folgende p, q; E, F, G die von *Gauss* eingeführte Bedeutung behalten.

Lösung der Aufgabe:

die Flächen zu bestimmen, deren sämmtliche Normalen eine gegebene Fläche berühren

auf die Transformation des Quadrates des Linienelementes:

$$E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$$

der gegebenen Fläche in die Form:

$$d\varrho^2+m\,d\sigma^2$$

zurückgeführt werden kann.

Sind die Coordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Punktes der gegebenen Fläche durch zwei Variable ϱ und σ, welche die verlangte Transformation herbeiführen, bestimmt, so ist *die* Fläche, als deren eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche die gegebene sich darstellt, durch die Gleichungen:

$$(1.)\qquad x=\xi-\varrho\frac{\partial\xi}{\partial\varrho};\qquad y=\eta-\varrho\frac{\partial\eta}{\partial\varrho};\qquad z=\zeta-\varrho\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}$$

ausgedrückt, während die folgenden:

$$\xi'=\xi-(\varrho-\varrho')\frac{\partial\xi}{\partial\varrho};\qquad \eta'=\eta-(\varrho-\varrho')\frac{\partial\eta}{\partial\varrho};\qquad \zeta'=\zeta-(\varrho-\varrho')\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}$$

$$\varrho-\varrho'=\frac{2m}{\frac{\partial m}{\partial\varrho}}$$

den Lauf der der gegebenen Fläche zugeordneten Schale anzeigen.

Was die Transformation des Quadrates des Linienelementes

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$$

in die Form

$$d\varrho^2+m\,d\sigma^2$$

anbetrifft, so weiss man, dass dieselbe auf die allgemeinste Weise herbeigeführt wird, wenn die Coordinaten eines beliebigen Punktes ξ, η, ζ der gegebenen Fläche bestimmt werden durch seinen geodätischen Abstand ϱ von einer auf der Fläche willkürlich gezeichneten Curve, und durch deren Bogen σ, gezählt von einem heliebig gewählten Anfangspunkt bis zum Fusspunkt dieses Abstandes. Berücksichtigt man diese geometrische Bedeutung der Grössen ϱ und σ für die Fläche $(\xi\eta\zeta)$, so erkennt man aus den Gleichungen (1.) ohne Schwierigkeit folgendes

Theorem.

Spannt man über eine gegebene Fläche, senkrecht gegen eine willkürlich auf derselben gezeichnete Curve, eine Schaar biegsamer Fäden,

denen man sämmtlich, von den Punkten dieser Curve an gerechnet, gleiche Länge giebt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwickelung die allgemeinste Fläche, von welcher die gegebene eine Schale der Fläche der Krümmungsmittelpunkte ist.

Bei dieser Abwickelung beschreibt jeder Endpunkt eines Fadens eine Krümmungslinie der erzeugten Fläche.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die analytische Lösung des von *Monge* gestellten Problems nur die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien für die gegebene Fläche erfordert, welche nach *Gauss* (Disquis. circa superf. art. XXII, Form. (6.)) von der Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(2.) \qquad EG-F^2 = E\frac{\partial\varrho^2}{\partial q^2} - 2F\frac{\partial\varrho}{\partial p}\frac{\partial\varrho}{\partial q} + G\frac{\partial\varrho^2}{\partial p^2}$$

abhängig gemacht werden kann. Diese Differentialgleichung, auf welche auch eine directe Untersuchung des gestellten geometrischen Problems führt, ist keine andere als die für den Fall einer in der betrachteten Fläche stattfindenden Bewegung eines Punktes, auf den keine äusseren Kräfte wirken, durch die *Hamilton-Jacobi*sche Theorie aufzustellende.

Die zur Bestimmung von σ ebenfalls von *Gauss* aufgestellte Differentialgleichung (l. c. Formel (6.)):

$$(3.) \qquad \left(E\frac{\partial\varrho}{\partial q} - F\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial q} = \left(F\frac{\partial\varrho}{\partial q} - G\frac{\partial\varrho}{\partial p}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial p}$$

erfordert nach geschehener Bestimmung von ϱ keine neue Integration. Ist nämlich ω die in das Integral ϱ eingehende willkürliche Function, und substituirt man in dasselbe $\omega+h\bar{\omega}$ statt ω, wo $\bar{\omega}$ eine Function desselben Argumentes wie ω, so erhält man ein neues Integral P der Differentialgleichung (2.). Die Substitution der Entwickelung von P nach Potenzen von h:

$$P = \varrho + hs + \cdots$$

in (2.) zeigt alsdann, dass s oder der erste Coefficient dieser Entwickelung das geforderte Integral der Gleichung (3.) giebt.

Berlin, Juli 1861.

Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Die Aufgabe, von einem gegebenen Punkte aus Normalen an einen Kegelschnitt zu ziehen, ist von Herrn *Cayley* (dieses Journal Band 56, pag. 182) und von Herrn *Fiedler* in dessen ausgezeichneter Bearbeitung von *Salmons* Conic. sections (p. 565) verallgemeinert und dadurch in den Bereich derjenigen Aufgaben gezogen worden, welche für die algebraische Behandlung in allgemeiner Form von Interesse sind *). Es sei mir erlaubt an eine analytische Behandlung eine Discussion des Problems zu knüpfen, welche auch für das Normalenproblem einige neue Resultate mit sich führt.

Die allgemeine Aufgabe lautet:

Auf dem Kegelschnitte $U = f(X_1, X_2, X_3) = 0$ *soll ein Punkt* X *so gefunden werden, dass die Verbindungslinie von* X *mit einem gegebenen Punkte* x *durch den, in Bezug auf einen zweiten Kegelschnitt* $v = 0$ *genommenen Pol der in* X *an* $U = 0$ *gezogenen Tangente geht.*

Oder auch, was dasselbe ist:

Die in X *an* $U = 0$ *gezogene Tangente soll sich mit den in Bezug auf* $v = 0$ *gezogenen Polaren der Punkte* X *und* x *in demselben Punkte treffen.*

Man kann offenbar beide Kegelschnitte immer so projiciren, dass sie confocal werden. In der Projection ist dann die Linie Xx Normale von $U = 0$ im Punkte X, so dass die Resultate der vorliegenden Aufgabe auf das Problem der Normalen sofort übertragen werden können.

Ebenso führt das Problem der Normalen an eine Oberfläche zweiter Ordnung auf die Aufgabe:

Auf der Oberfläche zweiter Ordnung $U = 0$ *soll ein Punkt* X *so gefunden werden, dass, wenn man von* X *den Tangentenkegel an eine zweite Fläche zweiter Ordnung* $v = 0$ *legt, die Polare eines gegebenen Punktes* x *in Bezug auf diesen Kegel mit der in* X *an* $U = 0$ *gelegten Tangentenebene zusammenfällt.*

*) Eine derartige Verallgemeinerung, für allgemeine Curven und Flächen, ist schon von *Steiner* Bd. 49 d. J. gegeben worden; dieselbe ist aber ganz anderer Art.

Bezeichnet man zwei homogene Functionen zweiter Ordnung durch U, V, sobald darin die Veränderlichen X eingeführt sind, und durch u, v, wenn darin die x als Veränderliche auftreten; sind ferner U_i, V_i, u_i, v_i ihre partiellen Differentialquotienten dividirt durch 2, so sind die beiden angeführten Probleme in dem folgenden System von Gleichungen enthalten, wenn darin $n=3$ oder $n=4$ gesetzt wird:

$$(1.)\qquad \begin{cases} v_1 = \lambda U_1 + \mu V_1, \\ v_2 = \lambda U_2 + \mu V_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = \lambda U_n + \mu V_n, \end{cases} \qquad U = 0,$$

wobei die λ, μ unbestimmte Factoren sind. Die Elimination der X aus diesen Gleichungen führt auf eine Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades für $\frac{\lambda}{\mu}$, die bereits von *Joachimsthal* unter Zugrundelegung der speciellen Form, welche confocalen Oberflächen und Curven entspricht, untersucht worden ist (Bd. 53. pag. 149 dieses Journals). Eine weitere Untersuchung dieser Gleichung in allgemeiner Form, namentlich in Bezug auf den Fall $n=4$, bildet den Gegenstand des Folgenden.

§. 1.

Die Gleichung des Problems wird aufgestellt.

Bezeichnet man durch Δ die aus den Elementen $\lambda u_{ik} + \mu v_{ik}$ (wo u_{ik}, v_{ik} die Coefficienten von u, v sind) gebildete Determinante und durch Δ_{ik} ihre Unterdeterminanten, so folgt aus den Gleichungen (1.):

$$\begin{aligned} \Delta . X_1 &= v_1 \Delta_{11} + v_2 \Delta_{12} + \cdots + v_n \Delta_{1n}, \\ \Delta . X_2 &= v_1 \Delta_{21} + v_2 \Delta_{22} + \cdots + v_n \Delta_{2n}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta . X_n &= v_1 \Delta_{n1} + v_2 \Delta_{n2} + \cdots + v_n \Delta_{nn}. \end{aligned}$$

Daher, wenn man diese Werthe in die Gleichung $U=0$ einführt:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_p \Delta_{pi} v_q \Delta_{qk} = 0,$$

welches die gesuchte Endgleichung ist.

Um dieselbe in eine geschicktere Form zu bringen, bemerke man nur, dass nach einem bekannten Determinantensatz, wenn $\Delta_{ik,qp}$ eine Unterdeterminante zweiter Ordnung ist:

$$\Delta_{ip} \Delta_{qk} = \Delta_{ik} \Delta_{qp} - \Delta . \Delta_{ik,qp}.$$

Somit nimmt die obige Gleichung auch die Gestalt an:

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik}.\Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp} - \Delta.\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_q v_p \Delta_{ik,qp} = 0.$$

Da nun noch u_{ik} als der Differentialquotient des Elementes $\lambda u_{ik} + \mu v_{ik}$ nach λ bezeichnet werden kann, so ist

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda},$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_q v_p \Delta_{ik.qp} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp}),$$

und wenn man also Ω die Function

$$(2.) \qquad \Omega = \Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp}$$

nennt, so wird endlich die resultirende Gleichung:

$$(3.) \qquad \Omega\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} - \Delta\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0.$$

Betrachtet man λ, μ als constant, die x aber als Veränderliche, so wird der Ausdruck links eine homogene Function zweiter Ordnung. Für $n=3$ ist (3.) dann, wie eine Vergleichung der Formeln (1.) sofort nachweist, die Gleichung eines Kegelschnittes von einfacher geometrischer Bedeutung. Wenn man durch den Schnitt von $u=0$, $v=0$ einen Kegelschnitt $\lambda u + \mu v = 0$ legt, für jeden Punkt von $u=0$ in Bezug auf den neuen Kegelschnitt die Polare construirt, und deren Pol in Bezug auf $v=0$ sucht, so beschreibt derselbe die Curve (3.). Ebenso entsteht für $n=4$ die Oberfläche (3.) von der zweiten Ordnung, wenn man durch die Schnittcurve von $u=0$, $v=0$ eine neue Fläche $\lambda u + \mu v = 0$ legt, in Bezug auf sie die Polaren der Punkte von $u=0$ sucht, und die Pole der erhaltenen Ebenen in Bezug auf $v=0$ darstellt.

Die Discriminante der Gleichung (3.) $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat eine merkwürdige Eigenschaft, welche allen Gleichungen derselben Form zukommt, welches auch die Functionen Δ, Ω sein mögen.

§. 2.

Bildung der Discriminante.

Soll die Gleichung (3.) zwei gleiche Wurzeln besitzen, so muss auch ihr Differentialquotient nach λ verschwinden, d. h. es muss sein:

$$\Omega\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} - \Delta\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Da nun diese Gleichung sowohl als (3.) durch die Annahme $\Omega = 0$, $\Delta = 0$ erfüllt wird, so ergiebt sich sofort:

Die Discriminante der Gleichung (3.) *enthält als Factor den Ausdruck, welcher, gleich Null gesetzt, das Resultat der Elimination aus den Gleichungen* $\Omega = 0$, $\Delta = 0$ *bildet.*

Ist insbesondere, wie hier, der Grad von Ω um Eins niedriger als der von Δ, so lässt sich der übrigbleibende Factor leicht bilden. Es sind nach Potenzen von λ geordnet die Functionen Δ, Ω von der Form:

$$\Omega = a\lambda^{n-1} + (n-1)a'\mu\lambda^{n-2} + \cdots,$$
$$\Delta = b\lambda^{n} + n.b'\mu\lambda^{n-1} + \cdots.$$

Daher die gegebene Gleichung:

$$(4.) \qquad 0 = \Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} - \Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = ab.\lambda^{2n-2} + 2(n-1)a'b.\lambda^{2n-3}\mu \ldots.$$

Sollen zwei Wurzeln gleich sein, so hat man noch durch Differentiation nach λ und μ:

$$(5.) \quad \begin{cases} 0 = \Omega\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} - \Delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = (2n-2)ab.\lambda^{2n-3} + 2.(n-1).(2n-3)a'b.\lambda^{2n-4}\mu \ldots, \\ 0 = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} - \Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right) = 2(n-1)a'b.\lambda^{2n-3} + \cdots. \end{cases}$$

Da offenbar die beiden letzten Gleichungen verschwinden für $\mu = 0$, $b = 0$, so ist b ein weiterer Factor der Discriminante.

Soll aber der oben erwähnte Fall, wo Ω und Δ zugleich verschwinden, und dadurch in der Gleichung (3.) zwei gleiche Wurzeln auftreten, ausgeschlossen werden, so folgt aus (4.) und der ersten Gleichung (5.) noch:

$$0 = \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} - \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = n.n-1.ab\lambda^{2n-4} + 2n.n-1.n-2.ab'\mu.\lambda^{2n-5} + \cdots.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit der ersten Gleichung (5.) entspringt die durch μ theilbare Gleichung:

$$0 = \left(n\Omega - 2\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} - \left(n\Delta - 2\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = 2n.n-1.a'b.\mu\lambda^{2n-4}\ldots.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung wird nun auch aus der zweiten Gleichung (5.) die durch μ theilbare Gleichung abgeleitet:

$$0 = n\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} - \Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\mu}\left(n\Omega - 2\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} + \frac{\lambda}{\mu}\left(n\Delta - 2\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}.$$

Die Division durch μ führt man leicht aus, indem man nach den bekannten

Formeln für homogene Functionen Ω, Δ und ihre ersten Differentialquotienten durch die zweiten ausdrückt. Alsdann erhält man folgende drei Gleichungen vom $2n-4^{\text{ten}}$ Grade:

$$(6.)\quad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}+(n-1)\mu\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\mu}-(n-2)\mu\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda\partial\mu}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}=0, \\ 2\lambda\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda\partial\mu}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\mu}+\quad n\mu\quad\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda\partial\mu}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2}-(n-1)\mu\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\mu}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\mu^2}-\lambda\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\mu^2}=0, \\ 2\lambda\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\mu}+\quad n\mu\quad\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\mu^2}-(n-2)\mu\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\mu^2}\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}=0. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit λ^{n-3}, $\lambda^{n-4}\mu$, ... μ^{n-3}, so erhält man $3(n-2)$ Gleichungen vom Grade $3n-7$, aus welchen man die $3(n-2)$ Grössen λ^{3n-7}, $\lambda^{3n-6}\mu$, $\lambda^{3n-5}\mu^2$, ..., μ^{3n-7} durch Bildung einer Determinante

$$(7.)\qquad G=0$$

eliminirt. Dieselbe ist für die Coefficienten von Ω sowohl als für die Coefficienten von Δ von der $3(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Bezeichnen wir nun durch $F=0$ die aus $\Omega=0$, $\Delta=0$ entspringende Endgleichung, so ist

$$(7^a.)\qquad R=b.F.G$$

die Determinante der vorgelegten Gleichung. Sie ist in der That für die Coefficienten sowohl von Ω als von Δ von der Ordnung $4n-6$, wie es sein muss.

Die oben ausgeführte Elimination lässt sich auf elegantere Weise folgendermassen bewerkstelligen.

Statt der Gleichungen (3.) kann man offenbar folgende beiden substituiren:

$$\Delta+m\mu\Omega=0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}+m\frac{\partial.\mu\Omega}{\partial\lambda}=0,$$

und wegen der anderen Gleichungen

$$\Delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}-\Omega\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}=0,\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}=0$$

kann man denselben die folgende beifügen:

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}+m\frac{\partial^2\mu\Omega}{\partial\lambda^2}=0.$$

Aber nach bekannten Methoden ersetzt man diese Gleichungen durch das

System:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m \frac{\partial^2 . \mu\Omega}{\partial \lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda \partial \mu} + m \frac{\partial^2 . \mu\Omega}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu^2} + m \frac{\partial^2 . \mu\Omega}{\partial \mu^2} = 0,$$

und aus diesen Gleichungen sind λ, μ, m zu eliminiren. Multipliciren wir dieselben mit λ^p, $\lambda^{p-1}\mu$, ... μ^p; alsdann entstehen $3(p+1)$ Gleichungen, die, als linear betrachtet, die $2(n+p-1)$ Unbekannten

$$\lambda^{n+p-2},\quad \lambda^{n+p-3}\mu,\quad \ldots\quad \mu^{n+p-2},\quad m.\lambda^{n+p-2},\quad m.\lambda^{n+p-3}\mu,\quad \ldots\quad m.\mu^{n+p-3}$$

enthalten. Um dieselben eliminiren zu können, muss

$$2(n+p-1) = 3(p+1)$$

oder

$$p = 2n-5$$

sein; was dann auf eine Eliminationsdeterminante der $2(3n-6)^{\text{ten}}$ Ordnung, und auf die $3n-6^{\text{te}}$ Ordnung für die Coefficienten von Δ und Ω führt, wie dies oben für G gefunden wurde.

§. 3.

Der erste Factor der Discriminante ist ein vollständiges Quadrat.

In der gegebenen Gleichung sind die Coefficienten Functionen der x. In Bezug auf diese Veränderlichen sieht man nun leicht den weiteren Satz ein:

der Ausdruck F ist das vollständige Quadrat eines in lineare Factoren zerfällbaren Ausdrucks.

In der That kann man sich die Gleichung $F=0$ dadurch gebildet denken, dass man die Werthe, welche aus $\Delta=0$ für $\frac{\lambda}{\mu}$ sich ergeben, in den Ausdruck

$$\Sigma\Sigma \Delta_{pq} v_p v_q = \Omega$$

einführt, und sämmtliche Werthe von Ω, welche so entstehen, mit einander multiplicirt. Wenn aber $\Delta=0$, kann man bekanntlich immer solche Zahlen α bestimmen, dass

$$\Delta_{pq} = \alpha_p . \alpha_q$$

wird. Hiedurch geht Ω in das Quadrat eines in den x linearen Ausdrucks über, w. z. b. w. Diese linearen Ausdrücke haben zugleich die Eigenschaft.

dass beide Functionen u, v gleichzeitig in Aggregate ihrer Quadrate übergeführt werden können. Denn setzt man, indem ξ_1, ξ_2, ... lineare Verbindungen der x bedeuten:

$$u = p_1\xi_1^2+p_2\xi_2^2+\cdots+p_n\xi_n^2,$$
$$v = q_1\xi_1^2+q_2\xi_2^2+\cdots+q_n\xi_n^2,$$

so wird, wenn Δ, Ω für die Veränderlichen ξ ebenso gebildet werden, wie ursprünglich für die Veränderlichen x:

$$\Delta = (\lambda p_1+\mu q_1)(\lambda p_2+\mu q_2)\ldots(\lambda p_n+\mu q_n),$$

und gleichzeitig

$$\Omega = \Delta\cdot\left\{\frac{q_1^2\xi_1^2}{\lambda p_1+\mu q_1}+\frac{q_2^2\xi_2^2}{\lambda p_2+\mu q_2}+\cdots\right\},$$

daher, wenn man die Wurzel $\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{q_i}{p_i}$ aus $\Delta=0$ einführt, Ω mit ξ_i^2 proportional. Da nun nach der Theorie der Invarianten der so erhaltene Ausdruck von dem ursprünglichen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann, so sind offenbar die ξ von den oben gefundenen linearen Ausdrücken nur um constante Factoren verschieden.

Setzt man $n=3$, so ist hierin der Satz enthalten:

Diejenigen Punkte, für die zwei Lösungen des Problems zusammenfallen, bilden das doppelt gerechnete gemeinsame Polardreieck der Kegelschnitte $u=0$, $v=0$, und ausserdem eine Curve sechster Ordnung $G=0$.

Projicirt man die Kegelschnitte so dass sie confocal werden, so entsteht aus der Curve $G=0$ die Evolute von u.

Für $n=4$ hingegen kommt der Satz:

Die Punkte, für welche zwei Lösungen des Problems zusammenfallen, bilden das doppelt gerechnete gemeinsame Polartetraeder der Oberflächen $u=0$, $v=0$, und ausserdem eine Fläche zwölfter Ordnung $G=0$.

Führt man die Flächen $u=0$, $v=0$ durch lineare Substitutionen in confocale über, so verwandelt sich $G=0$ in die Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte von u.

§. 4.

Andere Bildung von $G=0$. Fälle algebraischer Lösbarkeit des Problems für $n=4$.

Den Ausdruck G und die Gleichung $G=0$ kann man noch auf eine andere Art erhalten, welche vor der im Vorigen auseinandergesetzten wesent-

liche Vorzüge besitzt. Die in §. 2 zur Bildung von $G=0$ aufgestellten Gleichungen konnte man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta + \mu m \Omega &= 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + \mu m \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + \mu m \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} &= 0, \end{aligned}$$

und das Bestehen dieser Gleichungen ist identisch mit der Forderung, *es solle sich eine Zahl m so bestimmen lassen, dass die Gleichung n^{ten} Grades*

$$\Delta + m.\mu\Omega = 0$$

drei gleiche Wurzeln besitze.

In dieser Ausdrucksweise bildet man sehr leicht die Gleichung $G=0$ für $n=3$ und $n=4$. Sei erstlich $n=3$. Es muss dann identisch werden

$$(8.) \qquad \Delta + m.\mu\Omega = (\lambda\alpha+\mu\beta)^3.$$

Führt man in dieser identischen Gleichung für λ, μ die Werthe λ', μ', λ'', μ'', λ''', μ''' ein, welche der Gleichung $\Delta=0$ genügen, so hat man nach dem Vorigen für $\mu.\Omega$ die Werthe η'^2, η''^2, η'''^2, wo die η in den x linear sind, und, gleich Null gesetzt, die Seiten des für u, v gemeinsamen Polardreiecks darstellen. Demnach wird:

$$\begin{aligned} \lambda'\alpha+\mu'\beta &= \eta'^{\frac{2}{3}}.m, \\ \lambda''\alpha+\mu''\beta &= \eta''^{\frac{2}{3}}.m, \\ \lambda'''\alpha+\mu'''\beta &= \eta'''^{\frac{2}{3}}.m, \end{aligned}$$

und durch Elimination von m, α, β:

$$(8^a.) \qquad \begin{vmatrix} \eta'^{\frac{2}{3}} & \lambda' & \mu' \\ \eta''^{\frac{2}{3}} & \lambda'' & \mu'' \\ \eta'''^{\frac{2}{3}} & \lambda''' & \mu''' \end{vmatrix} = 0,$$

der gewöhnlichen Form der Evolutengleichung entsprechend.

Für $n=4$ erhält man die Bedingung dafür, dass die Gleichung vierten Grades

$$\Delta + m.\mu\Omega = 0$$

drei gleiche Wurzeln habe, aus der bekannten Eigenschaft der Gleichungen vierten Grades, die Existenz dreier gleichen Wurzeln durch das Verschwinden ihrer beiden Fundamentalinvarianten anzuzeigen. Da

$$\Delta = b\lambda^4+4b'\lambda^3\mu+6b''\lambda^2\mu^2+4b'''\lambda\mu^3+b^{(4)}\mu^4,$$
$$\Omega = a\lambda^3+3a'\lambda^2\mu+3a''\lambda\mu^2+a'''\mu^3,$$

so sind die Invarianten i, j der obigen Gleichung:

$$(9.)\quad \begin{cases} i = 6(b^{(4)}+ma''')+4\left(b'+m\frac{a}{4}\right)\left(b'''+3m\frac{a''}{4}\right)+3\left(b''+m\frac{a'}{2}\right)^2, \\ j = \begin{vmatrix} b & b'+m\frac{a}{4} & b''+m\frac{a'}{2} \\ b'+m\frac{a}{4} & b''+m\frac{a'}{2} & b'''+3m\frac{a''}{4} \\ b''+m\frac{a'}{2} & b'''+3m\frac{a''}{4} & b^{(4)}+ma''' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen hiefür:

$$i = A+2mA_1+m^2A_2,$$
$$j = B+3mB_1+3m^2B_2+m^3B_3,$$

so erhält man $G=0$ als Eliminationsresultat der Gleichungen $i=0$, $j=0$ in der Form

$$(10.)\quad G=0=\begin{vmatrix} A & 2A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A & 2A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A & 2A_1 & A_2 \\ B & 3B_1 & 3B_2 & B_3 & 0 \\ 0 & B & 3B_1 & 3B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

oder, wenn man mit Hülfe von $i=0$ zunächst den Grad von $j=0$ auf doppelte Weise erniedrigt, und dann m aus den erhaltenen drei Gleichungen zweiten Grades eliminirt:

$$(11.)\quad G=0=\begin{vmatrix} 3B_1A-2A_1B & 3B_2A-A_2B & B_3A \\ B\ A_2 & 3B_1A_2-A\ B_3 & 3B_2A_2-2A_1B_3 \\ A & 2A_1 & A_2 \end{vmatrix}.$$

Eine elegantere Gestalt nimmt diese Gleichung an mit Hülfe der Betrachtungen, welche ich Bd. 58, pg. 273 dieses Journals über die Elimination aus Gleichungen angestellt habe, von denen nur eine den zweiten Grad übersteigt; man erhält aus denselben die Form:

$$(12.)\quad G=0=$$
$$-8\begin{vmatrix} A & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A & B & B_1 \\ A_1 & B_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A & A_1 & B\,A_2+B_2A-2B_1A_1 \\ A_1 & A_2 & B_1A_2+B_3A-2B_2A_1 \\ BA_2+B_2A-2B_1A_1, & B_1A_2+B_3A-2B_2A_1 & 0 \end{vmatrix}\cdot$$

Ich bemerke, dass die A, B in Bezug auf die x von der doppelten Ordnung ihres Index sind, so dass $G=0$ wirklich eine Fläche zwölften Grades darstellt.

Es verdient erwähnt zu werden, dass man für $n=3$ an Stelle der ursprünglichen Gleichung sechsten Grades

$$\Delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}-\Omega\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}=0$$

eine andere setzen kann von eigenthümlicher Form, in welcher m die Unbekannte ist. Denn da diese Gleichung ausdrückt, dass die Gleichung

$$\Delta+m.\mu\Omega=0$$

zwei gleiche Wurzeln habe, so hat man nur die Discriminante dieser Gleichung vierten Grades gleich Null zu setzen. Diese ist aber $i^3-27j^2=0$; und so wird die zu substituirende Gleichung in m, indem man diese Discriminante verschwinden lässt:

$$(13.)\qquad (A+2mA_1+m^2A_2)^3-27(B+3mB_1+3m^2B_2+m^3B_3)^2=0.$$

Diese Form ist unter Anderem dadurch merkwürdig, dass sie auf einige Fälle führt, in denen das Problem algebraisch lösbar ist. Zwei Fälle, in denen dies eintritt, sind folgende:

1. Wenn $AA_2-A_1^2=0$. Durch Multiplication der Gleichung (13.) mit A erhält man dann:

$$(A+A_1m)^3=\pm\sqrt{27A}.(B+3B_1m+3B_2m^2+B_3m^3),$$

also zwei Gleichungen dritten Grades an Stelle einer Gleichung vom sechsten. Die Fläche $AA_2-A_1^2=0$ ist vom vierten Grade; und mit Hülfe ihrer Gleichung geht die Gleichung (12.), mit A^3 multiplicirt, in folgende über:

$$(BA_1^3-3B_1AA_1^2+3B_2A^2A_1-B_3A^3)^2=0.$$

Die Fläche $AA_2-A_1^2=0$ berührt also $G=0$ längs einer Curve, durch welche sich eine Fläche sechster Ordnung

$$BA_1^3-3B_1AA_1^2+3B_2A^2A_1-B_3A^3=0$$

legen lässt. Man hat auf diese Weise den Satz:

Das Problem ist algebraisch lösbar für alle Punkte einer Fläche vierter Ordnung

$$(14.)\qquad AA_2-A_1^2=0,$$

welche die Fläche $G=0$ in einer Curve berührt, durch welche eine Fläche sechster Ordnung

$$(15.)\qquad BA_1^3-3B_1AA_1^2+3B_2A^2A_1-B_2A^3=0$$

sich legen lässt.

2. Wenn $B:B_1 = B_1:B_2 = B_2:B_3$, oder

$$(16.) \qquad B_1^2 = BB_2, \qquad B_1 B_2 = B_3 B.$$

Dann erhält man durch Multiplication mit B^4 aus (13.):

$$(A+2A_1 m+A_2 m^2)\sqrt[3]{B^4} = 3(B+mB_1)^2,$$

also drei quadratische Gleichungen statt einer Gleichung sechsten Grades. Die Gleichungen (16.) stellen eine Curve vier und zwanzigster Ordnung dar; mit Hülfe dieser Gleichungen aber verwandelt sich $G=0$, mit B^4 multiplicirt, in

$$(B^2A_2-2BB_1A_1+B_1^2A)^3 = 0.$$

Dies giebt, ganz wie oben, den Satz:

Das Problem ist algebraisch lösbar für alle Punkte einer Curve vier und zwanzigster Ordnung, welche sich als der Schnitt zweier Flächen vierter und sechster Ordnung:

$$B_1^2-BB_2=0, \qquad B_1B_2-BB_3=0$$

darstellt. Diese Curve berührt die Fläche $G=0$ dreipunktig, wo sie derselben begegnet (in 96 Punkten), und die Berührungspunkte liegen auf einer Fläche vierter Ordnung:

$$(17.) \qquad B^2A_2-2BB_1A_1+B_1^2A = 0.$$

Es giebt noch eine andere Fläche, für deren Punkte das Problem algebraisch lösbar wird, *indem die sechs Wurzeln der Gleichung* (13.) *eine Involution bilden.* Diese Fläche scheint sehr verwickelt und von hohem Grade. Doch ist bemerkenswerth, dass für die vorliegende Gleichungsform *dieselbe sich in drei Flächen auflöst, deren zwei von verhältnissmässig niedrigem Grade werden.* In der That, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung in Involution stehen, kann man immer durch eine lineare Transformation die ungeraden Potenzen der Unbekannten verschwinden machen. Nun geht die vorliegende Gleichung durch die Substitution

$$m = \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$$

über in die Form:

$$(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}_1\mu+\mathfrak{A}_2\mu^2)^3-27(\mathfrak{B}+3\mathfrak{B}_1\mu+3\mathfrak{B}_2\mu^2+\mathfrak{B}_3\mu^3)^2 = 0.$$

Und so erhält man die gesuchte Fläche durch Elimination von α, β, γ, δ aus den Gleichungen:

$$(18.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_1 = 27\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \\ 4\mathfrak{A}_1^3+6\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A} = 27(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_3+9\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2), \\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2^2 = 27\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3. \end{cases}$$

Aber diese Gleichungen werden erfüllt durch die Gleichungen

$$(19.) \qquad \mathfrak{A}_1 = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = 0,$$

oder auch durch

$$(20.) \qquad \mathfrak{A}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_3 = 0,$$

und die Eliminationsresultanten der Systeme (19.), (20.) müssen daher in der des Systems (18.) als Factoren enthalten sein.

§. 5.

Die Curve $G = 0$ für $n = 3$. (Evolute.)

Ich gehe jetzt genauer auf das Problem für $n = 3$ ein, welches den Normalen eines Kegelschnitts entspricht. Die beiden Invarianten der Gleichung vierten Grades

$$\Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \Omega \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0$$

seien wieder durch i, j bezeichnet. Da nun die Gleichung ausgerechnet die Form hat:

$$0 = (2b'''a' - 3b''a'')\mu^4 + (2ab''' - 6b'a'')\mu^3\lambda + (3ab'' - 6a'b' - 3a''b)\mu^2\lambda^2 - 4ba'\mu\lambda^3 - ab\lambda^4,$$

so findet man sofort:

$$(19'.) \qquad i = 3\left(\frac{a''b + ab''}{2} - a'b'\right)^2 = 3h^2$$

und so die Haupteigenschaft der Gleichung, *dass ihre erste Invariante ein vollständiges Quadrat ist.*

Die Discriminante R zerfällt demnach in zwei Factoren:

$$R = i^3 - 27j^2 = 27(h^3 - j)(h^3 + j).$$

Bezeichnet man nun mit $F = 0$ wie in §. 2 das Eliminationsresultat der Gleichungen $\Delta = 0$, $\Omega = 0$, so dass

$$F = \begin{vmatrix} a & 2a' & a'' & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a' & a'' & 0 \\ 0 & 0 & a & 2a' & a'' \\ b & 3b' & 3b'' & b''' & 0 \\ 0 & b & 3b' & 3b'' & b''' \end{vmatrix},$$

wo denn auch $F = 0$ das Quadrat der Producte der Seiten des zu u, v gehörigen Polardreiecks ist, so muss einer der Factoren $h^3 - j$, $h^3 + j$ offenbar das Product $b.F$, der andere G darstellen. Inzwischen wird für $b = 0$, wie

man leicht übersieht, $h^3 = -j$; daher hat man

$$(20^{a}.) \qquad bF = n.(h^3+j), \qquad G = n'.(h^3-j),$$

wo n, n' constante Zahlen bedeuten. Um n zu bestimmen, lasse ich alle Coefficienten bis auf $a''.b$ verschwinden; dann bleibt $bF = b^3.a''^3$, $h = \frac{a''b}{2}$, $j = \left(\frac{a''b}{2}\right)^3$, also $n = 4$. Setzt man auch $n' = 4$, und eliminirt j, so erhält man:

$$G = 8h^3 - bF.$$

Um endlich F anders auszudrücken, seien λ, λ', λ'' die Wurzeln von $\Delta = 0$, und Ω nehme für diese drei Werthe die Ausdrücke η^2, η'^2, η''^2 an, wo die Gleichungen $\eta = 0$, $\eta' = 0$, $\eta'' = 0$ die Seiten des zu u, v gehörigen Polardreiecks bedeuten. Ist endlich

$$H = \eta\eta'\eta'',$$

so muss F auf H^2 zurückkommen. In der That, da

$$a_2 + 2a_1\lambda^{(i)} + a\lambda^{(i)2} = \eta^{(i)2},$$
$$b_3 + 3b_2\lambda^{(i)} + 3b_1\lambda^{(i)2} + b\lambda^{(i)3} = 0,$$

so erhält man durch Multiplication von F mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \lambda'^3 & \lambda'^4 \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \lambda''^3 & \lambda''^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 \end{vmatrix} . \lambda\lambda'\lambda''$$

den Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} \eta^2 & \lambda\eta^2 & \lambda^2\eta^2 & 0 & 0 \\ \eta'^2 & \lambda'\eta'^2 & \lambda'^2\eta'^2 & 0 & 0 \\ \eta''^2 & \lambda''\eta''^2 & \lambda''^2\eta''^2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a'' & 0 & b''' \end{vmatrix} = bb'''.H^2.\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 \end{vmatrix}.$$

Da nun ferner noch offenbar $b_3 = -b.\lambda\lambda'\lambda''$, so ergiebt sich aus der Vergleichung beider Ausdrucksweisen:

$$(21.) \qquad bF = b^3H^2,$$

und endlich für G die Gestalt:

$$G = 8h^3 - b^3H^2.$$

Die Gleichung der Curve also, für welche zwei Lösungen des Problems zusammenfallen, und welche der Evolute entspricht, ist in rationaler Form (während oben eine irrationale Darstellungsweise gegeben wurde):

$$(22.) \qquad G = 8h^3 - b^3H^2 = 0.$$

Diese Curve hat offenbar sechs Rückkehrpunkte in den Schnittpunkten des Kegelschnitts $h = 0$ mit dem Polardreieck $H = 0$, und zwar sind die Seiten des letzteren die Rückkehrtangenten. Es ist zu bemerken, dass dies Polardreieck nicht nur zu u und v sondern auch zu den aus u und v abgeleiteten Formen a, a_1, a_2 gehört, mithin auch zu dem Kegelschnitt $h = 0$ selbst, dessen Gleichung sich durch die a auf lineare Weise ausdrückt.

§. 6.

Allgemeines Curvensystem, welches die Curve $G = 0$ einschliesst.

Die Curve $G = 0$ sowohl als der Kegelschnitt $h = 0$ können aber als Glieder einer merkwürdigen Curvenfamilie betrachtet werden, deren einzelne Glieder durch die Eigenschaft characterisirt sind, *dass für jeden Punkt einer solchen Curve das anharmonische Verhältniss der nach den entsprechenden Punkten X gezogenen Geraden denselben Werth annimmt.*

Bezeichnen wir durch α das anharmonische Verhältniss der vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung. Durch lineare Transformation kann man dann diesen Wurzeln die Werthe geben: 0, 1, α, ∞. Die transformirte biquadratische Gleichung wird zugleich:

$$0 = x^3 - (\alpha+1)x^2 + \alpha x,$$

und daraus findet sich

$$i = \frac{(\alpha+1)^2}{12} - \frac{\alpha}{4}, \qquad j = \frac{(\alpha+1)^3}{216} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{48},$$

und demnach

$$i^3 = 108 \cdot \frac{[(\alpha+1)^2 - 3\alpha]^3}{[-9\alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1)^3]^2} \cdot j^2.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(23.) \qquad A = 4 \cdot \frac{[(\alpha+1)^2 - 3\alpha]^3}{[-9\alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1)^3]^2},$$

so wird diese Gleichung

$$(24.) \qquad i^3 - 27Aj^2 = 0,$$

und dieselbe gilt noch immer, wenn auch i, j für eine beliebig linear mit x zusammenhängende Veränderliche gebildet werden.

Wenden wir dies auf die im Vorigen behandelte Gleichung an, wo $i = 3h^2$, so erhält man

$$h^6 - \mathrm{A}\, j^2 = 0,$$

oder die beiden Gleichungen:

$$h^3 + j\sqrt{\mathrm{A}} = 0, \qquad h^3 - j\sqrt{\mathrm{A}} = 0.$$

Ersetzt man j durch H^2, so entspringen endlich daraus die Gleichungen:

$$(25.) \qquad h^3 - \frac{b^3\sqrt{\mathrm{A}}}{4(\sqrt{\mathrm{A}}-1)} \cdot H^2 = 0, \qquad h^3 - \frac{b^3\sqrt{\mathrm{A}}}{4(\sqrt{\mathrm{A}}+1)} \cdot H^2 = 0.$$

Diejenigen Punkte also, für welche die Wurzeln der biquadratischen Gleichung ein bestimmtes anharmonisches Verhältniss haben, liegen immer auf zwei Curven sechsten Grades (25.), welche einem System

$$h^3 - z H^2 = 0$$

angehören. Alle Curven dieses Systems haben dieselben sechs Rückkehrpunkte, welche auf dem Schnitt des Kegelschnitts $h = 0$ mit dem Polardreieck $H = 0$ liegen, und deren Rückkehrtangenten die Seiten des Polardreiecks selbst sind.

Gehen wir inzwischen auf die ursprünglichen Gleichungen (1.) des Problems zurück, so zeigt sich, dass die Gleichung der durch x und den zugehörigen Punkt X gelegten Geraden, die laufenden Coordinaten durch X' bezeichnet, also die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_1' & X_1 & x_1 \\ X_2' & X_2 & x_2 \\ X_3' & X_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

mit der Determinante Δ multiplicirt, übergeht in:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda U_1' + \mu V_1' & \lambda U_1 + \mu V_1 & \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda U_2' + \mu V_2' & \lambda U_2 + \mu V_2 & \lambda u_2 + \mu v_2 \\ \lambda U_3' + \mu V_3' & \lambda U_3 + \mu V_3 & \lambda u_3 + \mu v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda U_1' + \mu V_1' & v_1 & \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda U_2' + \mu V_2' & v_2 & \lambda u_2 + \mu v_2 \\ \lambda U_3' + \mu V_3' & v_3 & \lambda u_3 + \mu v_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$0 = \lambda \begin{vmatrix} U_1' & v_1 & u_1 \\ U_2' & v_2 & u_2 \\ U_3' & v_3 & u_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} V_1' & v_1 & u_1 \\ V_2' & v_2 & u_2 \\ V_3' & v_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Form folgt sofort, dass das anharmonische Verhältniss der vier in Rede stehenden Geraden mit dem der vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung identisch ist.

Der in Rede stehende Satz, angewandt auf das Problem der Normalen eines Kegelschnitts, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Die Punkte, von denen man vier Normalen an den Kegelschnitt ziehen kann, deren anharmonisches Verhältniss ein gegebenes ist, bilden zwei Curven sechster Ordnung; alle so entstandene Curven haben die nämlichen sechs Rückkehrpunkte, die auf einem Kegelschnitt liegen; und zwar fallen von denselben zwei ins Unendliche, die vier anderen sind die Spitzen der Evolute. Die Rückkehrtangenten sind allen Curven des Systems gemeinsam, nämlich die Hauptaxen und die Linie in der Unendlichkeit.

Setzt man insbesondere $\alpha = 0$, 1 oder ∞, so werden zwei Wurzeln gleich. In der That ist dann $A = 1$, und die Gleichungen (25.) reduciren sich auf $H^2 = 0$, $8h^3 - b^2H^2 = 0$, d. h. auf das doppelt gerechnete Polardreieck und $G = 0$.

Setzt man hingegen $\alpha = -1$, so dass die betreffenden vier Geraden ein *harmonisches* System bilden, so wird $A = \infty$; *in diesem Falle fallen die beiden Curven* (25.) *in eine einzige Curve*

$$h^3 - \frac{b^3}{4} H^2 = 0$$

zusammen.

Ein weiterer bemerkenswerther Fall tritt ein, wenn $A = 0$, so dass

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

wo die Curven (25.) abermals in eine einzige zusammenfallen, nämlich in den dreifach gerechneten Kegelschnitt $h = 0$. *Der Kegelschnitt $h = 0$ ist also der geometrische Ort der Punkte, für welche das anharmonische Verhältniss der vier Geraden einer imaginären dritten Wurzel von -1 gleich wird.*

§. 7.

Werthsysteme der x, für welche drei Lösungen des Problems zusammenfallen.

Aus dem Vorigen folgt sofort, dass die sechs Rückkehrpunkte zugleich die einzigen Punkte sind, für welche *drei* Lösungen des Problems zusammenfallen. Denn in diesen Punkten muss sowohl i als j verschwinden, was eben auf jene Rückkehrpunkte führt.

Das Problem, im Allgemeinen diejenigen Werthsysteme der x zu finden, für welche drei Wurzeln $\frac{\lambda}{\mu}$ zusammenfallen, kann man auf folgende Weise behandeln. Ersetzt man die Gleichung

$$(26.) \qquad \Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \Omega \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0$$

durch die beiden: *)

$$(27.)\qquad \begin{cases} \Delta + m\Omega = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + m\dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$

so muss, damit (26.) zwei gleiche Wurzeln habe, das System (27.) noch bestehen, wenn man λ durch $\lambda + d\lambda$ und m durch $m + dm$ ersetzt. Hierdurch erhält man:

$$(28.)\qquad \begin{cases} \Omega . dm = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2}\right) d\lambda + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} dm = 0, \end{cases}$$

Gleichungen, welche mit (27.) zusammen entweder auf

$$(29.)\qquad \Delta = 0, \qquad \Omega = 0,$$

d. h. auf die Gleichung $F = 0$, oder auf

$$(30.)\qquad \Delta + m\Omega = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + m\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} = 0$$

führen, d. h. auf die Gleichung $G = 0$.

Sollen nun drei Wurzeln λ gleich werden, so kann man in (28.) wieder $\lambda + d\lambda$, $m + dm$ an Stelle von λ, m setzen. Man erhält dann weiter:

$$(31.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} d\lambda\, dm + \Omega d^2 m = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^3 \Delta}{\partial \lambda^3} + m\dfrac{\partial^3 \Omega}{\partial \lambda^3}\right) d\lambda^2 + \left(\dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2}\right) d^2\lambda + 2\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} dm\, d\lambda + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} d^2 m = 0. \end{cases}$$

Es giebt hiernach zwei Classen von Werthsystemen, für welche drei Wurzeln λ einander gleich werden, von denen eine die ersten Gleichungen (28.), (31.) durch die Annahme

$$\Omega = 0, \qquad dm = 0,$$

die andere durch die Annahme

$$dm = 0, \qquad d^2 m = 0$$

erfüllt. Im ersten Falle erhält man daraus die Gleichungen:

$$(32.)\qquad \begin{cases} \Omega = 0, \\ \Delta = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + m\dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} = 0; \end{cases}$$

*) Hier wie im Folgenden ist der Bequemlichkeit wegen $\mu = 1$ gesetzt.

im zweiten aber:

$$(33.)\quad \begin{cases} \Delta + m\Omega = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial \lambda} + m\dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^3 \Delta}{\partial \lambda^3} + m\dfrac{\partial^3 \Omega}{\partial \lambda^3} = 0. \end{cases}$$

Das System (33.) lässt sich einfach dadurch ausdrücken, dass bei passender Bestimmung der Zahl m die Gleichung

$$\Delta + m\Omega = 0$$

vier gleiche Wurzeln ergiebt, was bei $n = 3$ selbstverständlich nicht eintreten kann. Das System (32.) hingegen ist dadurch characterisirt, dass für dasselbe gleichzeitig F und G verschwinden. Dasselbe stellt also für $n = 3$ den vollständigen Schnitt des Polardreiecks mit der Curve $G = 0$, für $n = 4$ den unvollständigen Schnitt des Polartetraeders mit der Fläche $G = 0$ dar *).

Die den Gleichungen (32.) entsprechenden Werthsysteme der x besitzen eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft. Bezeichnen wir allgemein durch δf den Ausdruck

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

so erhalten wir aus den Gleichungen (27.), indem wir von einem Werthsystem x zu einem benachbarten fortschreiten:

$$(34.)\quad \begin{cases} \Omega\, dm + m\,\delta\Omega = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} + m\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2}\right) d\lambda + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} d\lambda\, dm + m\,\delta\dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} d\lambda = 0. \end{cases}$$

Bewegt man sich so fort, dass das System der x fortwährend der Gleichung $G = 0$ genügt, so reducirt sich die zweite Gleichung (34.) auf

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} dm + \delta\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \cdot m = 0,$$

so dass man aus dieser, zusammen mit der ersten Gleichung (34.), erhält:

$$(35.)\quad \Omega . \delta\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \cdot \delta\Omega = 0.$$

Für $n = 3$ und $n = 4$ erhält man hieraus die Tangente und Tangentenebene

*) Es können in der That weitere Theile dieses Schnittes gefunden werden, von denen weiter unten die Rede ist.

der Curve oder Fläche $G=0$ dargestellt durch die Formel:

$$(36.) \qquad \Omega . \Sigma X_i' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial x_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \Sigma X_i' \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0.$$

Aber es ist oben gezeigt, dass für gewisse Systeme der x, welche den Gleichungen $F=0$, $G=0$ gleichzeitig genügen, Ω einem vollständigen Quadrat gleich wird. Für diese Werthsysteme verschwindet also gleichzeitig Ω und $\delta\Omega$; und so wird die Gleichung (35.) oder (36.) illusorisch.

Gehen wir daher in (34.) zu unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung über, so erhalten wir, mit Hinweglassung der verschwindenden Terme Ω, $\delta\Omega$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} dm\, d\lambda + m\delta \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + m\delta\delta\Omega = 0,$$

was sich mit Hülfe der zweiten Gleichung (34.) auf

$$\delta\delta\Omega = 0$$

reducirt. Da nun für die betrachteten Punkte

$$\Omega = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)^2,$$

so ist diese Gleichung, wenn man statt des Increments dx die Veränderliche X' setzt, nichts Anderes als

$$(\alpha_1 X_1' + \alpha_2 X_2' + \cdots + \alpha_n X_n')^2 = 0,$$

und so hat man den Satz:

> *Für einen Theil derjenigen Werthsysteme, welche zugleich den Gleichungen $F=0$, $G=0$ genügen, fallen diese beiden Gleichungen bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive zusammen.*

Für $n=3$ ist dies der oben bereits bewiesene Satz:

> *In den Schnittpunkten der Curve $G=0$ mit dem Polardreieck hat erstere Rückkehrpunkte, deren Tangenten die Seiten des Polardreiecks sind;*

und für $n=4$ findet sich der Satz:

> *Die Schnittcurven der Fläche $G=0$ mit dem Polartetraeder sind zum Theil ebene Rückkehrcurven der Flächen, deren Tangentenebenen die Flächen des Polartetraeders selbst sind.*

Auf dieselbe Weise fortschreitend, wie im Anfange dieses §. begonnen wurde, gelangt man zur Bestimmung der Werthsysteme der x, für welche vier Lösungen des Problems zusammenfallen. Dies geschieht, wenn eines der folgenden beiden Systeme erfüllt ist:

$$(37.)\qquad \begin{cases} \text{1.} & \text{2.} \\ \Delta = 0, & \Delta + m\Omega = 0, \\ \Omega = 0, & \\ \dfrac{\partial\Delta}{\partial\lambda} + m\dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = 0, & \dfrac{\partial\Delta}{\partial\lambda} + m\dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} + m\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = 0, & \dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2} + m\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^3\Delta}{\partial\lambda^3} + m\dfrac{\partial^3\Omega}{\partial\lambda^3} = 0, & \dfrac{\partial^3\Delta}{\partial\lambda^3} + m\dfrac{\partial^3\Omega}{\partial\lambda^3} = 0, \\ & \dfrac{\partial^4\Delta}{\partial\lambda^4} + m\dfrac{\partial^4\Omega}{\partial\lambda^4} = 0. \end{cases}$$

Man erkennt sofort, dass das zweite System auch für $n = 4$ nicht mehr erfüllbar ist. Das System 1. stellt für $n = 4$ nichts Anderes dar als die Schnittpunkte der Curven, welche durch die Systeme (32.), (33.) gegeben sind. Ich komme auf dieselben später wieder zurück.

§. 8.

Werthsysteme der x, für welche zweimal zwei Werthsysteme zusammenfallen.

Diejenigen Werthsysteme der x, für welche zwei Wurzelpaare der gegebenen Gleichung zusammenfallen, sondern sich in drei Classen. Entweder kann für beide Wurzelpaare F, oder für beide G, oder für eines derselben F, für das andere G verschwinden. Doch das letzte führt nur zum Theil auf Neues; ein anderer Theil dieser Systeme ist bereits in den Gleichungen (32.) enthalten und gehört deswegen nicht hierher.

Werthsysteme der ersten Classe erhält man, wenn zwei der linearen Factoren, aus deren Quadraten F durch Multiplication gebildet ist, gleichzeitig verschwinden. Für $n = 3$ und $n = 4$ erhält man also den Satz:

Für die Ecken des Polardreiecks, respective für die Punkte der Kanten des Polartetraeders, fallen zweimal zwei Lösungen des Problems zusammen.

Für die zweite Classe von Werthsystemen sind die Gleichungen (30.) auf doppelte Weise erfüllbar. Für beide Werthe von λ kann man dann die Gleichung (36.) bilden. Im Falle $n = 3$ hat man dann zwei Tangenten an $G = 0$; *diese Punkte werden also Doppelpunkte jener Curve.* Für $n = 4$ hat man zwei Tangentenebenen; *die betreffenden Punkte bilden also eine Doppelcurve von* $G = 0$.

Diese Werthsysteme sind ausserdem dadurch characterisirt, dass, wenn man G als Eliminationsdeterminante darstellt, nicht blos G sondern auch seine Unterdeterminanten verschwinden müssen, damit schliesslich die Bestimmung der λ nicht auf eine lineare Gleichung führe sondern auf eine quadratische. Für $n=3$ und $n=4$ werden dieselben leicht ermittelt. Sei zunächst $n=3$. Die Benutzung der Gleichungen (6.) führt dann auf die Darstellung von G durch eine *symmetrische Determinante:*

$$(38.)\qquad G = \begin{vmatrix} 3a''b''-2b'''a' & 3a''b'-b'''a & 2a'b'-b''a \\ 3a''b'-b'''a & 2a'b'-b''a+3a''b & 2a'b \\ 2a'b'-b''a & 2a'b & ba \end{vmatrix}.$$

Soll nun nicht blos G verschwinden sondern auch dessen Unterdeterminanten, so muss man drei Zahlen p, q, r so bestimmen können, dass

$$(39.)\qquad \begin{cases} 3a''b''-2b'''a' = p^2, & 2a'b = qr, \\ 2a'b'-b''a+3a''b = q^2, & 2a'b'-b''a = pr, \\ ba = r^2, & 3a''b'-b'''a = pq. \end{cases}$$

Hieraus bildet man leicht die Gleichungen:

$$p(pb'-qb''+rb''')=0, \qquad p(ap-2a'q+3a''r)=0,$$
$$r(pb-qb'+rb'')=0, \qquad r(aq-2a'r)=0.$$

Da nun in (39.), wie man leicht sieht, weder p noch r verschwinden kann, so erhält man hieraus:

$$(40.)\qquad p:q:r = b''^2-b'b''' : b'b''-bb''' : b'^2-bb'',$$

$$(40^a.)\qquad \begin{aligned} &a:2a':3a'' \\ &= (b'b'''-b''^2)^2 : (b'b'''-b''^2)(bb'''-b'b'') : (bb'''-b'b'')^2-(b'b'''-b''^2)(bb''-b'^2). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (40^a.) *stellen zwei Kegelschnitte dar, in deren Durchschnitt die vier Doppelpunkte von* $G=0$ *liegen.*

Mit Hülfe der Gleichungen (39.) geht zugleich die biquadratische Gleichung (3.) für λ in die elegante Form über:

$$(p+q\lambda+r\lambda^2)^2 = 0,$$

oder in:

$$0 = \begin{vmatrix} b & b' & 1 \\ b' & b'' & -\lambda \\ b'' & b''' & \lambda^2 \end{vmatrix}.$$

Die Wurzeln λ bestimmen sich also für alle vier Doppelpunkte durch dieselben

Werthe. Dies veranlasst zu einer allgemeinen Bemerkung. Für jeden Werth von n giebt es 2^{n-1} Werthsysteme der x, welche dieselbe Gleichung für λ ergeben: es sind dieses die Systeme, welche man erhält, wenn man die Verhältnisse der a bestimmten Werthen gleich setzt. In dem Problem der Normalen hat man so stets 4, respective 8 Punkte; es sind die in den verschiedenen Räumen des Coordinatensystems analog gelegenen.

Auch wenn $n = 4$, wurde oben G als Eliminationsresultante dreier quadratischen Gleichungen dargestellt (11.), deren eine die folgende ist:

$$(41.) \qquad A + 2A_1 m + A_2 m^2 = 0.$$

Man kann nun zur Aufsuchung der fraglichen Werthsysteme sich wieder des Mittels bedienen, die Unterdeterminanten von G verschwinden zu lassen. Bequemer führt hier die Betrachtung zum Ziel, dass dann die quadratische Gleichung (41.) in der cubischen Gleichung

$$B + 3B_1 m + 3B_2 m^2 + B_3 m^3 = 0$$

als Factor enthalten sein müsse. Setzt man also:

$$B + 3B_1 m + 3B_2 m^2 + B_3 m^3 = (p + qm)(A + 2A_1 m + A_2 m^2),$$

so ergeben sich die Bedingungen:

$$\begin{aligned} B &= pA, \\ 3B_1 &= 2pA_1 + qA, \\ 3B_2 &= pA_2 + 2qA_1, \\ B_3 &= qA_3. \end{aligned}$$

Dies führt durch Elimination der p, q sofort auf die Gleichungen

$$(42.) \qquad \begin{cases} P = B(4A_1^2 - AA_2) - 6B_1 AA_1 + 3B_2 A^2 = 0, \\ Q = 2BA_1 A_2 - 3B_1 AA_2 + B_3 A^2 = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen von Oberflächen vierter und sechster Ordnung, deren Durchschnitt die Doppelcurve vier und zwanzigsten Grades der Fläche $G = 0$ liefert.

Drückt man die Unterdeterminanten von (41.), was sehr leicht ist, durch P und Q aus, so ergiebt sich für G der folgende sehr merkwürdige Ausdruck:

$$(43.) \qquad A^2 . G = A_2 P^2 - 2A_1 QP + AQ^2,$$

welcher die Existenz der Doppelcurve $P = 0$, $Q = 0$ auf der Fläche $G = 0$ durch den blossen Anblick sofort nachweist.

Die Schnittcurve der Flächen $P = 0$, $Q = 0$ hat noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft. Denn da nach (43.) auch

$$A^3 G = (AQ - A_1 P)^2 + (AA_2 - A_1^2) P^2,$$

so zeigt sich, *dass die Schnittcurve* $P=0$, $Q=0$ *mit derjenigen Curve, in der die Fläche* (14.) $AA_2-A_1^2=0$ *die Fläche* $G=0$ *berührt, auf einer einzigen Fläche sechster Ordnung*

$$AQ-A_1P=0$$

enthalten ist.

§. 9.

Schnitt der Fläche $G=0$ mit dem Polartetraeder.

Die dritte Art von Werthsystemen, für welche zwei Wurzelpaare zusammenfallen, bildet mit den aus (32.) bestimmten Systemen zusammen für $n=4$ (was hier statt einer allgemeinen Zahl n allein betrachtet werden mag) den vollständigen Durchschnitt des Polartetraeders mit $G=0$. Derselbe zerfällt also in vier Paare von ebenen Curven, deren immer eine eine Rückkehrcurve der Fläche ist.

Um die zweite Art von Curven zuerst zu bestimmen, hat man neben $\Delta=0$, $\Omega=0$ aus (32.)

$$(44.)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0.$$

Ist daher λ eine Wurzel von $\Delta=0$, so dass Ω in η^2 übergeht, so erhält man ausser der Gleichung $\eta=0$, welche eine Fläche des Polartetraeders darstellt, in (44.) die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung. *Die vier Rückkehrcurven sind also Kegelschnitte.*

Hingegen erhält man die anderen Curven, indem man die Gleichungen. aus denen $G=0$ fliesst:

$$(45.)\qquad \begin{cases} \Delta+m\Omega=0, \\ \dfrac{\partial\Delta}{\partial\lambda}+m\dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0, \\ \dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}+m\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}=0 \end{cases}$$

mit den Gleichungen $\Delta'=0$, $\Omega'=0$ verbindet, wo in den letzteren λ' an die Stelle von λ gesetzt, und λ' von λ verschieden ist. Setzt man sodann

$$\overline{\Delta}=\frac{\Delta-\Delta'}{\lambda-\lambda'},\qquad \overline{\Omega}=\frac{\Omega-\Omega'}{\lambda-\lambda'},$$

so folgen aus den Gleichungen (45.) auch die folgenden:

$$\overline{\Delta}+m\overline{\Omega}=0,$$

$$\frac{\partial\overline{\Delta}}{\partial\lambda}+m\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\lambda}=0,$$

$$\frac{\partial^2\overline{\Delta}}{\partial\lambda^2}+m\frac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2}=0.$$

Diese Gleichungen haben genau den Character derjenigen, durch welche bei $n=3$ die Curve $G=0$ bestimmt wurde; *das Resultat der Elimination ist also eine Fläche sechster Classe, welche von der Ebene* $\eta=0$ *in der fraglichen Curve geschnitten wird.*

Die vier Curven sechster Ordnung, für deren Punkte also zweimal zwei Wurzeln λ zusammenfallen, stehen mit den vier Rückkehrcurven, den oben erhaltenen Kegelschnitten, in einer einfachen Verbindung. Jede der vier Curven sechster Ordnung trifft die drei Rückkehrcurven, welche nicht in ihrer eigenen Ebene liegen, in je zwei Punkten; in den Punkten nämlich, in welchen die Gleichungen

$$(45^a.) \qquad \Delta'=0, \quad \Omega'=0, \quad \Delta=0, \quad \Omega=0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}=0$$

gleichzeitig bestehen. Wegen der Gleichungen $\Omega'=0$, $\Omega=0$ liegen diese Punkte auf den Kanten des Polartetraeders; und weil die Kegelschnitte Rückkehrcurven der Fläche $G=0$ mit den Flächen η als Tangentenebenen sind, *so hat jede der Curven sechster Ordnung auf diese Weise sechs Rückkehrpunkte, deren Tangenten drei Kanten des Polartetraeders sind, und welche zu zwei mal zwei auf den sechs Kegelschnitten liegen.*

Jede der vier Curven sechster Ordnung hat vier Doppelpunkte, wie dies bei $n=3$ für die Curve $G=0$ nachgewiesen wurde; dieselben sind offenbar Durchschnittspunkte der Doppelcurve $P=0$, $Q=0$ mit der entsprechenden Fläche des Polartetraeders. Man sieht dies direct ein, indem man erwägt, dass die Punkte jener Doppelcurve dadurch definirt sind, dass für sie die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta+m\Omega &= 0,\\ \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}+m\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} &= 0,\\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}+m\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} &= 0\end{aligned}$$

durch zwei verschiedene Werthsysteme der λ, m erfüllbar sind; während die hier betrachteten Doppelpunkte ebenderselben Bedingung genügen, unter Hinzunahme der Gleichungen $\Delta'=0$, $\Omega'=0$.

Ebenso gehören zu dem Schnitt einer Fläche des Polartetraeders und der Doppelcurve die 12 Punkte, in welchen sich die betreffende Curve sechster Ordnung mit dem entsprechenden Kegelschnitt trifft. Für diese Punkte nämlich bestehen die Gleichungen (45.) abermals für zwei Werthsysteme λ, m, und

ausserdem noch die Gleichungen $\Delta = 0$, $\Omega = 0$, in denen λ einen der beiden gedachten Werthe selbst annimmt; wodurch die Bedingungen der Doppelcurve zugleich erfüllt sind.

Man kann leicht sehen, dass auf keine andere Weise Schnittpunkte der Doppelcurve mit dem Polartetraeder aufzustellen sind. Sonach würden die Flächen des Tetraeders die Curve $P = 0$, $Q = 0$ vom vier und zwanzigsten Grade nur in 16 Punkten schneiden. Aber dies Dilemma löst sich, wenn man die 12 Schnittpunkte einer Curve sechster Ordnung mit dem betreffenden Kegelschnitt untersucht. Für diese Schnittpunkte bestehen folgende Gleichungen:

$$(46.)\quad \begin{cases} \overline{\Delta} + m\overline{\Omega} = 0, & \Delta' = 0, \\ \dfrac{\partial\overline{\Delta}}{\partial\lambda} + m\dfrac{\partial\overline{\Omega}}{\partial\lambda} = 0, & \Omega' = 0, \\ \dfrac{\partial^2\overline{\Delta}}{\partial\lambda^2} + m\dfrac{\partial^2\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2} = 0, & \dfrac{\partial\Delta'}{\partial\lambda'}\dfrac{\partial^2\Omega'}{\partial\lambda'^2} - \dfrac{\partial\Omega'}{\partial\lambda'}\dfrac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'^2} = 0. \end{cases}$$

Ich werde aus diesen Gleichungen die Schnittpunkte dadurch bestimmen, dass ich die Coefficienten von Ω eliminire, und zu einer cubischen Gleichung für λ gelange, deren Wurzeln, in die obigen Gleichungen eingesetzt, drei Kegelschnitte ergeben, die mit dem gegebenen Kegelschnitt sich in den 12 gesuchten Punkten durchschneiden. Sei zu diesem Ende $\varepsilon = \lambda - \lambda'$; dann ist nach der Definition:

$$\overline{\Delta} + m\overline{\Omega} = \frac{\partial.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'} + \frac{\varepsilon}{1.2}\frac{\partial^2.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^2} + \frac{\varepsilon^2}{1.2.3}\frac{\partial^3.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^3} + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4}\frac{\partial^4.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^4}.$$

Aus dieser identischen Gleichung hat man durch Umkehrung:

$$\frac{\partial.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'} = (\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}) - \frac{\varepsilon}{1}\frac{\partial.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{\partial^2.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2} - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\frac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^3},$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^2} = \frac{\partial.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda} - \frac{\varepsilon}{1}\frac{\partial^2.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^3},$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial^3.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^3} = \frac{\partial^2.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2} - \varepsilon\frac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^2}$$

oder wegen der Gleichungen (46.):

$$(46^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'} = -\dfrac{\varepsilon^3}{6}\dfrac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^3} = -b\varepsilon^3, \\ \dfrac{\partial^2.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^2} = \varepsilon^2.\dfrac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^3} = 6b\varepsilon^2, \\ \dfrac{\partial^3.\Delta' + m\Omega'}{\partial\lambda'^3} = -3\varepsilon.\dfrac{\partial^3.\overline{\Delta} + m\overline{\Omega}}{\partial\lambda^3} = -18b\varepsilon. \end{cases}$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung (46.) ein, indem man derselben die Gestalt giebt:

$$\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda'}\left(\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial \lambda'^2}+m\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \lambda'^2}\right)-\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial \lambda'^2}\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda'}+m\frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda'}\right),$$

so erhält man sofort die cubische Gleichung:

$$0 = \varepsilon^2.\left(\varepsilon\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial \lambda'^2}+6\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda'}\right).$$

Da diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so fallen viermal zwei von den 12 Schnittpunkten zusammen, und man hat den Satz:

Jede der vier Curven sechster Ordnung berührt den ihr entsprechenden Kegelschnitt in vier verschiedenen Punkten, in denen beide auch von der Doppelcurve berührt werden.

Von diesen vier Berührungspunkten ist offenbar jeder als doppelter Schnittpunkt der Polartetraederflächen mit der Doppelcurve aufzufassen. Die andern vier Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Curve sechster Ordnung sind aber, da in ihnen die Doppelcurve nicht den Kegelschnitt tangirt, offenbar Rückkehrpunkte der Doppelcurve und so als dreifache Schnittpunkte zu rechnen, wodurch denn auch die richtige Zahl von Schnittpunkten $4+4.2+4.3=24$ erreicht wird. Und man hat den Satz:

Die Doppelcurve wird von jeder Seitenfläche des Polartetraeders in vier Punkten berührt. Sie hat ausserdem 16 Rückkehrpunkte, deren immer vier in einer Fläche des Polartetraeders liegen, mit dieser Fläche als gemeinsamer Tangentenebene.

§. 10.

Von acht Kegelschnitten, welche auf der Fläche $G=0$ liegen, und den acht Ebenen, in welchen sich dieselben befinden.

Ausser den Rückkehrcurven giebt es noch andere Curven, für deren Punkte *drei* Wurzeln λ zusammenfallen. Dieselben sind durch die Gleichungen (33.) bestimmt, oder dadurch, dass der Ausdruck $\Delta+m\Omega$ für dieselben ein vollständiges Biquadrat wird. Setzen wir also, um diese zu finden:

$$(47.) \qquad \Delta+m\Omega = (p+q\lambda)^4.$$

Es seien λ', λ'', λ''', λ'''' die Wurzeln von $\Delta=0$, und die entsprechenden Werthe von Ω seien η'^2, η''^2, η'''^2, η''''^2. Führt man die angegebenen Werthe für λ in (47.) ein, so hat man sofort:

$$(48.)\quad \left\{\begin{aligned} \eta'\sqrt{m} &= (p+q\lambda')^2,\\ \eta''\sqrt{m} &= (p+q\lambda'')^2,\\ \eta'''\sqrt{m} &= (p+q\lambda''')^2,\\ \eta''''\sqrt{m} &= (p+q\lambda'''')^2, \end{aligned}\right.$$

wo für die Vorzeichen der η alle beliebige Combinationen gewählt werden können. Die Elimination von p^2, $2pq$, q^2 aus den Gleichungen (48.) führt dann zunächst auf die Gleichung:

$$(49.)\quad \begin{vmatrix} \eta' & 1 & \lambda' & \lambda'^2\\ \eta'' & 1 & \lambda'' & \lambda''^2\\ \eta''' & 1 & \lambda''' & \lambda'''^2\\ \eta'''' & 1 & \lambda'''' & \lambda''''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche, indem man den η alle möglichen Vorzeichen ertheilt, acht verschiedene Ebenen darstellt, in welchen die betreffenden Punkte acht verschiedene Curven bilden. Bezeichnet man ferner durch i, k, h irgend drei der Indices 1, 2, 3, 4, so bildet man aus (48.) leicht auch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\eta^{(i)}} & 1 & \lambda^{(i)}\\ \sqrt{\eta^{(k)}} & 1 & \lambda^{(k)}\\ \sqrt{\eta^{(h)}} & 1 & \lambda^{(h)} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{(i)2}(\lambda^{(k)}-\lambda^{(h)})^4-2\eta^{(k)}\eta^{(h)}(\lambda^{(i)}-\lambda^{(k)})^2(\lambda^{(i)}-\lambda^{(h)})^2\\ +&\eta^{(k)2}(\lambda^{(h)}-\lambda^{(i)})^4-2\eta^{(h)}\eta^{(i)}(\lambda^{(k)}-\lambda^{(h)})^2(\lambda^{(k)}-\lambda^{(i)})^2\\ +&\eta^{(h)2}(\lambda^{(i)}-\lambda^{(k)})^4-2\eta^{(i)}\eta^{(k)}(\lambda^{(h)}-\lambda^{(i)})^2(\lambda^{(h)}-\lambda^{(k)})^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung, welcher seine Spitze in einer Ecke des Polartetraeders hat ($\eta^{(i)}=0$, $\eta^{(k)}=0$, $\eta^{(h)}=0$), und welcher durch alle Punkte hindurchgeht, welche in zweien der Ebenen (49.) liegen: denjenigen nämlich, die nur durch das Vorzeichen des vierten η unterschieden sind. So hat man den Satz:

Ausser den Rückkehrcurven existiren auf der Fläche $G=0$ noch acht Kegelschnitte, für deren Punkte drei Wurzeln λ zusammenfallen; von den acht Ebenen derselben schneiden sich viermal zwei in jeder Fläche des Tetraeders, und die in zwei solchen Flächen enthaltenen Kegelschnitte liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze die gegenüberliegende Ecke des Tetraeders ist, so dass von jeder Ecke des Tetraeders

vier Kegel ausgehen, und dass jeder Kegelschnitt in vier Kegeln enthalten ist, deren Spitzen in den vier verschiedenen Ecken des Tetraeders liegen.

Die gegenseitige Lage der acht Ebenen ist dadurch ausgesprochen, dass sie sämmtlich in dem Schema

$$\pm E' \pm E'' \pm E''' \pm E'''' = 0$$

enthalten sind, wo die E lineare Ausdrücke in den x bedeuten und von den η nur durch constante Factoren verschieden sind. Die gegenseitige Abhängigkeit solcher acht Ebenen kann man sich auf folgende Art versinnlichen. Gehe man von irgend einer der acht Ebenen aus und betrachte die vier Geraden, in welchen sie die Seiten des Tetraeders schneidet. Durch eine solche Gerade führe man eine Ebene, welche zugleich durch die gegenüberliegende Tetraederecke geht. Zu den drei Ebenen, welche durch diese Gerade gehen, suche man die vierte harmonische; die vier Ebenen, zu welchen man auf diese Weise gelangt, gehören ebenfalls dem System an. Sodann verbinde man die Schnittpunkte der erstgedachten Ebene mit zwei gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders durch eine Gerade, und lege durch dieselbe zwei Ebenen, deren jede durch eine jener beiden Tetraederkanten hindurchgeht. Auf diese Weise hat man drei Gerade, durch deren jede drei Ebenen gehen; sucht man wieder jedesmal die vierte harmonische, so erhält man die drei Ebenen, welche das System vervollständigen.

Diese acht Ebenen haben eine merkwürdige allgemeine Bedeutung. Man kann nämlich offenbar die Gleichung (49.) als die Bedingung dafür betrachten, dass die Gleichung $\Delta + m\Omega = 0$ zwei Paar gleicher Wurzeln besitze. In der That hat man dann

$$(50.) \qquad \Delta + m\Omega = (p + 2q\lambda + r\lambda^2)^2,$$

woraus sich ganz auf dem oben benutzten Wege die Gleichung (49.) ableiten lässt. Es war aber jede Doppelwurzel dieser Gleichung eine Wurzel der Gleichung

$$\Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \Omega \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0.$$

Auf diese Weise hat man also zwei Wurzeln dieser Gleichung, welche demselben m entsprechen, oder mit anderen Worten, die transformirte Gleichung in m besitzt zwei gleiche Wurzeln, ohne dass die gegebene Gleichung deren hat. Und so ergiebt sich das Theorem:

Für alle Punkte der acht Ebenen (49.) *ist das Problem algebraisch lösbar, indem zwei Wurzeln m in* (13.) *gleich werden, ohne dass die entsprechenden λ einander gleich sind.*

Die acht Kegelschnitte haben in ihrer gegenseitigen Lage noch weitere Besonderheiten. Betrachten wir zwei der acht Ebenen, welche sich in einer Ebene η schneiden. Da die auf ihnen liegenden Kegelschnitte einem Kegel angehören, so folgt sofort, dass beide Kegelschnitte sich in zwei Punkten schneiden, welche in der betreffenden Ebene η liegen. Aber bestimmt man ihre Coordinaten aus (48.), indem man dasjenige η verschwinden lässt, durch dessen Vorzeichen allein die Gleichungen beider Ebenen sich unterscheiden, so ergeben sich für die anderen η aus (48.) eindeutige Verhältnisse. Beide Schnittpunkte fallen also zusammen, und man hat den Satz:

Von den acht Kegelschnitten berühren sich viermal zwei in jeder Tetraederseite, so dass jeder Kegelschnitt sämmtliche Flächen berührt.

Die vier Berührungspunkte, welche so auf jeder Tetraederseite entstehen, sind dieselben, in welchen die entsprechende Curve sechster Ordnung den mit ihr in einer Ebene liegenden Rückkehrkegelschnitt berührt. Denn in der That folgt aus den Gleichungen (46.) und (46ª.), wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, wie für jene Punkte geschehen muss, dass gleichzeitig:

$$\Delta' = 0, \quad \Omega' = 0, \quad \frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda'} + m\frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda'} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial \lambda'^2} + m\frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \lambda'^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Delta'}{\partial \lambda'^3} + m\frac{\partial^3 \Omega'}{\partial \lambda'^3} = 0,$$

was in der That auch zeigt, dass jene Punkte den acht Kegelschnitten angehören, indem sie die Bedingungen (33.) erfüllen.

Diese Gleichungen aber sind zugleich keine anderen als die Gleichungen (37.) 1. Auch folgt sofort, dass jene Gleichungen keine anderen Punkte darstellen können; denn denkt man sich eine Wurzel von $\Delta' = 0$ in die übrigen Gleichungen eingesetzt, so erhält man aus $\Omega' = 0$ die Gleichungen $\eta' = 0$, und die anderen bestimmen auf lineare Weise die Verhältnisse von a, a_1, a_2 oder zwei Kegelschnitte. In jeder Ebene η liegen also nur vier Punkte dieser Art; und so hat man den Satz:

Es giebt 16 Punkte, für welche vier Lösungen des Problems zusammenfallen. Von denselben liegen je vier in jeder Seite des Tetraeders, und sie sind die Berührungspunkte jedes Rückkehrkegelschnitts mit der betreffenden Curve sechster Ordnung.

Man überzeugt sich leicht, dass wirklich auch in diesen Punkten die Kegelschnitte mit den Rückkehrcurven eine Berührung haben. Bestimmt man nämlich die Richtung des Elements, so findet sich, mit Beibehaltung der in

§. 7 angewandten Bezeichnungen, für die Rückkehrcurven aus (32.):

$$\delta\Omega = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\,\delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} - \delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = 0;$$

für die Kegelschnitte aber aus (33.):

$$\delta\Omega + \Omega\,dm = 0, \quad \delta\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\,dm = 0, \quad \delta\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\,dm = 0,$$

was für $\Omega = 0$ mit den obigen Gleichungen identisch wird. Man hat also den weiteren Satz:

Die vier Geraden, in denen sich auf einer Tetraederseite immer zwei der acht Ebenen schneiden, und immer zwei der acht Kegelschnitte berühren, sind Tangenten der Rückkehrcurve in den Berührungspunkten derselben mit der betreffenden Curve sechster Ordnung und mit der Doppelcurve.

§. 11.

Punkte, für welche dreimal zwei, und Punkte, für welche zwei und drei Lösungen zusammenfallen. Schnitt der acht Ebenen mit der Fläche $G = 0$.

Diejenigen Punkte, in welchen dreimal zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfallen, liegen nothwendig auf der Fläche $G = 0$ oder auf dem Polartetraeder. Wenn sie nur auf der ersteren Fläche liegen sollen, und nicht auf dem letzteren, so muss auch die Gleichung in m drei Paar gleicher Wurzeln zulassen. Da nun die gleichen Wurzeln, welche Punkten der Fläche $G = 0$ entsprechen, überhaupt aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

$$A + 2A_1 m + A_2 m^2 = 0,$$
$$B + 3B_1 m + 3B_2 m^2 + B_3 m^3 = 0$$

gefunden wurden, so könnte dies auf dreifache Weise nur dann geschehen, wenn sämmtliche Coefficienten der ersten Gleichung Null wären. Da aber unter denselben sich der constante Coefficient A befindet, so tritt dies im Allgemeinen nicht ein. Die betreffenden Punkte müssen also auf dem Polartetraeder liegen, und sind also entweder die Ecken desselben, für welche in der That drei Wurzeln von $\Delta = 0$ Doppelwurzeln der Gleichung sechsten Grades sind, oder die Schnittpunkte seiner Kanten mit $G = 0$, oder endlich die Schnittpunkte seiner Flächen mit der Doppelcurve. Inzwischen schneiden nach dem Vorigen die Kanten des Tetraedes die Fläche $G = 0$ nicht, sondern berühren sie in je vier Punkten dreipunktig; und es ist oben gezeigt, dass diese Punkte durch die Gleichungen (45^a.) definirt werden, so dass für dieselbe eine Wurzel von $\Delta = 0$ Doppelwurzel, eine andere eine dreifache wird. In

diesen Punkten sind also nicht dreimal zwei Wurzeln gleich, sondern einmal zwei und einmal drei. So bleiben nur die Schnittpunkte der Flächen mit der Doppelcurve übrig. Hier sind wieder die Punkte auszuschliessen, in welchen die Doppelcurve von den Tetraederflächen berührt wird, und für welche nach dem Vorigen vier Wurzeln des Problems zusammenfallen; ebenso die Punkte, in welchen die Rückkehrcurven von den entsprechenden Curven sechster Ordnung geschnitten werden, und für welche nach den Gleichungen (46.), λ und λ' verschieden angenommen, eine Doppelwurzel neben einer dreifachen auftritt. Es bleiben also nur die Doppelpunkte der Curven sechster Ordnung übrig; und dies giebt den Satz:

Es giebt 20 Punkte, für die dreimal zwei Lösungen des Problems zusammenfallen. Vier dieser Punkte sind die Ecken des Tetraeders; die übrigen liegen zu vier auf den vier Flächen desselben, und sind die Doppelpunkte der Curven sechster Ordnung.

In diesen Betrachtungen ist man endlich bereits auf die letzte Classe von besondern Punkten geführt worden, welche hier zu behandeln ist, für die nämlich einmal zwei, und ausserdem noch drei Lösungen des Problems zusammenfallen. Diese Punkte liegen einerseits nothwendig auf den Rückkehrcurven oder auf einem der acht Kegelschnitte; andererseits nothwendig auf der Doppelcurve oder auf den Curven sechster Ordnung oder auf den Tetraederkanten. Geht man indessen diese Combinationen durch, so findet sich, dass hieher nur die oben erwähnten Punkte gehören können, in denen die Rückkehrcurven, die Curven sechster Ordnung, die Kegelschnitte und die Doppelcurve sich berühren, sowie ausserdem etwaige andere Durchschnitte der Doppelcurve mit den acht Kegelschnitten. Solche Durchschnittspunkte müssen wirklich existiren. Denn jede der acht Ebenen schneidet die Fläche $G=0$ noch in einer weiteren Curve; und die Durchschnittspunkte derselben mit dem Kegelschnitt müssen auf der Doppelcurve liegen.

Um sich diese Verhältnisse deutlich zu machen, kann man folgenden Weg einschlagen. Aus (50.) erhält man, für verschiedene der acht Ebenen nur verschiedene Vorzeichen der Quadratwurzeln gesetzt, folgende Gleichungen, aus denen die Gleichung (49.) sofort durch Elimination hervorgeht:

$$\begin{aligned}
\eta'\sqrt{m} &= p+2q\lambda'+r\lambda'^2,\\
\eta''\sqrt{m} &= p+2q\lambda''+r\lambda''^2,\\
\eta'''\sqrt{m} &= p+2q\lambda'''+r\lambda'''^2,\\
\eta''''\sqrt{m} &= p+2q\lambda''''+r\lambda''''^2.
\end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen kann man p, q, r als die Coordinaten eines Punktes in einer der acht Ebenen ansehen, bezogen auf ein in jener Ebene liegendes Coordinatensystem. Untersuchen wir nun den Schnitt einer solchen Ebene mit $G=0$. Zunächst erhält man den betreffenden Kegelschnitt, wenn der Ausdruck $(p+2q+r\lambda^2)^2$ ein Biquadrat wird, also wenn

$$(51.) \qquad pr-q^2=0=D.$$

Dies ist daher die Gleichung des Kegelschnitts selbst. Die Linien $p=0$, $q=0$ sind Tangenten desselben, $q=0$ die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte. Aus der identischen Gleichung

$$(p+2q\lambda+r\lambda^2)(p+2q\mu+r\mu^2)-(p+q(\lambda+\mu)+r\lambda\mu)^2 = (pr-q^2)(\lambda-\mu)^2$$

folgt sofort, dass der Kegelschnitt auch von den vier Geraden berührt wird, in denen seine Ebene die Tetraederebenen schneidet; wie oben anders gezeigt wurde.

Im Allgemeinen findet man den Schnitt der betrachteten Ebene mit $G=0$, wenn man die Forderung stellt, dass für einen gewissen Werth von m' die Gleichung

$$(52.) \qquad \Delta+m'\Omega = 0$$

drei gleiche Wurzeln haben solle. Nach dem Obigen ist für die betrachtete Ebene identisch

$$\Delta+m\Omega = (p+2q\lambda+r\lambda^2)^2;$$

und dadurch geht (52.) über in

$$(53.) \qquad \Delta+3z(p+2q\lambda+r\lambda^2)^2 = 0,$$

wenn man $3z=\frac{m'}{m-m'}$ setzt. Sollen drei Wurzeln dieser Gleichung gleich sein, so müssen beide Invarianten derselben verschwinden. Da nun die Coefficienten der Gleichung sind:

$$b+3zp^2,\quad b'+3zpq,\quad b''+z(pr+2q^2),\quad b'''+3zqr,\quad b''''+3zr^2,$$

so sind die betreffenden Invarianten:

$$(54.)\quad \begin{cases} i = (b+3zp^2)(b''''+3zr^2)-4(b'+3zpq)(b'''+3zqr)+3(b''+z(pr+2q^2))^2, \\ j = \begin{vmatrix} b+3zp^2 & b'+3zpq & b''+z(pr+2q^2) \\ b'+3zpq & b''+z(pr+2q^2) & b'''+3zqr \\ b''+z(pr+2q^2) & b'''+3zqr & b''''+3zr^2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

oder

$$(55.) \qquad \begin{cases} i = \mathrm{A}+2\mathrm{A}_1z+\mathrm{A}_2z^2, \\ j = \mathrm{B}+3\mathrm{B}_1z+3\mathrm{B}_2z^2+\mathrm{B}_3z^3, \end{cases}$$

wo:

$$(56.)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = bb''''-4b'b'''+3b''^2 = A, \\ 2\mathrm{A}_1 = 3[br^2-4b'qr+2b''(pr+2q^2)-4b'''pq+b''''p^2] = 3M, \\ \mathrm{A}_2 = 12(pr-q^2)^2 = 12D^2, \\ \mathrm{B} = bb''b''''+2b'b''b'''-bb'''^2-b''''b'^2-b''^3 = B, \\ 3\mathrm{B}_1 = -3\begin{vmatrix} b & b' & b'' & p \\ b' & b'' & b''' & q \\ b'' & b''' & b'''' & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} + (pr-q^2).A = -3\Theta+AD, \\ 3\mathrm{B}_2 = 3DM, \quad \mathrm{B}_3 = 9D^3. \end{cases}$$

Mit Einführung der Formen M, Θ ergeben sich also folgende Ausdrücke für die Gleichungen $i=0$, $j=0$:

$$(57.)\quad \begin{cases} i = A+3Mz+12D^2z^2 = 0, \\ j = B+(AD-3\Theta)z+3DMz^2+9D^3z^3 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen z (nach der gewöhnlichen Methode, ohne auf die besondere Beschaffenheit der Coefficienten Rücksicht zu nehmen), so erhält man die gesuchte Gleichung des Schnitts:

$$D^2.\begin{vmatrix} A^2D-3A\Theta-3BM & 3ADM-12BD^2 & 9D^3A \\ 4B & AD-12\Theta & 3DM \\ A & 3M & 12D^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Den zweiten Factor erhält man in besserer Gestalt, wenn man auf die Beschaffenheit der letzten Coefficienten Rücksicht nimmt, und zunächst die quadratische Gleichung

$$(58.)\quad 4j-3Di = 4B+(AD-12\Theta)z+3DMz^2 = 0$$

bildet. Aus dieser Gleichung und $i=0$ folgt dann:

$$0 = D.[4(12BM-A^2D+12A\Theta).(4AD^2-48D\Theta-3M^2)-D.(16BD-AM)^2],$$

so dass die vollständige Gleichung des Schnitts ist:

$$0 = D^3.\psi,$$

wo $\psi=0$ die folgende Curve sechster Ordnung bedeutet:

$$(59.)\quad \psi = 0 = 4(12BM-A^2D+12A\Theta)(4AD^2-48D\Theta-3M^2)-D(16BD-AM)^2.$$

Dies führt sofort zu folgendem merkwürdigen Satz:

Jede der acht Ebenen berührt die Fläche $G=0$ längs des in ihr liegenden Kegelschnitts, und diese Berührung ist von der zweiten Ordnung.

Setzt man in (59.) $D=0$, so erhält man:

$$0 = M^2(BM+A\Theta).$$

Dies zeigt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die Curve sechster Ordnung, welche mit jedem Kegelschnitt in einer Ebene liegt, berührt denselben in vier Punkten und schneidet ihn in vier anderen.

Die ersten vier Punkte liegen auf $M=0$. Man sieht leicht, dass dies die vier Punkte sind, in denen auch das Tetraeder berührt wird; denn $M=0$ wird durch die Annahme $\frac{p}{q}=\frac{q}{r}=-\lambda^{(i)}$ identisch erfüllt. Die letzteren vier Punkte aber geben den Satz:

Es giebt 72 Punkte, für welche einmal zwei und einmal drei Wurzeln des Problems zusammenfallen. Dies sind erstlich die 24 Punkte, in welchen die auf den Tetraederflächen gelegenen Curven sechster Ordnung von den Tetraederkanten berührt werden; zweitens die 16 Punkte, in denen jene Curven sich mit den entsprechenden Rückkehrkegelschnitten durchschneiden; drittens die 32 Punkte, in denen die acht Berührungskegelschnitte von den in ihren Ebenen liegenden Curven geschnitten werden.

Die letzteren Punkte kann man noch auf folgende andere Weise finden. Für dieselben bestehen wegen der Kegelschnitte, auf denen sie liegen, die Gleichungen:

$$(60.)\quad \Delta+m\Omega=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}+m\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}=0,\quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial\lambda^2}+m\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}=0,\quad \frac{\partial^3\Delta}{\partial\lambda^3}+m\frac{\partial^3\Omega}{\partial\lambda^3}=0;$$

ausserdem aber wegen der Doppelcurve noch die Gleichungen

$$(61.)\quad \Delta'+m'\Omega'=0,\quad \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda'}+m'\frac{\partial\Omega'}{\partial\lambda'}=0,\quad \frac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'^2}+m'\frac{\partial^2\Omega'}{\partial\lambda'^2}=0,$$

wo m', λ' von m, λ verschieden sind. Inzwischen folgen aus (60.) für jeden Werth von λ' die Gleichungen:

$$\Delta'+m\Omega'=(\Delta+m\Omega)+\frac{\lambda'-\lambda}{1}\frac{\partial(\Delta+m\Omega)}{\partial\lambda}+\cdots=(\lambda'-\lambda)^4.b,$$

$$\frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda'}+m\frac{\partial\Omega'}{\partial\lambda'}=4.(\lambda'-\lambda)^3.b,\qquad \text{etc.}$$

Dies in die Gleichungen (61.) eingeführt, giebt, wenn man $\frac{m'b}{m-m'}=\varkappa$ setzt:

$$(62.)\qquad \begin{cases} \Delta' + \varkappa(\lambda'-\lambda)^4 = 0, \\ \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda'} + 4\varkappa(\lambda'-\lambda)^3 = 0, \\ \frac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'^2} + 12\varkappa(\lambda'-\lambda)^2 = 0, \end{cases}$$

und daher:

$$4\Delta'\frac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'^2} - 3\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda'}\right)^2 = 0.$$

Wenn man für λ' wieder $\frac{\lambda'}{\mu'}$ einführt, so verwandelt sich dies in

$$\frac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta'}{\partial\mu'^2} - \left(\frac{\partial^2\Delta'}{\partial\lambda'\partial\mu'}\right)^2 = 0.$$

Es ist also $\frac{\lambda'}{\mu'}$ *eine Wurzel der Determinante von* Δ. Hat man die vier Wurzeln dieser Gleichung gefunden, so findet sich aus (62.) λ und aus (60.) oder (61.) die Verhältnisse von a, a', a'', a'''. Man erhält also jedem λ' entsprechend 8 Punkte, welche sich als die Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung darstellen. An Stelle einer dieser Oberflächen kann man auch die passenden der acht Ebenen E treten lassen.

Die Curven sechster Ordnung, welche in den Ebenen der acht Kegelschnitte liegen, haben immer je vier Doppelpunkte. Dieselben findet man leicht aus (59.); indem man nämlich die beiden quadratischen Gleichungen (57.), (58.) der Bedingung unterwirft, *zwei* gemeinsame Wurzeln zuzulassen, erhält man die Bedingungen:

$$4B : A = AD - 12\Theta : 3M = M : 4D$$

oder

$$16BD - AM = 0, \quad A^2D - 12A\Theta - 12MB = 0, \quad 4AD^2 - 48\Theta D - 3M^2 = 0.$$

Es verschwinden also sämmtliche eingeklammerte Grössen in ψ, und jedes Glied desselben enthält zwei verschwindende Factoren. Man erhält demnach vier Doppelpunkte in den Durchschnittspunkten der beiden Kegelschnitte:

$$16BD - MA = 0, \qquad A^2D - 12\Theta A - 12MB = 0.$$

Dieselben vervollständigen das Punktsystem, in welchem jede der acht Ebenen die Doppelcurve trifft. Von solchen 24 Punkten fallen viermal zwei in die Berührungspunkte mit den Rückkehrcurven zusammen; vier weitere sind die Schnittpunkte jedes Kegelschnitts mit der entsprechenden Curve sechster Ordnung; die letzten sind die Doppelpunkte der letzteren Curven. Aber die ersteren vier sind dreifach zu rechnen, da die Ebene in den Kegelschnitten die Fläche,

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

mithin auch die Doppelcurve in jenen Punkten dreipunktig berührt; so dass dann die Zahl 24 wirklich erreicht wird.

Weitere bemerkenswerthe Punkte dieser Curven sechster Ordnung, welche man leicht findet, sind die, in welchen sie die in den Tetraederflächen liegenden Curven sechster Ordnung treffen. Diese liegen zugleich immer auf der gemeinsamen Tangente beider Curven, welche den Schnitt einer der acht Ebenen mit einer Tetraederfläche bildet. Es giebt derselben offenbar vier zwischen jeder Curve sechster Ordnung der einen und jeder der anderen Art.

§. 12.

Von dem Kegel zweiter Ordnung, auf welchem die von x nach den 6 Punkten X gezogenen Geraden liegen.

Ich komme noch auf eine allgemeine Eigenschaft, welche den Lösungen des zuletzt behandelten Problems zukommt.

Die sechs Geraden, welche von dem Punkte x nach den sechs Punkten X, den Lösungen des Problems, gezogen werden, liegen immer in einem Kegel zweiter Ordnung *).

In der That, da für die Punkte X die Gleichungen statt finden:

$$\lambda U_i + \mu V_i = v_i,$$

so genügen jene Punkte offenbar der Gleichung:

$$(63.) \qquad K = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & u_1 & v_1 \\ U_2 & V_2 & u_2 & v_2 \\ U_3 & V_3 & u_3 & v_3 \\ U_4 & V_4 & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Oberfläche zweiter Ordnung, auf welcher sämmtliche Punkte X liegen. Aber setzt man $X = x$, so werden zweimal zwei Reihen der Determinante K einander gleich, und also verschwindet nicht blos K sondern auch dessen Differentialquotienten. Die Gleichung $K = 0$ stellt also einen Kegel dar, dessen Spitze in x liegt, was zu beweisen war.

Der gedachte Kegel geht durch die Ecken des Polartetraeders.

Denn rückt X in eine solche Ecke, so wird nach der Definition jener Punkte

$$\lambda U_i + \mu V_i = 0,$$

---

*) Für das Normalenproblem ist dieser Satz von *Terquem* gegeben. Vergleiche dieses Journal Bd. 49, p. 346.

wo $\frac{\lambda}{\mu}$ eine Wurzel von $\Delta = 0$ bedeutet. Es werden also zwei Reihen von K proportional und K verschwindet.

Rückt x auf einer Geraden fort, welche nach einer Ecke des Tetraeders gerichtet ist, so schneiden die entsprechenden Kegel die gegenüberliegende Seite des Tetraeders in ein und demselben Kegelschnitt, und eine gewisse durch jene Ecke gehende Ebene ist gemeinsame Tangentenebene derselben.

Bezeichnet man durch $\overline{x}$ eine Tetraederecke, so hat man, um aus K das angeführte Kegelsystem zu finden, nur $x+\varrho\overline{x}$ an Stelle von x zu setzen, wo ϱ eine beliebige Grösse ist. Der Ausdruck $K=0$ nimmt dann folgende Gestalt an, in welcher der Kürze wegen nur immer *eine* Reihe der Determinanten hingeschrieben ist:

$$0 = |U_i, V_i, u_i, v_i| + \varrho.\{|U_i, V_i, u_i, \overline{v_i}| + |U_i, V_i, \overline{u_i}, v_i|\} + \varrho^2.|U_i, V_i, \overline{u_i}, \overline{v_i}|.$$

Aber der letzte Term verschwindet wegen der die Tetraederecke definirenden Gleichungen

$$(64.) \qquad \lambda\overline{u_i} + \mu\overline{v_i} = 0.$$

Es schneiden sich also sämmtliche Kegel des Systems in derselben Curve, der Schnittcurve der Flächen, welche man erhält, indem man den ersten Term und den Coefficienten von ϱ gleichzeitig verschwinden lässt. Nimmt man nun die Gleichung in der ursprünglichen Form:

$$(65.) \qquad 0 = |U_i, V_i, u_i + \varrho\overline{u_i}, v_i + \varrho\overline{v_i}|,$$

multiplicirt die einzelnen Reihen der Determinante mit $\overline{x_i}$ und addirt, so erhält man die Reihe:

$$\Sigma U_i\overline{x_i}, \quad \Sigma V_i\overline{x_i}, \quad \Sigma u_i\overline{x_i} + \varrho\Sigma\overline{u_i}\,\overline{x_i}, \quad \Sigma v_i\overline{x_i} + \varrho\Sigma\overline{v_i}\,\overline{x_i}$$

oder

$$\Sigma\overline{u_i}X_i, \quad \Sigma\overline{v_i}X_i, \quad \Sigma\overline{u_i}(x_i + \varrho\,\overline{x_i}), \quad \Sigma\overline{v_i}(x_i + \varrho\,\overline{x_i}).$$

In der Tetraederfläche, welche $\overline{x}$ gegenüberliegt, und welche zugleich die Polare dieses Punktes für u und v ist, verschwinden die ersten beiden Terme; die anderen beiden kann man durch passende Wahl von ϱ wegen der Gleichungen (64.) ebenfalls gleichzeitig verschwinden machen. Führt man also diesen Werth von ϱ in (65.) ein, so zerfällt der Kegel in zwei Ebenen, deren eine die Gleichung

$$\Sigma\overline{u_i}X_i = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\overline{v_i}X_i = 0$$

hat und also eine Tetraederseite ist, und eine andere, welche, wie man leicht

a priori schliesst, nur die Ebene sein kann, welche durch x und die Tetraederecke gehend, die Schnittcurve der Tetraederfläche mit $K=0$ berührt. Oder vielmehr, da diese Schnittcurve nothwendig einen Theil des gemeinsamen Durchschnitts jenes Kegelsystems ausmacht, kann der Rest jenes Durchschnitts nur in der doppelt gerechneten Geraden bestehen, in welcher die andere Ebene das Kegelsystem dann nothwendig berührt.

Im Problem der Normalen liegen also die sechs an eine Fläche zweiter Ordnung gezogenen Normalen in einem Kegel, welcher durch den Mittelpunkt geht und drei den Hauptaxen parallele Kanten hat; welcher also zu jenen Kegeln gehört, die unendlich viele Systeme von drei auf einander senkrechten Kanten enthalten. Rückt die Spitze dem Anfangspunkte in gerader Linie zu, so bleibt der Kegel sich immer parallel; rückt die Spitze einer Hauptaxe parallel fort, so geht der Kegel immer durch einen gewissen in der entsprechenden Hauptebene liegenden Kegelschnitt.

Ich bemerke noch, dass in diesem Falle niemals reelle Rotationskegel existiren, wohl aber imaginäre, deren Spitzen einen imaginären Kegel sechster Ordnung beschreiben.

Der Kegel (63.) zerfällt, wie man leicht sieht, in zwei Ebenen nur dann, wenn x in einer Tetraederfläche liegt.

§. 13.

Ausnahmsfälle.

Im Vorigen sind überall *allgemeine* Resultate entwickelt, welche in bestimmten Fällen, d. h. bei besonderen Eigenschaften von u, v Modificationen erheischen. Der erste hier zu erwähnende Fall ist der, wo $b=0$, *wo also die Fläche* $u=0$ *in einen Kegel übergeht.* Dieser Fall ist dadurch von grosser Bedeutung, dass er die oben für $n=3$ angestellten Betrachtungen zu wiederholen gestattet, und zwar in eleganterer Form, wodurch sie deutlicher hervortreten. Da Δ hier von der dritten Ordnung ist, werde ich dieser Function die Form geben:

$$\Delta = c\lambda^3+3c'\lambda^2\mu+3c''\lambda\mu^2+c'''\mu^3,$$

während

$$\Omega = a\lambda^3+3a'\lambda^2\mu+3a''\lambda\mu^2+a'''\mu^3.$$

Der Gleichung des Problems kann man nun sofort die Gestalt geben:

$$0=\tfrac{1}{9}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}-\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\right)=\begin{vmatrix} c\lambda^2+2c'\lambda\mu+c''\mu^2 & c'\lambda^2+2c''\lambda\mu+c'''\mu^2 \\ a\lambda^2+2a'\lambda\mu+a''\mu^2 & a'\lambda^2+2a''\lambda\mu+a'''\mu^2 \end{vmatrix},$$

und die erste Invariante derselben wird, wie man leicht findet:

$$i = (ca''' - 3c'a'' + 3c''a' - c'''a)^2 = h^2,$$

wodurch der Satz bewiesen ist:

Wenn man aus zwei homogenen Functionen dritter Ordnung mit zwei Veränderlichen die Determinante bildet, so ist die erste Invariante der entstehenden Function vierter Ordnung das vollständige Quadrat einer simultanen Invariante der gegebenen Functionen, welche für die Coefficienten einer jeden von der ersten Ordnung ist.

Man findet sodann durch die in §. 5 angestellten Schlüsse für die zweite Invariante j und die Fläche G die Formen:

$$\alpha h^3 + \beta j = H^2, \quad 2\beta j = H^2 - G,$$
$$\alpha h^3 - \beta j = G, \qquad G = H^2 - 2\alpha h^3,$$

wo α, β constante Zahlen bedeuten, und wo $H^2 = 0$ die Eliminationsgleichung aus $\Delta = 0$, $\Omega = 0$ ist, nachdem man Δ auf die oben angeführte Form dritter Ordnung reducirt hat. Dies bedeutet, dass man von den Ecken des zu u, v gehörigen Tetraeders diejenige ausschliesst, welche in die Spitze des Kegels $u = 0$ selbst fällt. Es stellt also H das Product der Ebenen dar, welche durch diese Spitze und die anderen Tetraederecken gehen.

In dem vorliegenden Falle fallen offenbar für jeden Punkt zwei Lösungen des Problems zusammen, und zwar entsprechen sie den Werthen $\mu = 0$ oder $\lambda = \infty$. Hieraus folgt, dass die Gleichungen (1.) für dieselben in $U_i = 0$ übergehen; dass also der Punkt X die Spitze von $u = 0$ ist. So darf man diese Lösung ganz übergehen und sagen, *das Problem lasse immer nur vier Lösungen zu.*

Von diesen fallen zwei zusammen, wenn x auf den durch die Kegelspitze gehenden Seiten des Tetraeders liegt, oder auf der Fläche $G = 0$, welche vom sechsten Grade ist.

Die Fläche $G = 0$, welche der Form ihrer Gleichung nach vollständig mit der oben behandelten Curve $G = 0$ übereinstimmt, besitzt, nach dem, was über diese Curve oben gezeigt ist:

drei Rückkehrkegelschnitte, welche durch den Schnitt der Fläche zweiter Ordnung $h = 0$ mit den erwähnten Tetraederflächen gebildet werden und deren Tangentenebenen diese Flächen sind;

eine Doppelcurve, entsprechend den oben gefundenen vier Doppelpunkten, und welche demgemäss die Schnittcurve von zwei Oberflächen zweiter Ordnung ist.

Ausser dieser Fläche ist noch von Wichtigkeit diejenige, für deren Punkte neben den oben erwähnten eine dritte Wurzel λ unendlich wird. Die Gleichung dieser Fläche ist offenbar $0 = \Sigma\Sigma v_i v_k U_{ik}$, durch U_{ik} die Unterdeterminanten der Determinante von u bezeichnet. Aber die U_{ik} sind, da u ein Kegel, nichts Anderes als die Quadrate und Producte der Coordinaten seiner Spitze; sind die letzteren ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, so geht demnach die Fläche in $\Sigma v_i \varepsilon_i = 0$ über, d. h. in die vierte Ebene des Tetraeders. —

Der zweite bemerkenswerthe Fall tritt ein, wenn $A = 0$, d. h. *wenn das anharmonische Verhältniss der Wurzeln von* $\Delta = 0$ *einer imaginären dritten Wurzel aus* -1 *gleich wird.* In diesem Fall reduciren sich die Gleichungen, aus denen $G = 0$ durch Elimination entspringt, auf

$$i = m(2A_1 + A_2 m) = 0, \qquad j = B + 3B_1 m + 3B_2 m^2 + B_3 m^3 = 0,$$

und es wird also:

$$G = BA_2^3 - 6B_1 A_1 A_2^2 + 12B_2 A_1^2 A_2 - 8B_3 A_1^3 = 0.$$

Diese Fläche enthält statt der Doppelcurve eine dreifache Curve $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, *von der achten Ordnung;* sie ist der Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer Fläche vierter Ordnung. Hienach modificiren sich unter Anderem die Curven sechster Ordnung, welche auf den acht Ebenen liegen; die Gleichung einer solchen wird aus (59.)

$$DM\Theta - \frac{M^3}{16} - \frac{BD^3}{9} = 0.$$

Diese Curve hat vier Doppelpunkte im Schnitt von $D = 0$, $M = 0$, und die beiden Zweige werden von diesen Kegelschnitten in der zweiten Ordnung berührt. —

Die Bedingung $B = 0$ scheint keine bemerkenswerthen Besonderheiten mit sich zu führen. Die Bedingung $A^3 - 27B^2 = 0$, unter welcher die Gleichung $\Delta = 0$ eine Doppelwurzel hat, führt zunächst den Umstand mit sich, dass die Gleichungen (3.), (13.) sich auf den fünften Grad reduciren. Insbesondere wichtig aber ist der Fall, wo für die Doppelwurzel sämmtliche Unterdeterminanten von Δ verschwinden, mithin auch Ω; es ist dies der Fall, welcher dem Problem der Normalen an eine Rotationsfläche entspricht.

Schreibt man in diesem Falle $\Delta = (\lambda - \varkappa)\Delta_1$, $\Omega = (\lambda - \varkappa)\Omega_1$, wo dann Δ_1 den Factor $\lambda - \varkappa$ nur noch einmal, Ω_1 gar nicht mehr enthält, so wird die Gleichung des Problems:

$$(66.) \qquad (\lambda - \varkappa)^2 \left\{ \Delta_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda} - \Omega_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda} \right\} = 0.$$

Es tritt also immer die Doppelwurzel $\lambda = \varkappa$ auf, während der Rest der Gleichung genau den Character des für $n = 3$ behandelten Problems hat. Nur ein wesentlicher Unterschied ist dabei zu bemerken. Denn es wird zwar wieder Ω_1 ein vollständiges Quadrat für die beiden Wurzeln von Δ oder Δ_1, welche nicht gleich $\varkappa$ sind; für die Wurzeln $\lambda = \varkappa$ aber ist eine besondere Untersuchung nothwendig.

Man hat

$$\Omega_1 = \Sigma\Sigma v_i v_h \frac{\Delta_{ih}}{\lambda - \varkappa},$$

und nach bekannten Determinantensätzen ist

$$\frac{\Delta_{ih} . \Delta_{i'h'} - \Delta_{ih'} . \Delta_{i'h}}{(\lambda - \varkappa)^2} = \frac{\Delta}{(\lambda - \varkappa)^2} \cdot \Delta_{ih,i'h'}.$$

Man sieht, dass, wenn man $\lambda = \varkappa$ setzt, der Ausdruck rechts nicht verschwindet, sondern einer endlichen Grenze sich nähert; daher sind auch die Grössen $\frac{\Delta_{ih}}{\lambda - \varkappa}$ für $\lambda = \varkappa$ nicht mehr Coefficienten eines vollständigen Quadrats, wie dies für die anderen Wurzeln von $\Delta = 0$ der Fall ist. Aber eine Determinante dritter Ordnung, welche man aus den $\frac{\Delta_{ih}}{\lambda - \varkappa}$ zusammensetzt, enthält als Factor $\frac{J^2}{(\lambda - \varkappa)^3}$, was für $\lambda = \varkappa$ verschwindet. Also die aus jenen Grenzwerthen zusammengesetzten Determinanten *dritter* Ordnung verschwinden noch; was mit anderen Worten sagt, dass sich immer gewisse Constanten α, β so bestimmen lassen, dass

$$\lim\left(\frac{\Delta_{ih}}{\lambda - \varkappa}\right)_{\lambda = \varkappa} = \tfrac{1}{2}(\alpha_i \beta_h + \alpha_h \beta_i).$$

Und so wird dann für $\lambda = \varkappa$:

$$\Omega_1 = \Sigma \alpha_i v_i . \Sigma \beta_h v_h = \alpha\beta,$$

wo die α, β lineare Ausdrücke sind. In den Betrachtungen des §. 5 ist also zu setzen

$$H^2 = \alpha\beta . \eta'^2 \eta''^2,$$

während alles Uebrige unverändert bleibt.

Es finden sich also in Bezug auf die Gleichung

$$(67.) \qquad \Delta_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda} - \Omega_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda} = 0$$

die Formen:

$$i = 3h^2, \qquad 4j = b_1^3 . \alpha\beta\eta'^2\eta''^2 - 4h^3, \qquad G = 8h^3 - b_1^3 . \alpha\beta\eta'^2\eta''^2,$$

wo b_1 der Coefficient von λ^3 in Δ_1 ist, und wo h einen Ausdruck zweiter Ordnung bezeichnet, welcher, wie alle hier vorkommenden Functionen dieser Art, eine lineare Function von $\alpha\beta$, η'^2, η''^2 ist.

Die Fläche $G=0$, für deren Punkte zwei Wurzeln der Gleichung (67.) zusammenfallen, ist vom sechsten Grad, und enthält zwei Rückkehrkegelschnitte, in denen die Ebenen $\eta'=0$, $\eta''=0$ von der Fläche $h=0$ geschnitten werden; diese Ebenen sind zugleich Tangentenebenen in jenen Curven. Ausserdem aber wird die Fläche $G=0$ von den Ebenen α, β in Kegelschnitten berührt, und zwar mit einer Berührung zweiter Ordnung; diese Kegelschnitte liegen gleichfalls auf der Fläche zweiter Ordnung $h=0$.

Wenn man verfährt wie in §. 8, so ergeben sich ferner Doppelcurven der Fläche. In der That erhält man bestimmte Werthe für die Verhältnisse der Coefficienten von Ω_1; oder, was dasselbe ist, Gleichungen der Form

$$(68.) \qquad \alpha\beta : \eta'^2 : \eta''^2 = c : c' : c''.$$

Man erkennt, dass diese Doppelcurve in zwei Zweige zerfällt, welche in den Ebenen

$$\frac{\eta'}{\sqrt{c'}} + \frac{\eta''}{\sqrt{c''}} = 0, \qquad \frac{\eta'}{\sqrt{c'}} - \frac{\eta''}{\sqrt{c''}} = 0$$

liegen, also in Ebenen, welche mit den Ebenen η ein harmonisches Bündel constituiren. Diese Curven sind zwei Kegelschnitte; denn sie bilden ausserdem den Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnung:

$$\alpha\beta c'^2 - \eta'^2 c^2 = 0, \qquad \alpha\beta c''^2 - \eta''^2 c^2 = 0$$

mit den genannten Ebenen. Die letzteren Flächen sind Kegel, deren Spitzen in den Schnittpunkten der Linie α, β mit den Ebenen η', η'' liegen, deren jeder die Ebenen α, β berührt; die beiden Kegelschnitte haben also dieselbe Eigenschaft. Sämmtliche sechs Kegelschnitte, von denen hier die Rede ist, schneiden sich in zwei Punkten; in denen nämlich die Schnittlinie von η' und η'' von den Ebenen α, β getroffen wird.

Die Punkte der betrachteten Fläche haben die Eigenschaft, dass zwei Lösungen des Problems für sie zusammenfallen. Dasselbe geschieht ausserdem noch für die Ebenen α, β, η', η'', für welche Δ und Ω gleichzeitig verschwinden.

Ausser der Fläche $G=0$ aber ist noch eine andere zu betrachten, für deren Punkte nämlich $\lambda=\varkappa$ auch eine Lösung der Gleichung (67.), also eine dreifache der Gleichung (66.) wird. Diese Fläche erhält man, wenn man in (67.) $\lambda=\varkappa$ setzt, und da für diesen Werth Δ_1 verschwindet, so bleibt nur

$$\Omega_1(\varkappa) = 0.$$

Dies ist nach dem Vorigen nichts Anderes als das System der Ebenen $\alpha = 0,\ \beta = 0$.

Die vier Punkte X, welche der Gleichung (67.) *entsprechen, liegen jederzeit in einer Ebene mit dem Punkte x und der Schnittlinie der Ebenen* $\alpha = 0,\ \beta = 0$.

Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, die bekannte identische Gleichung

$$(\Sigma\Sigma v_i V_k \Delta_{ik})^2 - (\Sigma\Sigma v_i v_k \Delta_{ik})(\Sigma\Sigma V_i V_k \Delta_{ik})$$

$$= -\Delta \cdot \begin{vmatrix} \lambda u_{11}+\mu v_{11} & \lambda u_{21}+\mu v_{21} & \lambda u_{31}+\mu v_{31} & \lambda u_{41}+\mu v_{41} & v_1 & V_1 \\ \lambda u_{12}+\mu v_{12} & \lambda u_{22}+\mu v_{22} & \lambda u_{32}+\mu v_{32} & \lambda u_{42}+\mu v_{42} & v_2 & V_2 \\ \lambda u_{13}+\mu v_{13} & \lambda u_{23}+\mu v_{23} & \lambda u_{33}+\mu v_{33} & \lambda u_{43}+\mu v_{43} & v_3 & V_3 \\ \lambda u_{14}+\mu v_{14} & \lambda u_{24}+\mu v_{24} & \lambda u_{34}+\mu v_{34} & \lambda u_{44}+\mu v_{44} & v_4 & V_4 \\ v_1 & v_2 & v & v_4 & 0 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man in derselben $\lambda = \varkappa,\ \mu = 1$, so verschwinden beide Seiten identisch; nicht aber, wenn man zuvor durch $(\lambda - \varkappa)^2$ dividirt hat. Im letzteren Falle geht dann, wenn A, B das bezeichnen, was durch Substitution von X für x aus α, β entsteht, die linke Seite über in

$$\left(\frac{\alpha B + \beta A}{2}\right)^2 - \alpha\beta . AB = \left(\frac{\alpha B - \beta A}{2}\right)^2.$$

Rechts wird $\frac{\Delta}{(\lambda-\varkappa)^2}$ endlich; es verschwindet also diese Seite, wenn man noch nachweist, dass die Determinante jener Seite für $\lambda = \varkappa,\ \mu = 1$ verschwindet. Nun seien λ', μ' die Werthe von λ, μ, die dem Punkt X entsprechen, also

$$\lambda' U_i + \mu' V_i = v_i.$$

Dann ist auch

$$V_i = \frac{\varkappa v_i - \lambda'(\varkappa U_i + V_i)}{\varkappa\mu' - \lambda'}.$$

Man kann daher, indem man die ersten vier horizontalen oder verticalen Reihen mit $-\frac{\lambda'}{\varkappa\mu'-\lambda'} X_i$, die fünfte mit $\frac{\varkappa}{\varkappa\mu'-\lambda'}$ multiplicirt, und alles von der letzten Reihe abzieht, die Reihen der V zerstören. Die übrig bleibende Determinante ist dann in jedem ihrer Glieder mit der Determinante der Grössen $\varkappa u_{ik} + v_{ik}$ oder mit ihren ersten Unterdeterminanten multiplicirt, welche sämmtlich der Voraussetzung nach verschwinden.

So genügen die X der Gleichung

$$\alpha B - \beta A = 0,$$

welche eine Ebene darstellt, die auch durch x geht und durch die Schnittlinie von $A = 0$, $B = 0$, wie der Satz es ausspricht.

Für die der Wurzel $\varkappa = \lambda$ entsprechenden Lösungen kann man dagegen den Gleichungen (1.) die Form geben:

$$\varkappa U_i + V_i = \nu . v_i .$$

In diesen Gleichungen kann man von den vier linken Theilen zwei aus den anderen beiden auf lineare Weise zusammensetzen, und würde so zu Beziehungen für die rechten Theile gelangen, welche im Allgemeinen nicht erfüllt sind. Es ist also im Allgemeinen $\nu = 0$; und die obigen Gleichungen stellen dann nur zwei lineare Beziehungen zwischen den X dar, welche von den x ganz unabhängig sind. Dies bedeutet nichts Anderes, als *dass diese Punkte X unbestimmt in der Schnittlinie des Ebenenpaars $\varkappa U + V = 0$ liegen, welches sich durch den vollständigen Schnitt der Flächen $U = 0$, $V = 0$ legen lässt.* Die Bedingung, dass neben Δ auch dessen Differentialquotienten verschwinden können, sagt eben aus, dass es ein solches Ebenenpaar gebe. *Und zwar ist jene Schnittlinie die der Ebenen $\eta' = 0$, $\eta'' = 0$*, wie man sofort einsieht, wenn man bemerkt, dass u, v lineare Functionen der $\alpha\beta$, η'^2, η''^2 sind, und dass es zur Aufstellung jenes Ebenenpaars genügt, aus $u = 0$, $v = 0$ das Product $\alpha\beta$ zu eliminiren. —

Diese Bemerkungen mögen genügen, um die Ausnahmsfälle zu characterisiren, deren vollständige Ausführung und Discussion zu weit führen würde.

§. 14.

Bemerkungen.

Parallel neben der auseinandergesetzten Behandlungsweise des Problems geht eine zweite, welche einen weiteren Einblick gewährt und deshalb angeführt werden muss. Dieselbe besteht zunächst darin, dass man die Functionen u, v in Linien- (Ebenen) Coordinaten anwendet. Sei demnach

$$u = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + \cdots,$$
$$v = b_{11}\alpha_1^2 + 2b_{12}\alpha_1\alpha_2 + \cdots.$$

Sucht man nun für $n = 4$ die Ebene α, deren Pole, für u und v genommen, mit x auf einer Geraden liegen; und welche zugleich die Fläche $u = 0$ be-

rührt; oder das Entsprechende in der Ebene; so gelangt man zu Gleichungen, die in dem folgenden Schema enthalten sind, wenn u_i, v_i die halben Differentialquotienten von u, v nach den α bedeuten:

$$(69.) \qquad \begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 = x_1, \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = x_2, \qquad u = 0. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Die gesuchten α sind dann mit den oben gesuchten X durch die einfachen Beziehungen der Tangentenebene zu ihrem Berührungspunkte verbunden: $u_i = X_i$. Man kann offenbar diese Gleichungen ganz wie die früheren behandeln und gelangt zu ähnlichen Resultaten. Aber aus den Gleichungen (69.) folgt sofort, *dass ihre Gestalt ungeändert bleibt, wenn man $v + \varkappa u$ an die Stelle von v setzt.* Dies heisst, für $n = 3$:

Das Problem bleibt ungeändert, wenn man für $v = 0$ einen Kegelschnitt setzt, welcher die vier gemeinschaftlichen Tangenten von u, v berührt.

Und für $n = 4$:

Das Problem bleibt ungeändert, wenn man für $v = 0$ eine Fläche zweiter Ordnung setzt, welche von den zu $u = 0$, $v = 0$ gemeinsamen Tangentenebenen berührt wird.

Dies ist der innere Grund, weswegen es ganz gleichgültig ist, welche zu $u = 0$ confocale Curve oder Fläche man an Stelle von $v = 0$ treten lässt, um aus der hier vorliegenden Aufgabe das Normalenproblem zu entwickeln. Man kann eine Reihe von Folgerungen aus diesem Umstande ableiten.

Aber ersetzen wir jetzt das vorgelegte Problem durch ein anderes, indem wir statt des Punktes x seine in Bezug auf v genommene Polare $\bar{\alpha}$ als gegeben annehmen. Dann haben wir

$$x_i = \overline{v_i},$$

und die Gleichungen (69.) gehen in die folgenden über:

$$(70.) \qquad \lambda u_i + \mu v_i = \overline{v_i}.$$

Dies ist ganz genau dieselbe Gleichungsform wie die der Gleichungen (1.). Sie führt auf folgendes Problem:

Eine Tangentenebene der Fläche $u = 0$ so zu führen, dass ihr Pol für $v = 0$ mit dem Berührungspunkte und dem Pol einer gegebenen Ebene für $v = 0$ in einer Geraden liegt.

Die Lösung dieses Problems, welches im Grunde von dem vorigen nicht verschieden ist, führt auf die nämlichen geometrischen Resultate, nur nach

dem Princip der Dualität verwandelt. Während z. B. dort die sechs nach den gefundenen Punkten gezogenen Geraden in einem Kegel lagen, findet sich hier sofort der Ergänzungssatz:

Die sechs in den Punkten X an $u=0$ gelegten Tangentenebenen schneiden die Polare von x in Bezug auf $v=0$ in sechs Geraden, welche einen Kegelschnitt berühren;

eine Eigenschaft, welche also auch den Tangentenebenen der Normalenfusspunkte zukommt für die Polare von x genommen *in Bezug auf jede beliebige zu $u=0$ confocale Fläche.*

Der Fläche $G=0$ entspricht hier eine von den betreffenden Polarebenen umhüllte Fläche zwölfter Klasse. Dieselbe besitzt vier Rückkehrkegelschnitte, eine doppeltberührende abwickelbare Fläche von der vier und zwanzigsten Klasse, u. s. w.

Dies reciproke Problem bleibt nicht mehr ungeändert, wenn v durch eine Fläche ersetzt wird, welche die zu u, v gemeinsamen Tangentenebenen berührt. Aber es bleibt ungeändert, wenn man für v eine Fläche setzt, welche durch die gemeinsame Schnittcurve von u, v geht. Es bleibt für $n=3$ ungeändert, wenn man $v=0$ durch eine Curve ersetzt, welche durch die vier Punkte geht, in welchen u und v sich durchschneiden.

Carlsruhe, den 31. Januar 1862.

Die speciellen *Lamé*schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

In einer Arbeit des 60sten Bandes dieses Journals wurden Functionen eingeführt, welche ich *Lamé*sche Functionen höherer Ordnung nannte, weil sie sich für den speciellen Werth 2 eines Parameters in diejenigen verwandeln, welche *Lamé* in seinen Untersuchungen über den Wärmezustand eines Ellipsoides anwandte. Es blieb noch übrig, einige Fragen näher zu erörtern, welche in jenem Aufsatze nicht mit der erforderlichen Ausführlichkeit behandelt werden konnten. Die gegenwärtige Arbeit, welche durch die neulich erschienene „Ueber einige bestimmte Integrale" vorbereitet wird, behandelt den Gegenstand, welcher Bd. 60, S. 254 und 258 berührt wurde, nämlich die *speciellen Functionen* der verschiedenen Ordnungen.

Bezeichnet p eine ganze positive, n eine ganze nicht negative Zahl, so wurde *die Lamésche Function p^{ter} Ordnung, welche zu n gehört,* mit Hülfe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2W}{du^2} - [c_0 x^{p-1} + c_1 x^{p-2} + \text{etc.} + c_{p-1}]W = 0$$

definirt, in welcher

$$du = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}, \qquad \psi(x) = (x-\alpha)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_p)$$

gesetzt ist. Die α bedeuten hier Constante, welche man sich als gegeben zu denken hat, während die c Constante sind, die so bestimmt werden müssen, dass ein Integral der Differentialgleichung eine ganze Function n^{ten} Grades von $\sqrt{x-\alpha}$, $\sqrt{x-\alpha_1}$, etc., $\sqrt{x-\alpha_p}$ wird. Dies Integral ist dann eben die *Lamé*sche Function p^{ter} Ordnung, welche zu n gehört, und zwar *erster Art,* indem die Function zweiter Art sich auf ein zweites Integral derselben Differentialgleichung bezieht. In der gegenwärtigen Arbeit wollen wir nur die Functionen erster Art betrachten.

Die Differentialgleichung und ihre Integrale vereinfachen sich, wie Bd. 60, S. 254 gesagt wurde, wenn mehrere Constante α in $\psi(x)$ gleich werden. *Der* Fall ist von besonderer Wichtigkeit, in welchem $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{etc.} = \alpha_p$

wird, und in diesem dürfen wir offenbar, ohne ihn irgend wesentlich zu beschränken,

$$\alpha = 0; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \text{etc.} = \alpha_p = 1$$

setzen. Die Functionen, welche dann durch die Differentialgleichung gegeben werden, sind die *speciellen Functionen*, mit denen wir uns wegen ihrer Einfachheit und der vorläufig überwiegenden Wichtigkeit hier beschäftigen wollen.

Ausser diesem extremen Falle könnte man auch den betrachten, in welchem nur *einige* α gleich werden; hier wird derselbe zwar ausgeschlossen, aber in einer folgenden Abhandlung näher erörtert, in welcher wir die wirkliche Existenz der *allgemeinen Lamé*schen Functionen höherer Ordnung nachweisen. Es wird dabei erforderlich sein, über eine etwas allgemeinere Differentialgleichung zu handeln.

In *dem ersten Abschnitte* des vorliegenden Aufsatzes wird die Aufgabe gelöst, wegen welcher die Arbeit ursprünglich unternommen war; es werden nämlich die Constanten c und damit die Differentialgleichungen der speciellen Functionen gefunden (§. 3), und endlich (§. 5) diejenigen Integrale derselben, welche ganze Functionen n^{ten} Grades von $\sqrt{x-\alpha}$, $\sqrt{x-\alpha_1}$, etc., also hier von $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x-1}$ sind, d. h. sämmtliche specielle Functionen p^{ter} Ordnung. Es stellt sich heraus, *dass für jedes p genau* $n+1$ *solcher Functionen existiren, die zu n gehören;* nämlich, abgesehen von dem Falle $p = 1$, der eine Modification erfordert, hat man für jedes n genau $n+1$ Differentialgleichungen, von denen jede *ein* brauchbares Integral liefert.

Es ist bequemer, diese Functionen als abhängig nicht mehr von x sondern von $z = \sqrt{x}$ zu betrachten. Nennt man dann die $n+1$ speciellen *Lamé*schen Functionen p^{ter} Ordnung, welche zu n gehören, $I_\nu^n[p, z]$, wo ν die Werthe 0, 1, 2, etc. n annimmt, so zeigt sich (§. 6), dass $I_\nu^n[p, z]$ sich nur durch einen constanten Factor von $(\sqrt{z^2-1})^\nu \frac{d^\nu I_0^n[p, z]}{dz^\nu}$ unterscheidet. Es wird aber $I_0^n[p, z]$, wiederum bis auf einen constanten Factor, je nachdem p grade oder ungrade, von der Form $p = 2\varpi+2$ oder $p = 2\varpi+1$ ist, nichts Anderes als der ϖ^{te} Differentialquotient nach z respective von $P^{n+\varpi}(z)$ oder $\cos((n+\varpi)\arccos z)$. Für $p = 2$ stimmt also $I_\nu^n[p, z]$ mit $P_\nu^n(z)$ überein.

Mitgetheilt wurde bereits Bd. 60, S. 258 der ungefähre Zusammenhang, in dem die so erhaltenen I_ν^n, welche nach ihrer Entstehung eine bestimmte Rolle unter den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung spielen, mit einer partiellen Differentialgleichung von $p+1$ unabhängigen

Variabeln stehen; die Ausführung dessen, was dort angedeutet wurde, ist Gegenstand des zweiten und dritten Abschnittes.

Man weiss (m. vergl. die Einleitung des Handbuches der Kugelfunctionen), dass *Laplace* die reciproke Entfernung zweier Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten ξ, ξ_1, ξ_2 und a, a_1, a_2 — des bequemeren Ausdruckes halber setzen wir $a^2+a_1^2+a_2^2=1$ — mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2}=0$$

in Verbindung brachte. Setzt man $\xi^2+\xi_1^2+\xi_2^2=r^2$, und $\xi=rx$, $\xi_1=rx_1$, $\xi_2=rx_2$, führt auch für die x Polarcoordinaten ψ_1 und ψ_2 ein, entwickelt dann T nach Potenzen von r, so wird der Coefficient von r^n, der P^n heisst, von *einem* Argumente $ax+a_1x_1+a_2x_2$ abhängen, und einer neuen partiellen Differentialgleichung mit den beiden unabhängigen Veränderlichen ψ_1 und ψ_2, welche die zweite Differentialgleichung heissen mag, genügen. *Laplace* handelt nun von den P in doppelter Beziehung; erstens entwickelt er Eigenschaften derselben, die ganz unabhängig von ihrem Verhältnisse zur Differentialgleichung sind, und zweitens betrachtet er sie in ihrer Beziehung zu den anderen Lösungen der zweiten Differentialgleichung. Zu den Entwickelungen der ersten Art gehört z. B. die merkwürdige Reihe für P^n, die nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von ψ_2 fortschreitet. Unwesentlich ist es, dass *Laplace* auch die Eigenschaften der ersten Art mit Zugrundelegung solcher der zweiten Art ableitet; *Jacobi*s Methode zeigt, dass die Ableitung ebenso unabhängig von der zweiten Differentialgleichung gemacht werden kann, wie die Eigenschaften, von denen wir reden, es sind.

Die erwähnten Untersuchungen von *Laplace* lassen sich von drei auf $p+1$ Veränderliche übertragen. Schon im 13ten Bande des *Liouville*schen Journals hat *Cayley* *) bemerkt, dass zum Zwecke einer Verallgemeinerung der *Laplace*schen Functionen eine $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{te}}$ Potenz mit der ersten partiellen Differentialgleichung, nachdem sie auf $p+1$ Variable bezogen worden ist, in Verbindung zu bringen sei, nämlich der Ausdruck T im §. 19 mit der dort befindlichen Gleichung (5.). Im Folgenden führen wir die Uebertragung aus; die Verbindung mit dem ersten Abschnitte wird, wie schon gesagt, dadurch hergestellt, dass hierbei die Functionen I_ν^n wieder auftreten.

In dem zweiten Abschnitte findet man die Resultate, welche sich für die Functionen, welche aus der Entwickelung der $\frac{1}{2}(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz entspringen,

*) Sur les fonctions de *Laplace*, p. 275—280.

unabhängig von ihrer Beziehung zur Differentialgleichung ergeben. Wenn ich hierbei die *Jacobi*sche Methode zu Grunde lege, so geschieht dies nicht nur um eine bessere Anordnung zu erzielen; man wird die Vorzüge der *Jacobi*schen Methode erkennen, wenn man nach Anleitung des §. 21 dieselben Resultate mit Hülfe der Differentialgleichung abzuleiten versucht, indem man das Verfahren von *Laplace* nachbildet. Ich möchte sagen, dass man die *ungefähre* Form der Resultate leichter bei dem letzten Verfahren erräth, die *genauen* Resultate und strenge Beweise aber, sobald $p > 2$ ist, aus dem *Jacobi*schen erhält. Indem wir später, um den Inhalt des dritten Abschnittes genauer auseinanderzusetzen, an dieser Stelle wieder anknüpfen, kommen wir nun zu der *speciellen Angabe des Inhaltes im zweiten Abschnitte.*

Wir gehen von der Entwickelung der Grösse

$$\frac{1}{(1-2rz+r^2)^{\frac{1}{2}(p-1)}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von r aus. Heisst der Coefficient von r^n bis auf eine Constante (Taf. I) $I^n[p, z]$, so zeigt man leicht (§. 9), dass dieser durch denselben ϖ^{ten} Differentialquotienten dargestellt wird wie oben I_0^n, — eine Darstellung von $I^n[p, z]$, welche, wie ich aus einem Schreiben des Herrn *Mehler* ersah, diesem bereits vor Abfassung meiner Arbeit über bestimmte Integrale bekannt war. Für $p=2$ ist $I^n[p, z]$ offenbar nichts Anderes als $P^n(z)$. Man erkennt, dass die $I^n[p, z]$ und daher die $I_\nu^n[p, z]$ wesentlich nur *zwei* verschiedene Charaktere haben; für grade p führen sie auf Kugelfunctionen, für ungrade p auf Kreisfunctionen. Ein Blick auf Taf. I—III lehrt diese Beziehungen. Die I_ν^n spielen in Bezug auf I^n dieselbe Rolle wie die Zugeordneten P_ν^n in Bezug auf P^n.

Es wird nun gezeigt, wie die wichtigsten Eigenschaften der Kugel- und Kreisfunctionen sich bei den I wiederfinden. Wir erwähnen nur flüchtig die zweite Formel in Taf. V, deren Bedeutung man sofort aus der darüberstehenden von *Jacobi* herrührenden erkennt; Taf. VI drückt die I^n durch Integrale aus, die den *Laplace*schen für P^n im Falle $p=2$ entsprechen, und die meiner Arbeit über bestimmte Integrale Bd. 61 entnommen sind; auch die Bedeutung der Formeln in Taf. VII ist selbstverständlich, wenn man bedenkt, dass I_ν^n für $p=2$ in P_ν^n übergeht; erst die Formeln der Taf. VIII geben zu einer ausführlicheren Erörterung Anlass.

Sieht man bei dieser Uebersicht immer von constanten Factoren ab, so ist, wie ich nachwies (Handb. §. 43, S. 117), der Coefficient von $\cos m\psi$ in der

Entwickelung von

$$(x+\cos\psi\sqrt{x^2-1})^n$$

nach Cosinus der Vielfachen von ψ gleich $P_m^n(x)$; dies in die allgemeineren Zeichen I übersetzt, heisst, wenn man $\cos\psi = z$ macht: Der Coefficient von $I^m[1, z]$ in der Entwickelung unseres Ausdruckes nach $I^m[1, z]$ mit veränderlichem m ist die Zugeordnete nächst höherer Ordnung $I_m^n[2, x]$. Nach den Untersuchungen von §. 12 und 13 lässt dieser Satz sich auf ein allgemeines p so übertragen, dass man für jene n^{te} Potenz die Entwickelung erhält:

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^n = \sum_{m=0}^{m=n} b_m I_m^n[p+1, x] I^m[p, z],$$

wenn die b gewisse Constante bezeichnen, deren Werth man in Taf. VII findet.

Während man für $p=1$ wieder auf die frühere Formel zurückkommt, *erhält man für $p=2$ etwas wesentlich Neues*, nämlich die elegante Entwickelung unserer n^{ten} Potenz statt nach Cosinus der Vielfachen von $\arccos z$, nach Kugelfunctionen $P^m(z)$; der Factor von $P^m(z)$ ist aber eine Zugeordnete dritter Ordnung $I_\nu^n[3, x]$. Die für höhere p geltenden Formeln lassen sich übrigens auch durch blosse Differentiation nach z aus den beiden fundamentalen (für $p=1$ und $p=2$) ableiten.

Wir kommen zu einer zweiten Reihe, nämlich zu der Entwickelung von $P^n(\cos\gamma_1)$ nach Cosinus der Vielfachen von γ_2, wenn man setzt

$$\cos\gamma_1 = \cos\eta_1\cos\psi_1 + \sin\eta_1\sin\psi_1\cos\gamma_2.$$

Bekanntlich tritt in dieser *Laplace*schen Reihe als Factor von $\cos m\gamma_2$ das Product $P_m^n(\cos\eta_1)P_m^n(\cos\psi_1)$ auf, oder in unseren allgemeinen Zeichen, es ist für $p=2$ in der Entwickelung von $I^n[p, \cos\gamma_1]$ nach $I^m[p-1, \cos\gamma_2]$ mit veränderlichem m, der Factor von $I^m[p-1, \cos\gamma_2]$ ein Product der Zugeordneten nächsthöherer Ordnung

$$I_m^n[p, \cos\eta_1]\, I_m^n[p, \cos\psi_1].$$

Aus §. 14—16 ersieht man, dass *dasselbe Resultat für alle p gilt*, die grösser als 1 sind.

Die Fälle $p=2$ und $p=3$ sind hier die fundamentalen; im §. 17 sieht man, wie wichtig es ist, diese Formel für jedes grössere p zu besitzen, indem man dann eine noch allgemeinere Reihe für $I^n[p, \cos\gamma_1]$ erhält, wo γ_1 durch $p-1$ Winkel η, eben so viele ψ und einen Winkel γ_p ausgedrückt ist. Wollte man für γ_1 nicht wie dort $2p-1$ sondern eine grössere Anzahl von Winkeln einführen, indem man fortfährt und γ_p wiederum durch Winkel η_p,

ψ_p und γ_{p+1} ausdrückt, so würde man nicht mehr ein einfaches Resultat erhalten. Man sieht hieraus, dass man für $p=2$ nur drei Winkel einführen durfte, wie es auch *Laplace* that (oder vier, indem man für γ_2 die Differenz $\psi_2-\eta_2$ setzt).

Dies ist der hauptsächliche Inhalt des zweiten Abschnittes; wir kommen jetzt zum *dritten Abschnitte.* Indem man statt der reciproken Quadratwurzel den Ausdruck T im §. 19 betrachtet, welcher nun einer ersten Gleichung (5.) mit $p+1$ statt drei Veränderlichen genügt, findet man eine zweite Gleichung (6.), welcher die Function

$$I^n[p, ax+a_1x_1+\text{etc.}+a_px_p]$$

genügt. Die Bedeutung der verschiedenen Buchstaben, welche genau der oben für $p=2$ gewählten entspricht, ist im §. 19 vollständig angegeben. Wir suchen nun die allgemeinste Function $X^{(n)}$, welche mit I^n folgende Eigenschaften gemein hat: Sie ist vom Grade n in Bezug auf x, x_1, etc. x_p, und genügt der Gleichung (6.).

Um die Function aufzufinden, führt man Polarcoordinaten ψ_1, ψ_2, etc. ein (§.19), und stellt eine endliche Function Z auf (§.20), welche von den ψ abhängt, und aus einer Summe von Gliedern besteht, deren jedes einzelne (6.) genügt, die übrigens nicht die allgemeinste Function ist, welche diese Eigenschaften besitzt. Im §. 22 zeigt sich, dass dieses Z eine ganze Function n^{ten} Grades der x ist, im §. 23 endlich, dass sie so viele Constanten enthält als $X^{(n)}$ höchstens enthalten kann. Es ist daher Z jene allgemeinste Function $X^{(n)}$.

Endlich findet man im §. 22 noch die Sätze, welche eine Haupteigenschaft der $X^{(n)}$ enthalten; nachdem gezeigt ist, dass Z mit $X^{(n)}$ übereinstimmt, kann man nämlich dort in (a) und (b) die Buchstaben Z und Y mit $X^{(n)}$ und $X^{(m)}$ vertauschen. Die Bedeutung der beiden Sätze wird aus der Vergleichung des Resultats mit dem für $p=2$ geltenden sofort klar; sie sind es, durch welche die Coefficientenbestimmung geschieht, wenn man eine Function in eine Reihe entwickeln will, die nach den $X^{(n)}$ fortschreitet.

Die Versuche zur Verallgemeinerung der *Laplace*schen Functionen, soweit sie mir bekannt geworden sind, haben sich bisher auf diese beiden Sätze bezogen, die man in *Cayley*s oben erwähnter Arbeit S. 276 und 278 Formel 10 und 16 bereits findet. Besonders bemerkenswerth scheint mir in dieser Arbeit die Art zu sein, auf welche *Cayley* gelehrt hat, die $X^{(n)}$ ohne Hülfe unserer Gleichung (6.), nur mit Hülfe von (5.) zu definiren. Wenn wir diesen Vorgang nicht benutzten, so geschah es aus dem Grunde, weil

uns daran lag, auch die Reihenentwickelung von $X^{(n)}$ (m. vergl. §. 23) und die Art kennen zu lernen, auf welche die Constanten in $X^{(n)}$ eingehen.

Im Falle $p=2$ hatten wir eine erste (5.) entsprechende Differentialgleichung und eine zweite unterschieden, welche (6.) entspricht. Jedes Integral der zweiten, mit r^n multiplicirt, muss offenbar ein Integral der ersten sein. Die *Laplace*sche Function $X^{(n)}$ (für $p=2$) lässt sich, wie man bemerkt hatte, dadurch definiren, dass sie *ganz* und vom Grade n nach x, x_1, x_2 ist und der zweiten Differentialgleichung genügt. Nimmt man den neuen Gedanken hinzu, der wohl *Cayley* angehört, dass man sie auch als *homogene* Function der x betrachten kann, so sieht man, dass $r^n X^{(n)}$ die allgemeinste Function ist, welche der ersten Gleichung genügt, und homogen und vom Grade n nach ξ, ξ_1, ξ_2, dass also $X^{(n)}$ dieselbe Function für $\xi^2+\xi_1^2+\xi_2^2=1$ wird. *Cayley* verallgemeinert nun den Begriff der *Laplace*schen Function dahin, dass sie die allgemeinste homogene Function n^{ten} Grades von ξ, ξ_1, etc. ξ_p ist, welche unserer Gleichung (5.) genügt, wenn man $\xi^2+\xi_1^2+\text{etc.}+\xi_p^2=1$ setzt. Diese Function stimmt nun mit unserem $X^{(n)}$ überein; *Cayley* beweist für dieselbe die in Rede stehenden beiden Sätze, geht übrigens weder näher auf die definitive Form von X noch auf den Nachweis ein, dass die von ihm S. 276 aufgestellten Functionen wirklich die allgemeinsten, von ihm definirten $X^{(n)}$ sind.

Mit dem Beweise der erwähnten Sätze hat sich ferner auch *Ostrogradski* im Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg Tome III, p. 65 vom Juni 1860 in einer Arbeit: Sur une intégrale définie beschäftigt, indem er für die $X^{(n)}$ die *Cayley*sche Definition zu Grunde legte und die Methode benutzte, durch die ein Integral, welches sich über einen Körper erstreckt, in ein über die Oberfläche genommenes verwandelt wird.

Erster Abschnitt.

§. 1. Wie bereits in der Einleitung angegeben ist, haben wir die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^2W}{du^2}-[c_0x^{p-1}+c_1x^{p-2}+\text{etc.}+c_{p-1}]W=0$$

zu untersuchen, in welcher man

$$du=\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}},\qquad \psi(x)=(x-\alpha)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_p)$$

gemacht hat. Jede Function W, welche ganz und vom Grade n in Bezug auf $\sqrt{x-\alpha}$, $\sqrt{x-\alpha_1}$, etc., $\sqrt{x-\alpha_p}$ ist, lässt sich jedenfalls als eine Summe

$$W = G_1\sqrt{\psi_1} + G_2\sqrt{\psi_2} + \text{etc.}$$

darstellen, in der die G ganze Functionen von x, die Functionen ψ_1, ψ_2, etc. Theiler von ψ sind, die extremen Fälle eingeschlossen, dass eine der ψ_1, etc. gleich 1 oder gleich $\psi(x)$ selbst ist. Offenbar kann man annehmen, dass ψ_1, ψ_2, etc. untereinander verschieden sind, d. h. dass der Quotient von zwei derselben keine Constante giebt. Dies vorausgesetzt zeigen wir, dass jede einzelne Grösse $G_1\sqrt{\psi_1}$, $G_2\sqrt{\psi_2}$, etc., für W in (1.) eingesetzt, dieser Gleichung genügen muss.

Da nämlich

$$\frac{d^2W}{du^2} = \psi(x)\frac{d^2W}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\psi'(x)\frac{dW}{dx},$$

und daher für jeden Index ι

$$\frac{d^2(G_\iota\sqrt{\psi_\iota})}{du^2} = H_\iota\sqrt{\psi_\iota}$$

wird, wo H_ι eine rationale Function von x bezeichnet, so erfordert (1.), dass

$$H_1\sqrt{\psi_1} + H_2\sqrt{\psi_2} + \cdots$$

gleich einem Ausdrucke

$$K_1\sqrt{\psi_1} + K_2\sqrt{\psi_2} + \cdots$$

werde, wo die K ganze Functionen von x vorstellen, nämlich solche, dass man hat

$$K_\iota = G_\iota[c_0x^{p-1} + c_1x^{p-2} + \text{etc.} + c_{p-1}].$$

Hieraus schliesst man sofort, dass

$$H_\iota = K_\iota, \qquad H_\iota\sqrt{\psi_\iota} = K_\iota\sqrt{\psi_\iota}$$

wird, dass also $G_\iota\sqrt{\psi_\iota}$ der Gleichung (1.) genügt. Wir haben also das Resultat: *Soll man alle Functionen W aufsuchen, welche* (1.) *genügen, und ganze Functionen n^{ten} Grades in Bezug auf $\sqrt{x-\alpha}$, $\sqrt{x-\alpha_1}$, etc., $\sqrt{x-\alpha_p}$ sind, so genügt es, alle Functionen W von der Form $W = G\sqrt{\psi_1}$ aufzusuchen, die* (1.) *genügen. Hier bezeichnet ψ_1 irgend einen Theiler von ψ, G eine ganze Function von x von solchem Grade, dass W^2 eine* (selbstverständlich ganze) *Function von x vom Grade n wird.*

Hat man alle diese Functionen gefunden, so ist offenbar der allgemeinste Ausdruck von W eine lineare Verbindung der gefundenen Functionen.

§. 2. Nachdem wir unsere Aufgabe so reducirt haben, dass wir also nur Integrale der Form $G\sqrt{\psi_1}$ von (1.) zu betrachten brauchen, gehen wir zur Bestimmung der Constanten c in der Gleichung (1.) über. *In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Bestimmung von* c_0.

Setzt man in (1.) für W seinen Werth $G\sqrt{\psi_1}$, und macht $\psi = \psi_1\psi_2$, so entsteht für G die Gleichung

$$(2.) \qquad \psi(x)\frac{d^2G}{dx^2} + \chi(x)\frac{dG}{dx} + \vartheta(x)\,G = 0,$$

wenn man zur Abkürzung

$$\chi(x) = \tfrac{1}{2}\psi'(x) + \psi_1'(x)\psi_2(x),$$
$$\vartheta(x) = \tfrac{1}{2}\psi_1''(x)\psi_2(x) + \tfrac{1}{4}\psi_1'(x)\psi_2'(x) - [c_0x^{p-1} + \text{etc.} + c_{p-1}]$$

gemacht hat. Es ist nun $\psi(x)$ vom Grade $p+1$; es sei ψ_1 vom Grade ν, also ψ_2 vom Grade $p+1-\nu$. Wegen des Grades von W ist dann der Grad der ganzen Function G von x gleich $\frac{1}{2}(n-\nu)$, welches wir gleich σ setzen. Integrirt man nun (2.) durch eine nach Potenzen von x absteigende Reihe, die also mit (der ganzen Potenz) x^σ anfängt, so muss die höchste Potenz von x, welche auf der linken Seite von (2.) nach Einsetzung der Reihe für G entsteht, sich von selbst fortheben. Diese, die $p+\sigma-1^{\text{ter}}$, kommt in

$$\psi(x)\frac{d^2G}{dx^2}, \qquad \chi(x)\frac{dG}{dx}, \qquad \vartheta(x)\,G;$$

resp. $$\sigma(\sigma-1), \qquad \sigma\left(\nu+\frac{p+1}{2}\right), \qquad \frac{\nu(\nu+p-1)}{4} - c_0$$

mal, also im ganzen $\dfrac{n(n+p-1)}{4} - c_0$ mal vor, d. h. *es ist nothwendig*

$$c_0 = \frac{n(n+p-1)}{4}.$$

§. 3. *Die übrigen Constanten c ermitteln wir nur für die speciellen Functionen.* Wir setzen also

$$\alpha = 0; \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \text{etc.} = \alpha_p = 1,$$

so dass $\psi(x)$ gleich $x(x-1)^p$ wird, und W, nach §. 1, jedenfalls von einer der vier Formen

$$G; \quad G\sqrt{x}; \quad G\sqrt{x-1}; \quad G\sqrt{x}\sqrt{x-1}.$$

Ferner ist nun

$$\frac{d^2W}{du^2} = x(x-1)^p\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{(p+1)x-1}{2}(x-1)^{p-1}\frac{dW}{dx}.$$

Man hat jetzt zwei Fälle zu unterscheiden; *erstens* kann es eintreten, dass W für $x=1$ nicht verschwindet, und dann muss der Factor von W in

(1.), nämlich

$$c_0 x^{p-1} + c_1 x^{p-2} + \cdots + c_{p-1}$$

ganz theilbar sein durch $(x-1)^{p-1}$, also gleich $c_0(x-1)^{p-1}$. Dividirt man nun alle Glieder von (1.) durch den gemeinsamen Factor, so findet man, mit Benutzung des schon aus §. 2 bekannten Werthes von c_0, folgende Differentialgleichung für die speciellen Functionen erster Art und p^{ter} Ordnung, die zu n gehören, wenn sie für $x=1$ nicht verschwinden:

$$x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{(p+1)x-1}{2}\frac{dW}{dx} - \frac{n(n+p-1)}{4}W = 0.$$

Verschwindet *zweitens* W für $x=1$, so ist es durch eine Potenz von $\sqrt{x-1}$ theilbar; es sei diese die ν^{te}, wo ν also eine ganze positive, n nicht überschreitende Zahl vorstellt. W soll ausserdem durch keine höhere Potenz von $\sqrt{x-1}$ als die ν^{te} theilbar sein. Dann sind

$$(x-1)^p\frac{d^2W}{dx^2}; \qquad (x-1)^{p-1}\frac{dW}{dx}; \qquad \frac{d^2W}{du^2}$$

durch die $\frac{1}{2}\nu+p-2^{\text{te}}$ Potenz von $x-1$ theilbar, woraus unmittelbar folgt, dass der Factor von W in (1.) durch $(x-1)^{p-2}$ theilbar, also von der Form ist:

$$(x-1)^{p-2}\left[\frac{n(n+p-1)}{4}x+k\right],$$

wenn k eine Constante nach x vorstellt. Die Gleichung solcher Functionen W ist also

$$4x(x-1)^2\frac{d^2W}{dx^2} + 2[(p+1)x-1](x-1)\frac{dW}{dx} - [n(n+p-1)x+k]W = 0.$$

Aber auch k kann nicht willkürlich gewählt werden; führt man nämlich in die vorstehende Gleichung eine für $x=1$ nicht verschwindende Grösse U ein, indem man setzt

$$W = (x-1)^{\frac{1}{2}\nu}U,$$

so findet man für U die Gleichung

$$4x(x-1)^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2[(p+2\nu+1)x-1](x-1)\frac{dU}{dx} + [x(\nu(\nu+p-1)-n(n+p-1))-k-\nu]U = 0.$$

Da in dieser für $x=1$ die beiden ersten Glieder verschwinden, so muss auch das letzte Glied, also in demselben der Factor von U, für $x=1$ verschwinden, und man erhält daher als Werth von k

$$k = \nu(\nu+p-2)-n(n+p-1),$$

welcher in die Gleichungen für U und W einzusetzen ist. Dividirt man diese nun noch durch $x-1$, so hat man schliesslich das Resultat:

Alle speciellen, zu n gehörenden Laméschen Functionen erster Art und p^{ter} *Ordnung findet man, indem man untersucht, wie viele Differentialgleichungen*

$$(3.)\quad 4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2}+2[(p+1)x-1]\frac{dW}{dx}-\left[n(n+p-1)+\frac{\nu(\nu+p-2)}{x-1}\right]W=0$$

ein oder mehrere Integrale $W=U(\sqrt{x-1})^\nu$ *haben, wo* U *eine ganze Function von* $\sqrt{x}$ *ist* (deren Grad nach $\sqrt{x}$ dann von selbst der erforderliche $n-\nu$ wird). *Solche Untersuchungen hat man für* $\nu=0, 1, 2,$ *etc.,* n *zu führen; alle Functionen* W*, die man so findet, und nur diese, sind die verlangten speciellen Functionen.*

Unten zeigen wir, dass für jedes ν *ein* Integral von (3.) mit der geforderten Eigenschaft existirt, dass man also $n+1$ specielle Functionen erster Art und p^{ter} Ordnung für jedes n findet. In dem Falle $p=1$ erhält man zwar nur n Differentialgleichungen (3.), da für $\nu=0$ und $\nu=1$ dieselbe Gleichung (3.) hervorgeht; diese hat aber sowohl ein Integral von der Form U als von der Form $U\sqrt{x-1}$, so dass man wieder $n+1$ Functionen findet.

§. 4. Es ist bequemer unsere Functionen statt von x, von $z=\sqrt{x}$ abhängig zu machen. Wir transformiren deshalb unsere Gleichungen in z, fügen auch zur Vervollständigung noch die Formen hinzu, die man durch Einführung einer trigonometrischen Grösse, von $\cos\psi$ statt z, erhält. Wir haben dann folgendes Schema:

$$\sqrt{x}=z;\qquad z=\cos\psi;\qquad W=(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}U;$$

$$\frac{d}{dz}\cdot\left[(z^2-1)^{\frac{1}{2}p}\frac{dW}{dz}\right]-(z^2-1)^{\frac{1}{2}(p-2)}\left[n(n+p-1)+\frac{\nu(\nu+p-2)}{z^2-1}\right]W=0;$$

$$\left(\frac{1}{\sin\psi}\right)^{p-1}\frac{d}{d\psi}\cdot\left[\sin^{p-1}\psi\frac{dW}{d\psi}\right]+\left[n(n+p-1)-\frac{\nu(\nu+p-2)}{\sin^2\psi}\right]W=0;$$

$$(4.)\qquad (z^2-1)\frac{d^2U}{dz^2}+(p+2\nu)z\frac{dU}{dz}-(n-\nu)(n+\nu+p-1)U=0.$$

Es ist also noch zu zeigen, dass, bei festgehaltenem n und p, für jeden der $n+1$ Werthe von ν eine und nur eine ganze Function U der Gleichung (4.) genügt; der Fall $p=1$ macht hier keine Ausnahme.

§. 5. Integrirt man die Gleichung (4.) durch Reihen, welche nach absteigenden Potenzen von z geordnet sind, so sieht man sogleich ein, dass die eine von ihnen mit der $n-\nu^{ten}$ Potenz, die andere mit der $-(n+\nu+p-1)^{ten}$ Potenz von z beginnt. Die letztere, da sie keinenfalls eine ganze Function von z ist, kann kein Integral U mit den verlangten Eigenschaften geben; sie

wäre zu benutzen, wenn wir von den Functionen zweiter Art, welche also den Kugelfunctionen Q und nicht P entsprechen, handeln wollten. Die erste Reihe dagegen bricht ab, ist daher eine ganze Function von z, und zwar $\mathfrak{Z}_\nu^n[p, z]$, wenn man setzt

$$\mathfrak{Z}_\nu^n[p,z] = z^{n-\nu} - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n+p-3)} z^{n-\nu-2} + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2.4(2n+p-3)(2n+p-5)} z^{n-\nu-4} - \text{etc.}$$

Macht man noch

$$I_\nu^n[p,z] = (\sqrt{z^2-1})^\nu \mathfrak{Z}_\nu^n[p,z],$$

so hat man folgendes Resultat der Untersuchungen dieses Abschnittes:

Es sind die $n+1$ Ausdrücke

$$I_0^n[p,z]; \quad I_1^n[p,z]; \quad \text{etc.}; \quad I_n^n[p,z]$$

die sämmtlichen speciellen Laméschen Functionen erster Art und p^{ter} Ordnung, welche zu n gehören.

§. 6. Die Grössen I lassen sich noch durch verschiedene andere Formeln darstellen; wir heben hier die folgende hervor:

$$I_\nu^n[p,z] = \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}\nu}}{n(n-1)\dots(n-\nu+1)} \frac{d^\nu}{dz^\nu} \cdot [I_0^n[p,z]],$$

welche zeigt, dass I_ν^n für alle Ordnungen p durch dieselben Operationen aus I_0^n abgeleitet wird, also dass I_ν^n in Bezug auf I_0^n immer dieselbe Rolle spielt wie für $p=2$, d. h. wie P_ν^n in Bezug auf P_0^n. Diese Formel findet man ganz direct, wenn man die Reihe für I_0^n im Ganzen ν mal nach z differentiirt, aber eben so leicht aus der Bemerkung, dass die Gleichung (4.), nach z differentiirt, eine Gleichung derselben Art giebt, die aus (4.) entsteht, wenn man in derselben U und ν mit $\frac{dU}{dz}$ und $\nu+1$ vertauscht.

Der Character von I_ν^n hängt also immer von demjenigen von I_0^n ab; dieser ist aber ein wesentlich verschiedener, je nachdem die Ordnung p, wie bei den Kugelfunctionen, grade oder ungrade ist. Für ein grades p, also für $p=2\varpi+2$, lässt sich $I_0^n[p,z]$ offenbar durch ϖfache Differentiation nach z aus $I_0^{n+\varpi}[2,z]$, d. h. aus der Kugelfunction $P^{n+\varpi}(z)$ ableiten; ist dagegen $p=2\varpi+1$, durch ϖfache Differentiation aus $I_0^{n+\varpi}[1,z]$. Nach §. 5 wird aber $I_0^n[1,z]$ durch die Reihe

$$z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-2)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-2)(2n-4)} z^{n-4} - \text{etc.},$$

d. h. durch $2^{1-n}\cos(n.\arccos z) = 2^{1-n}\cos n\psi$ dargestellt $(z=\cos\psi)$, so dass für das ungrade p also $I_0^n[p,z]$ durch ϖfache Differentiation nach z aus

$\cos(n+\varpi)\psi$ sich erzeugen lässt. Man findet Weiteres hierüber in dem zweiten Abschnitte §. 9.

§. 7. Da sowohl $P^n(z)$ als $\cos n\psi$ als Differentialquotient einer ganzen Potenz von $\sqrt{z^2-1}$ dargestellt werden können, so sind sämmtliche I_ν^n wesentlich nichts Anderes als Differentialquotienten solcher ganzen Potenzen. Benutzt man zur Integration von (4.) die Formeln des §. 37 im Handb. und setzt dort in (*a*.)

$$a=0; \qquad b=p+2\nu; \qquad x=z$$

und $n-\nu$ für n, so wird eine ganze Function, welche (4.) integrirt, für grade oder ungrade p,

$$U = (z^2-1)^{-\frac{2\nu+p-2}{2}} \frac{d^{n-\nu}}{dz^{n-\nu}} \cdot \left[(z^2-1)^{\frac{2n+p-2}{2}}\right],$$

so dass man auch erhält:

$$I_\nu^n[p, z] = \frac{\Pi(n+\nu+p-2)}{\Pi(2n+p-2)} (z^2-1)^{-\frac{p-2}{2}} \frac{d^{n-\nu}}{dz^{n-\nu}} \cdot \left[(z^2-1)^{\frac{2n+p-2}{2}}\right].$$

Zweiter Abschnitt.

§. 8. Entwickelt man $(1-2rz+r^2)^{\frac{1-p}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von r, und setzt

$$\frac{1}{(1-2rz+r^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Pi\frac{p-3}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n I^n[p, z],$$

so wird, wie man aus dem Handb. §. 65, S. 169 weiss,

$$I^n[p, z] = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Pi\frac{2n+p-3}{2}}{\Pi n} \left(z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+p-3)} z^{n-2} + \text{etc.}\right).$$

Für die in Parenthesen eingeschlossene Reihe ist aber bereits im §. 5 eine Bezeichnung gewählt worden, aus der sich ergiebt:

$$I^n[p, z] = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Pi\frac{2n+p-3}{2}}{\Pi n} I_0^n[p, z].$$

Die Functionen I_0^n des §. 5 unterscheiden sich also nur durch eine Constante von den obigen Entwickelungscoefficienten.

Diese Festsetzungen gelten, so lange die Zahl p grösser als 1 ist; um die Formeln, welche wir gewinnen werden, auch auf den Fall $p=1$ anwenden zu können, machen wir, wie man schon aus der Analogie unserer Ausdrücke mit den bei Betrachtung des Potentials entstehenden vermuthen wird,

$$-\log(1-2rz+r^2) = \sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} r^n I^n[1,z].$$

Wir setzen endlich fest, dass $nI^n[1,z]$ für $n=0$ nichts Anderes als $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ vorstellt.

§. 9. Es brauchte im vorigen Paragraphen nicht angenommen zu werden, dass p ganz ist; tritt aber dieser Fall ein, so gewinnt man $I^n[p,z]$ sehr leicht durch Differentiation aus seinen Werthen für $p=1$ und $p=2$. (M. vergl. §. 6.)

Ist erstens p ungrade und von der Form $p=2\varpi+1$, so differentiire man

$$-\log(1-2rz+r^2) = 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^n}{n}\cos(n.\arccos z)$$

im Ganzen ϖ mal nach z; dadurch entsteht

$$\frac{2.4\ldots(2\varpi-2)r^\varpi}{(1-2rz+r^2)^\varpi} = \Sigma\frac{r^n}{n}\frac{d^\varpi\cos(n.\arccos z)}{dz^\varpi},$$

also mit Hülfe des §. 8

$$(n+\varpi)2^\varpi I^n[2\varpi+1,z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{n+\varpi}\cos((n+\varpi)\arccos z)}{dz^\varpi}.$$

Wir bezeichnen nun eine parallel mit P vorkommende trigonometrische Grösse durch C, indem wir setzen

$$C^n(z) = I^n[1,z] = \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\cos(n\arccos z),$$

für $n=0$ rechts die Hälfte genommen. Dann wird

$$2^\varpi I^n[2\varpi+1,z] = \frac{d^\varpi C^{n+\varpi}(z)}{dz^\varpi}.$$

In ähnlicher Art findet man *zweitens für ein grades p* von der Form $p=2\varpi+2$ durch wiederholte Differentiation aus $(1-2rz+r^2)^{-\frac{1}{2}}$, mit Einführung der Kugelfunction

$$P^n(z) = I^n[2,z],$$

den Ausdruck

$$2^\varpi I^n[2\varpi+2,z] = \frac{d^\varpi P^{n+\varpi}(z)}{dz^\varpi}.$$

Man weiss (Handb. §. 5 und 36), dass P und C sich durch die Formeln

$$P^n(z) = \frac{1}{2^n \Pi n} \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n},$$

$$C^n(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{n.2^{n-1}\Pi\frac{2n-1}{2}} \frac{d^n (z^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{dz^n}$$

darstellen lassen; setzt man diese Werthe in die vorstehenden Formeln ein, so ergiebt sich als Ausdruck von $I^n[p, z]$, resp. für grade und ungrade p:

$$I^n[2\varpi+2, z] = \frac{1}{2^{n+2\varpi}\Pi(n+\varpi)} \frac{d^{n+2\varpi}(z^2-1)^{n+\varpi}}{dz^{n+2\varpi}},$$

$$I^n[2\varpi+1, z] = \frac{1}{2^{n+2\varpi-1}(n+\varpi)\Pi\frac{2n+2\varpi-1}{2}} \frac{d^\varpi}{dz^\varpi}\cdot\left[\sqrt{z^2-1}\, d^{n+\varpi}(z^2-1)^{\frac{2n+2\varpi-1}{2}}\right].$$

§. 10. Zu grösserer Bequemlichkeit ist dieser Arbeit am Schlusse eine Sammlung von Formeln hinzugefügt worden. Taf. I., II. und III. enthalten solche, die wir hier bereits abgeleitet haben, oder die, wie einige Ausdrücke in Taf. II., sich unmittelbar ergeben, auch die Definition der I^n und ihre Beziehung zu den I^n_ν. Ferner giebt Taf. IV. einige bekannte Ausdrücke, welche unten gebraucht werden; Taf. VI. enthält Formeln, welche in der Arbeit „über einige bestimmte Integrale" im 61sten Bande dieses Journals abgeleitet wurden, oder sogleich daraus folgen. Die Taf. VII. und VIII. enthalten Beziehungen, die erst in den folgenden Paragraphen erörtert werden sollen. Taf. V. endlich zeigt eine merkwürdige *Formel von Jacobi* (No. 32, §. 43 im Handb.) *und eine ihr entsprechende neue,* die sich durch Verbindung von §. 7 und 9 ergeben.

Um diese abzuleiten, hat man nur die Werthe von I^n_0 aus §. 7 und §. 9 einander gleich zu setzen. Für grade p erhält man dann die erste Formel in Taf. V., für ungrade p die zweite. Bei der Reduction hat man die einfachen Werthe zu beachten, welche nach der zweiten Formel in Taf. IV.

$$\Pi(n+\varpi)\Pi\frac{2n+2\varpi-1}{2}; \qquad \Pi(n+\varpi-1)\Pi\frac{2n+2\varpi-1}{2}$$

annehmen, und dann für $n+\varpi$ einen Buchstaben m zu setzen.

§. 11. Die bekanntesten Eigenschaften der Kugelfunctionen, welche sich bei den I wiederfinden, übertragen wir nun auf die letzteren. Wir beginnen mit dem Hülfssatze, dass

$$\int_{-1}^{+1} I^m_\nu[p, z]\, I^n_\nu[p, z](z^2-1)^{\frac{1}{2}(p-2)}\, dz$$

verschwindet, wenn m und n verschieden sind. Dies zeigt sich sowohl aus der Differentialgleichung der I im §. 4, als auch durch folgendes Verfahren, durch welches man zugleich den Werth des Integrals für $m=n$, der nicht verschwindet, bequem findet.

Zunächst ist klar, dass man nur nöthig hat das Integral für $\nu=0$ aufzusuchen; in der That wird nach Taf. II. der obige Ausdruck gleich

$$\int_{-1}^{1} I_0^{m-\nu}[p+2\nu, z]\, I_0^{n-\nu}[p+2\nu, z](z^2-1)^{\frac{2\nu+p-2}{2}}\, dz,$$

also gleich dem Werthe des gegebenen, wenn man in ihm $\nu=0$ setzt, und nur m, n, p resp. mit $m-\nu$, $n-\nu$, $p+2\nu$ vertauscht.

Ist nun $\nu=0$, so unterscheiden wir zwei Fälle; es kann p grade oder ungrade sein. Wir wollen nur den letzteren hier behandeln, da der erstere der einfachere, und wesentlich nichts Anderes als ein bekannter Satz für die Kugelfunctionen ist (Handb. §. 52).

Es sei also $p=2\varpi+1$, und ferner $m<n$. Nun ist nach §. 7

$$(z^2-1)^{\frac{p-2}{2}}\, I_0^n[p, z] = \frac{\Pi(n+p-2)}{\Pi(2n+p-2)}\, \frac{d^n(z^2-1)^{\frac{2n+2\varpi-1}{2}}}{dz^n};$$

berücksichtigt man, dass $I^m[p, z]$ vom m^{ten} Grade nach z, und dass $m<n$ ist, so wird unser Integral, wenn man $n$mal durch Theile integrirt, Null geben und erst dann eine nicht verschwindende Grösse, wenn man $m=n$ setzt. Diese Grösse ist dann

$$(-1)^{\frac{2\varpi-1}{2}}\, \frac{\Pi n\, \Pi(n+p-2)}{\Pi(2n+p-2)} \int_0^{\pi} \sin^{2n+2\varpi}\varphi\, d\varphi$$

oder nach Taf. IV.

$$\frac{(-1)^{\frac{p-2}{2}}\pi}{2^{2n+p-1}}(2n+p-1)\frac{\Pi n\, \Pi(n+p-2)}{\left(\Pi\frac{2n+p-1}{2}\right)^2}.$$

Für grade p hätte man denselben Ausdruck für unser Integral erhalten; aus dem gewonnenen Resultate ist die Taf. VII. gebildet.

§. 12. Die Formeln des §. 11 benutzen wir, um $(x+z\sqrt{x^2-1})^n$, wenn n ganz ist, in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Functionen $I^m[p, z]$ mit veränderlichem m aber festgehaltenem p fortschreitet, d. h. in eine Reihe

$$(a.) \qquad (x+z\sqrt{x^2-1})^n = \sum_{m=0}^{m=n} u_m I^m[p, z],$$

wenn die u von z unabhängige Werthe, die natürlich noch von x abhängig sind, vorstellen. Zunächst ist die Möglichkeit einer solchen Entwickelung nach I^m, weil sie ganze Functionen m^{ten} Grades sind, klar; unsere Aufgabe besteht nur darin, die u zu bestimmen.

Ist p eine ungrade Zahl $2\varpi+1$, so leitet man die gesuchte Formel durch blosse Differentiation nach z aus der bekannten für $p=1$ geltenden (Handb. §. 43, No. 33, *a*) ab:

$$\frac{2^n}{\Pi 2n}(x+\cos\psi\sqrt{x^2-1})^n = \frac{P_0^n(x)}{\Pi n\,\Pi n} + 2\sum_{m=1}^{m=n}\frac{P_m^n(x)\cos m\psi}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}.$$

Setzt man hier z für $\cos\psi$ und drückt die Functionen P und die Cosinus der Vielfachen von ψ durch die allgemeineren Zeichen I aus (Taf. I. und II.), so lautet die vorstehende Formel

$$\frac{2^n}{\Pi 2n}(x+z\sqrt{x^2-1})^n = \sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{m=n}\frac{m\,I_m^n[2,x]I^m[1,z]}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}.$$

Man differentiire diese ϖ mal nach z, nachdem man vorher $n+\varpi$ für n gesetzt hat, dividire durch $(\sqrt{x^2-1})^\varpi$ und benutze Taf. III. und II.; dann entsteht die für ungrade p geltende Formel

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^n = 2^{n+p-2}\,\Pi n\,\Pi\frac{2n+p-2}{2}\sum_{m=0}^{m=n}\frac{2m+p-1}{\Pi(n-m)\,\Pi(n+m+p-1)}I_m^n[p+1,x]I^m[p,z].$$

§. 13. *Dieselbe Formel gilt für grade p*, wie sich durch eine andere Methode zeigen lässt, die etwas mehr Rechnung als die frühere erfordert, die übrigens auch für ungrade p hätte angewandt werden können.

Es sei also $p=2\varpi+2$; wir multipliciren (*a.*) im §. 12 mit

$$I^m[p,z](z^2-1)^{\frac{1}{2}(p-2)}dz$$

und integriren nach z von -1 bis 1. Dadurch entsteht aus der rechten Seite von (*a.*), nach Taf. VII., $u_m c^m[p]$.

Die linke Seite von (*a.*) liefert nach Taf. III.

$$\frac{1}{2^{m+2\varpi}\Pi(m+\varpi)}\int_{-1}^{1}(x+z\sqrt{x^2-1})^n(z^2-1)^\varpi\frac{d^{m+2\varpi}(z^2-1)^{m+\varpi}}{dz^{m+2\varpi}}dz,$$

also nach Taf. V.

$$\frac{1}{2^{m+2\varpi}}\frac{\Pi(m+2\varpi)}{\Pi m\,\Pi(m+\varpi)}\int_{-1}^{1}(x+z\sqrt{x^2-1})^n\frac{d^m(z^2-1)^{m+\varpi}}{dz^m}dz.$$

Integrirt man m mal durch Theile und setzt dann unter dem Integrale $z=\cos\psi$, so entsteht

$$\frac{(-1)^\varpi}{2^{m+2\varpi}}\frac{\Pi n\,\Pi(m+2\varpi)(x^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{\Pi(n-m)\,\Pi(m+\varpi)\,\Pi m}\int_0^\pi(x+\cos\psi\sqrt{x^2-1})^{n-m}\sin^{2m+2\varpi+1}\psi\,d\psi,$$

und nach Taf. VI.

$$(-1)^{\varpi} 2^{n+1} \frac{\Pi n \, \Pi(n+\varpi) \, \Pi(m+2\varpi)}{\Pi m \, \Pi(n-m) \, \Pi(n+m+2\varpi+1)} (\sqrt{x^2-1})^m \mathfrak{Z}_0^{n-m}[2m+p+1, x].$$

Achtet man darauf, dass die beiden letzten, x enthaltenden Factoren nach Taf. II. nichts Anderes als $I_m^n[p+1, x]$ sind, so erhält man nach Division mit $c^m[p]$ den Werth für u_m. Es ist nicht erforderlich ihn hier noch besonders aufzuführen, da er in der That, wie oben behauptet wurde, mit dem Factor von $I^m[p, z]$ in der Formel am Schlusse des §. 12 übereinstimmt.

§. 14. Setzt man

$$\cos\gamma_1 = \cos\eta_1 \cos\psi_1 + \sin\eta_1 \sin\psi_1 \cos\gamma_2,$$

so lässt sich bekanntlich für $p = 2$ die Function $I^n[p, \cos\gamma_1]$, d. h. $P^n(\cos\gamma_1)$ in eine elegante, nach Cosinus der Vielfachen von γ_2 fortschreitende Reihe entwickeln. Eine ähnliche Reihe existirt für alle p, die grösser als 1 sind; wir leiten sie *zunächst für grade p* durch Differentiation aus der bekannten für $p=2$ geltenden ab, also durch eine Methode, die man aus §. 12 schon kennt.

Die erwähnte *Laplace*sche Formel heisst in unseren Zeichen (m. vergl. Handb. §. 67, No. 49)

$$I^n[2, z] = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}} \frac{m.4^n \left(\Pi \frac{2n-1}{2}\right)^2}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)} I_m^n[2, x] I_m^n[2, x_1] I^m[1, y],$$

wenn man

$$z = x x_1 - y \sqrt{x^2-1} \sqrt{x_1^2-1}$$

macht. Setzt man in derselben $n+\varpi$ für n, differentiirt ϖ mal nach y, dividirt darauf durch $(\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1})^{\varpi}$, und reducirt durch Taf. I—III., so entsteht der zunächst für grade p geltende Ausdruck, in dem man wieder $z = \cos\gamma_1$, $x = \cos\eta_1$, $x_1 = \cos\psi_1$, $y = \cos\gamma_2$ gesetzt hat,

$$I^n[p, \cos\gamma_1] = \sum_{m=0}^{m=n} k_m^n[p] I_m^n[p, \cos\eta_1] I_m^n[p, \cos\psi_1] I^m[p-1, \cos\gamma_2],$$

$$k_m^n[p] = (-1)^m (2m+p-2) \frac{2^{2n+p-3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\Pi \frac{2n+p-3}{2}\right)^2}{\Pi(n-m)\,\Pi(n+m+p-2)}.$$

Wir machen noch auf den *einfachen Zusammenhang der k mit den c* in Taf. VII. aufmerksam. Man hat nämlich offenbar

$$k_m^n[p] c_m^n[p] = (-1)^{\frac{1}{2}(p-2)} \frac{2m+p-2}{2n+p-1} \sqrt{\pi}.$$

§. 15. Ehe wir zeigen, dass die vorstehende Reihenentwickelung auch für ungrade p gilt, bemerken wir, dass, sobald sie gilt, also zunächst für grade p, man auch hat

$$\int_0^\pi I^n[p, \cos\gamma_1]\sin^{p-2}\gamma_2 d\gamma_2 = 2^{p-2}\sqrt{\pi}\frac{\Pi(n)\Pi\frac{p-3}{2}}{\Pi(n+p-2)} I^n[p, \cos\eta_1]I^n[p, \cos\psi_1].$$

Für $p=2$ ist dies der bekannte Satz von *Legendre* im Handb. §. 67, S. 176.

Man beweist diesen Satz auf der Stelle, indem man die unter dem Integrale befindliche Function $I^n[p, \cos\gamma_1]$ nach Anleitung des §. 14 in eine nach $I^m[p-1, \cos\gamma_2]$, mit veränderlichem m fortschreitende Reihe entwickelt, darauf mit $I^0[p-1, \cos\gamma_2]$, also einer Constanten, und mit $\sin^{p-2}\gamma_2 d\gamma_2$ multiplicirt, und nach γ_2 von 0 bis π integrirt. Die rechte Seite reducirt sich dann, nach Taf. VII., auf das einzige Glied

$$k_0^n[p]I_0^n[p, \cos\eta_1]I_0^n[p, \cos\psi_1]\int_0^\pi (I^0[p-1, \cos\gamma_2])^2\sin^{p-2}\gamma_2 d\gamma_2;$$

das in demselben vorkommende Integral ist, bis auf das Vorzeichen, $c^0[p-1]$.

Anmerkung. Wegen einer Anwendung in dem dritten Abschnitte §. 21 mag hier erwähnt werden, dass zur Ableitung des Satzes es nicht erforderlich ist, die Reihe des §. 14 vollständig zu kennen; eine ungefähre Kenntniss reicht hin. Dass $I^n[p, \cos\gamma_1]$ in eine nach $I^m[p-1, \cos\gamma_2]$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, ist ohne Weiteres klar; zur Ableitung unseres Satzes genügt es schon, wenn man weiss, dass das 0te Glied (d. h. dasjenige, welches $m=0$ entspricht) von der Form

$$vI^n[p, \cos\eta_1]I^0[p-1, \cos\gamma_2]$$

ist, wo v kein η_1 und γ_2, also nur noch ψ_1 und Constante enthält. Unser Integral, welches an der Spitze dieses Paragraphen steht, wird nun, da man aus Taf. VII. weiss, dass nur das 0te Glied der Reihe in Frage kommt,

$$avI^n[p, \cos\eta_1],$$

wenn man setzt

$$a = \int_0^\pi I^0[p-1, \cos\gamma]\sin^{p-2}\gamma d\gamma.$$

Macht man $\eta_1 = 0$, so wird demnach

$$I^n[p, \cos\psi_1]\int_0^\pi \sin^{p-2}\gamma d\gamma = avI^n[p, 1],$$

woraus sich mit Hülfe von Taf. I. sofort av ergiebt.

§. 16. Indem wir nun die Formel des §. 14 für ein ungrades p, von der Form $p = 2\varpi + 3$ ableiten, wollen wir zur Bequemlichkeit des Druckes die Anzahl der Indices vermindern, und als Argument von I^n

$$\cos\gamma = \cos\eta\cos\psi + \sin\eta\sin\psi\cos\gamma_1$$

wählen; es wird ferner eine Grösse

$$\cos\delta = \cos\gamma_1\cos\theta_1 + \sin\gamma_1\sin\theta_1\cos\theta$$

eingeführt.

In der Formel des §. 9 unsrer Arbeit über einige bestimmte Integrale (Band 61, pag. 356 dieses Journals) setzen wir p für n und

$$\begin{aligned} a &= \cos\eta - r\cos\psi, \\ a_1 &= \sin\eta - r\sin\psi\cos\gamma_1, \\ a_2 &= \quad\; - r\sin\psi\sin\gamma_1, \\ a_3 = a_4 &= \text{etc.} = a_p = 0; \end{aligned}$$

dann wird aus derselben die Gleichung erhalten

$$\frac{1}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p-1}{2}}} = b\,\frac{\Pi\frac{p-2}{2}}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_0^{\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{p-2}\theta_1\sin^{p-3}\theta\,d\theta}{[(\cos\eta+i\sin\eta\cos\theta_1)-r(\cos\psi+i\sin\psi\cos\delta)]^{p-1}},$$

wo b ein $p-3$faches Integral

$$\int^{p-3}\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{p-2}\,d\theta_3\ldots d\theta_{p-1} = \frac{2\pi^{\frac{p-2}{2}}}{\Pi\frac{p-4}{2}}$$

bezeichnet. Entwickelt man nun auf der linken und rechten Seite nach aufsteigenden Potenzen von r, so findet man nach Taf. I.

$$I^n[p,\cos\gamma] = \frac{\Pi(n+p-2)}{2^{p-2}\pi\,\Pi n\,\Pi\frac{p-4}{2}}\int_0^{\pi}\frac{M\sin^{p-2}\theta_1\,d\theta_1}{(\cos\eta+i\sin\eta\cos\theta_1)^{n+p-1}},$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$M = \int_0^{\pi}(\cos\psi+i\sin\psi\cos\delta)^n\sin^{p-3}\theta\,d\theta.$$

Zunächst kann M von dem Integralzeichen befreit werden; macht man nämlich

$$(\cos\psi+i\sin\psi\cos\delta)^n = \sum_{m=0}^{m=n} u_m I^m[p-1,\cos\delta],$$

wobei der Werth, den dann u_m hat, sogleich aus der ersten Formel in Taf. VIII. ersichtlich ist, so wird

$$M = \sum_{m=0}^{m=n} u_m \int_0^{\pi} I^m[p-1, \cos\delta] \sin^{p-3}\theta \, d\theta.$$

Der Werth der Integrale, welche in dieser Reihe auftreten, ist aus §. 15 bekannt, da $p-1 = 2\varpi+2$ eine grade Zahl bezeichnet; die Reihe für M, die man so erhält, setzt man in den Ausdruck für $I^n[p, \cos\gamma]$, welcher sich dann in die Summe von Gliedern verwandelt, deren m^{tes}

$$\frac{2m+p-2}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{n+p-4} \frac{\Pi m \, \Pi(n+p-2) \, \Pi \frac{2n+p-3}{2}}{\Pi(n-m) \, \Pi(m+p-3) \, \Pi(m+n+p-2)} v_m I_m^n[p, \cos\psi] I^m[p-1, \cos\gamma_1]$$

ist, und zwar hat man die Summe von $m = 0$ bis $m = n$ zu nehmen. Zur Abkürzung ist hier gesetzt:

$$v_m = \int_0^{\pi} \frac{I^m[p-1, \cos\theta] \sin^{p-2}\theta \, d\theta}{(\cos\eta + i\sin\eta\cos\theta)^{n+p-1}}.$$

Es bleibt noch übrig, das letzte Integral auszuführen. Da $p-3$ grade. $= 2\varpi$ ist, so wird, wenn man $\cos\theta = z$ macht,

$$\sin^{p-3}\theta . I^m[p-1, \cos\theta] = (-1)^{\varpi} \cdot \frac{(z^2-1)^{\varpi}}{2^{m+2\varpi} \Pi(m+\varpi)} \frac{d^{m+2\varpi}(z^2-1)^{m+\varpi}}{dz^{m+2\varpi}},$$

und nach Taf. V.

$$= \frac{(-1)^{\varpi}}{2^{m+2\varpi}} \frac{\Pi(m+2\varpi)}{\Pi m \, \Pi(m+\varpi)} \frac{d^m(z^2-1)^{m+\varpi}}{dz^m}.$$

Setzt man diesen Werth in v_m ein und integrirt m mal durch Theile, führt darauf wieder $\cos\theta$ statt z ein, so wird

$$v_m = \frac{(-i\sin\eta)^m}{2^{m+2\varpi}} \frac{\Pi(m+2\varpi) \, \Pi(m+n+p-2)}{\Pi m \, \Pi(m+\varpi) \, \Pi(n+p-2)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2m+p-2}\theta \, d\theta}{(\cos\eta + i\sin\eta\cos\theta)^{m+n+p-1}}.$$

Den Werth dieses Integrales kennt man aus Taf. VI; berücksichtigt man, dass nach Taf. II

$$(i\sin\eta)^m I_0^{n-m}[p+2m, \cos\eta] = I_m^n[p, \cos\eta],$$

so erhält man den Ausdruck von v_m in der schliesslichen Form; setzt man ihn ein, so entsteht dieselbe Formel für $I^n[p, \cos\gamma]$ bei ungradem p, welche wir im §. 14 für grade p fanden.

Der Beweis, welchen wir hier lieferten, ist eine unmittelbare Uebertragung des von *Jacobi* für die *Laplace*sche Reihe gegebenen; die einzige Schwierigkeit bei der Uebertragung bestand in der Verallgemeinerung der

*Jacobi*schen Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+a_1 i\cos\theta+a_2 i\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{a^2+a_1^2+a_2^2}},$$

welche man in unserer früheren Arbeit über einige bestimmte Integrale kennen lernte.

§. 17. Wir stellen nun die Bezeichnung des §. 14 wieder her. Die dort gewonnene Formel, welche jetzt für grade und ungrade p gilt, setzt nur voraus, dass die ganze Zahl p nicht unter 2 herabsinkt. Ist $p>2$, so kann man dieselbe Fundamentalgleichung wieder anwenden, um die in ihr vorkommenden Grössen $I^m[p-1,\cos\gamma_2]$ noch weiter in ähnliche Reihen zu entwickeln. Ist $p>3$, so kann dasselbe Verfahren noch einmal wiederholt werden, u. s. f. Aus dem einfachen Satze des §. 14 hat man demnach sogleich den allgemeineren:

Ist

$$\begin{aligned}
\cos\gamma_1 &= \cos\eta_1\cos\psi_1+\sin\eta_1\sin\psi_1\cos\gamma_2,\\
\cos\gamma_2 &= \cos\eta_2\cos\psi_2+\sin\eta_2\sin\psi_2\cos\gamma_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\cos\gamma_{p-1} &= \cos\eta_{p-1}\cos\psi_{p-1}+\sin\eta_{p-1}\sin\psi_{p-1}\cos\gamma_p,
\end{aligned}$$

so entsteht $I^n[p,\cos\gamma_1]$ *aus dem Producte*

$$K\,.\,H\,.\,\Psi\,.\,I^{n_{p-1}}[1,\cos\gamma_p],$$

wenn gesetzt ist

$$K=k^n_{n_1}[p]\,k^{n_1}_{n_2}[p-1]\ldots k^{n_{p-2}}_{n_{p-1}}[2],$$

$$H=I^n_{n_1}[p,\cos\eta_1]\,I^{n_1}_{n_2}[p-1,\cos\eta_2]\ldots I^{n_{p-2}}_{n_{p-1}}[2,\cos\eta_{p-1}],$$

$$\Psi=I^n_{n_1}[p,\cos\psi_1]\,I^{n_1}_{n_2}[p-1,\cos\psi_2]\ldots I^{n_{p-2}}_{n_{p-1}}[2,\cos\psi_{p-1}],$$

durch Summation über alle nicht negativen ganzzahligen Werthe (incl. Null) von n_1, n_2, etc., n_{p-1}, *für welche*

$$n-n_1,\quad n_1-n_2,\quad \text{etc.},\quad n_{p-2}-n_{p-1}$$

nicht negativ werden. Die Anzahl der Glieder, aus denen $I^n[p,\cos\gamma_1]$ *besteht, ist also*

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\ldots(p-1)}.$$

§. 18. Nennt man die Kugelfunction

$$P^n(\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta\cos(\theta_1-\psi_1))$$

zur Abkürzung P, dieselbe Function mit den Argumenten

$$\cos\eta\cos\theta+\sin\eta\sin\theta\cos(\theta_1-\eta_1),$$
$$\cos\eta\cos\psi+\sin\eta\sin\psi\cos(\psi_1-\eta_1)$$

resp. P_1 und P_2, so sagt ein bekannter Satz, dass

$$P_2=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}PP_1d\theta_1$$

ist. Wir können dies auch so aussprechen: Sind die a und b solche Constante, dass

$$a^2+a_1^2+a_2^2=1,\quad b^2+b_1^2+b_2^2=1,$$

und bezeichnet man die Functionen P^n mit den Argumenten

$$ax+a_1x_1+a_2x_2,\quad bx+b_1x_1+b_2x_2,\quad ab+a_1b_1+a_2b_2$$

resp. durch P, P_1, P_2, so ist

$$P_2=\frac{2n+1}{4\pi}\int PP_1\frac{dx\,dx_1}{x_2},$$

wenn das Doppelintegral rechts sich über alle Werthe x und x_1 erstreckt, für die $x^2+x_1^2+x_2^2=1$ ist.

Die Verallgemeinerung dieser Formel giebt einen entsprechenden Satz, den wir hier beweisen wollen: Sind die Constanten a und b so beschaffen, dass

$$a^2+a_1^2+\text{etc.}+a_p^2=1,\quad b^2+b_1^2+\text{etc.}+b_p^2=1,$$

bezeichnet man ferner die drei Functionen p^{ter} Ordnung $I^n[p,z]$, deren Argumente z resp.

$$ax+a_1x_1+\text{etc.}+a_px_p,$$
$$bx+b_1x_1+\text{etc.}+b_px_p,$$
$$ab+a_1b_1+\text{etc.}+a_pb_p=\cos\gamma$$

sind, durch I, I_1, I_2, so wird

$$\int I\,I_1\frac{dx\,dx_1\ldots dx_{p-1}}{x_p}=\frac{4\pi^{\frac{p}{2}}}{2n+p-1}I_2,$$

wenn das $p$fache Integral auf der Linken sich über alle Werthe x, x_1, …, x_{p-1} erstreckt, für welche die Gleichung stattfindet

$$x^2+x_1^2+\cdots+x_p^2=1.$$

Zum Beweise kann man sich des Satzes im §. 11 der Arbeit über einige bestimmte Integrale bedienen; setzt man dort $p+1$ statt n, so sieht man,

dass das vielfache Integral, welches wir hier betrachten, sich auf das Doppelintegral

$$\frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{\Pi\frac{p-3}{2}}\int_0^{\pi} I^n[p,\cos\varphi]\sin^{p-1}\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi} I^n[p,\cos\varphi\cos\gamma+\sin\varphi\sin\gamma\cos\varphi_1]\sin^{p-2}\varphi_1\,d\varphi_1$$

reducirt. Nach §. 15 lässt sich das innere Integral ausführen, und giebt zunächst einen constanten Factor, der mit der Constanten vor dem Doppelintegral verbunden

$$\frac{1}{c^n[p]}\cdot\frac{4\pi^{\frac{p}{2}}}{2n+p-1}$$

liefert, dann $I^n[p,\cos\gamma]$, und endlich $I^n[p\cos\varphi]$, welches unter das äussere Integral tritt und dies zu $c^n[p]$ macht.

Man hätte denselben Satz auch mit Hülfe der einfachen Beziehung beweisen können, welche nach der Bemerkung am Schlusse des §. 14 zwischen c und k besteht.

Dritter Abschnitt.

§. 19. Der Ausdruck

$$T=\frac{1}{(\sqrt{(\xi-a)^2+(\xi_1-a_1)^2+\cdots+(\xi_p-a_p)^2})^{p-1}}$$

genügt, wie man weiss, der Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial\xi_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 T}{\partial\xi_p^2}=0,$$

wenn die a irgend welche Constante bezeichnen; zur grösseren Bequemlichkeit im Ausdrucke nehmen wir an, es sei

$$a^2+a_1^2+\cdots+a_p^2=1.$$

Wir schliessen ferner der Kürze halber den Fall $p=1$ aus, in welchem man bekanntlich statt einer Potenz für T einen Logarithmus zu nehmen hat. Setzt man

$$\xi=rx,\quad \xi_1=rx_1,\quad \ldots,\quad \xi_p=rx_p,$$

$$\begin{aligned}
x &= \cos\psi_1, & a &= \cos\eta_1,\\
x_1 &= \sin\psi_1\cos\psi_2, & a_1 &= \sin\eta_1\cos\eta_2,\\
x_2 &= \sin\psi_1\sin\psi_2\cos\psi_3, & &\text{etc.}\quad\text{etc.}\\
&\cdots\cdots\cdots & &\\
x_{p-1} &= \sin\psi_1\sin\psi_2\ldots\sin\psi_{p-1}\cos\psi_p, & &\\
x_p &= \sin\psi_1\sin\psi_2\ldots\sin\psi_{p-1}\sin\psi_p, & &
\end{aligned}$$

so wird die Differentialgleichung, der nun

$$T = \frac{1}{(\sqrt{1-2r\cos\gamma_1+r^2})^{p-1}}$$

genügt, durch Transformation von (5.) in die neuen Coordinaten gefunden. Es hat hier $\cos\gamma_1$ dieselbe Bedeutung wie im §. 17, dessen Bezeichnung wir in diesem Abschnitte beibehalten; nur ist hier $\psi_p-\eta_p$ für γ_p zu setzen. Die Ausführung der Rechnung, welche ich der Güte eines hiesigen Freundes verdanke, giebt folgende Gleichung für T:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\cdot\left[\Delta\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial\psi_1}\cdot\left[\frac{\Delta}{u_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right]+\cdots+\frac{\partial}{\partial\psi_p}\cdot\left[\frac{\Delta}{u_p}\cdot\frac{\partial T}{\partial\psi_p}\right].$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt

$$\begin{aligned}\Delta &= r^p\sin^{p-1}\psi_1\sin^{p-2}\psi_2\ldots\sin\psi_{p-1},\\ u_1 &= r^2,\\ u_2 &= r^2\sin^2\psi_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ u_p &= r^2\sin^2\psi_1\sin^2\psi_2\ldots\sin^2\psi_{p-1}.\end{aligned}$$

Entwickelt man nun T nach aufsteigenden Potenzen von r, so genügt der Coefficient von r^n, also auch $I^n[p,\cos\gamma_1]$ der Gleichung

$$(6.)\qquad 0 = n(n+p-1)I+\sum_{m=1}^{m=p}\frac{w_m}{\sin^{p-m}\psi_m}\frac{\partial}{\partial\psi_m}\cdot\left[\sin^{p-m}\psi_m\frac{\partial I}{\partial\psi_m}\right],$$

in der gesetzt ist

$$w_1 = 1,\qquad \frac{1}{w_m} = (\sin\psi_1\sin\psi_2\ldots\sin\psi_{m-1})^2.$$

Im speciellen Falle $\eta_1 = 0$ wird $\gamma_1 = \psi_1$, also unabhängig von ψ_2, etc., so dass $I^n[p,\cos\psi_1]$ der Gleichung genügt

$$0 = n(n+p-1)I+\frac{1}{\sin^{p-1}\psi_1}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\left[\sin^{p-1}\psi_1\frac{\partial I}{\partial\psi_1}\right].$$

§. 20. Die Function $I^n[p,\cos\gamma_1]$ ist ganz und vom Grade n nach $\cos\gamma_1$, also auch, wegen der Zusammensetzung von $\cos\gamma_1$ aus den x, ganz und vom Grade n nach x, x_1, etc. Die einzelnen Potenzen von $\cos\gamma_1$, die in I^n vorkommen, sind die n^{te}, $n-2^{\text{te}}$, etc., *aber nicht die* $n-1^{\text{te}}$, $n-3^{\text{te}}$, etc.; jede Potenz einzeln in die x umgesetzt giebt eine homogene Function derselben, so dass also unser I^n die Summe von homogenen Functionen n^{ten}, $n-2^{\text{ten}}$, etc. Grades der x ist oder, weil

$$x^2+x_1^2+\text{etc.}+x_p^2 = 1,$$

eine homogene Function der x vom n^{ten} Grade.

Wir wollen nun die Form der allgemeinsten homogenen Function der x vom n^{ten} Grade suchen, welche der Gleichung* (6.) *genügt; sie heisse $X^{(n)}$.

Eine ganze Function der Grössen $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$, etc.; $\sin\psi_1$, $\sin\psi_2$, etc., welche (6.) genügt, ist offenbar die Summe von Gliedern

$$\Psi(L\cos(n_{p-1}\psi_p)+M\sin(n_{p-1}\psi_p)),$$

wenn L und M willkürliche Constante vorstellen, und die Summation sich über die n in derselben Art erstreckt wie im §. 17. Diese Summe werde vorläufig Z genannt; es wird sich zeigen, dass Z mit $X^{(n)}$ übereinstimmt.

Da für $n_{p-1}=0$ das Glied von Z, welches den Sinus enthält, verschwindet, so wird man alle Glieder von Z erhalten, wenn man bei der Summation in dem ersten Gliede von Z (dem Gliede, welches die Cosinus enthält) allen n die Werthe giebt, welche ihnen nach §. 17 zukommen; in dem zweiten Gliede von Z kann man aber den Werth $n_{p-1}=0$ fortlassen, also über n_1, n_2, etc. n_{p-1} erst von 1 an bis n, natürlich wieder so summiren, dass

$$n-n_1, \quad n_1-n_2, \quad \text{etc.}, \quad n_{p-2}-n_{p-1}$$

nicht negativ werden. Man sieht hieraus, dass in Z im Ganzen

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)+n(n+1)\ldots(n+p-2)}{1.2.3\ldots(p-1)}=\sigma$$

willkürliche Constante L und M eintreten; §. 23 zeigt sich, dass diese σ Constante sich nicht zu einer geringeren Zahl zusammenziehen.

§. 21. Ehe wir weiter gehen, wollen wir in diesem Paragraphen über einige Sätze handeln, die im vorigen Abschnitte bereits abgeleitet sind: es wird hierbei klarer werden, wie die Uebertragung der *Laplace*schen Methoden von dem Falle $p=2$ auf den allgemeinen sich zu der Uebertragung der *Jacobi*schen, die man im zweiten Abschnitte kennen lernte, gestaltet.

Den Satz des §. 11 über

$$\int_{-1}^{1} I_\nu^m[p,z]\,I_\nu^n[p,z]\,(z^2-1)^{\frac{p-2}{2}}\,dz$$

kann man auch aus der Differentialgleichung der I_ν^n im §. 4 auf die bekannte *Laplace*sche Art vermittelst Integration durch Theile herleiten. Hier zeigt sich sofort, dass das Integral verschwindet, wenn m und n verschieden sind; sein Werth $c_\nu^n[p]$ in Taf. VII für $m=n$ lässt sich durch dieselbe Methode, indem man die Glieder genauer betrachtet, welche bei der Integration durch Theile vor die Integrale treten, aber nicht ohne Schwierigkeit ermitteln.

Nimmt man an, dass $I^n[p,\cos\gamma_1]$ die Form von Z im vorigen Paragraphen besitzt, so lässt sich die Reihe des §. 17 auch auf folgende Art auf-

finden: Zunächst sieht man leicht ein, dass I dann die Form haben muss:

$$\Sigma L \Psi H I^{n_p - 1}[1, \cos(\psi_p - \eta_p)],$$

wenn L wieder Constante bezeichnet, und die Summation in der früheren Art ausgeführt wird. Hieraus beweist man den Satz des §. 15 auf die Art, welche man dort in der Anmerkung findet, und dann den Satz des §. 18 nach der Methode, welche in jenem Paragraphen angegeben ist. Aus diesem und dem Satze des §. 11 folgt nun unmittelbar

$$(L)^2 c^n_{n_1}[p]\, c^{n_1}_{n_2}[p-1] \cdots = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}p}}{2n+p-1} L,$$

also mit Berücksichtigung des einfachen Zusammenhanges der c und k (§. 14) wird $L = K$, wie man es im §. 17 findet, oder $L = 0$. Erst eine besondere Untersuchung zeigt, dass kein L verschwindet.

§. 22. Wir kehren nun zu den Betrachtungen des §. 20 zurück. Aus dem ersten Theile des Satzes im §. 11 folgt sogleich, dass

$$(a.) \qquad \int Y Z \frac{dx\, dx_1 \ldots dx_{p-1}}{x_p}$$

verschwindet, wenn man die Integration über alle Werthe x, x_1, etc., x_{p-1} ausdehnt, für welche $x^2 + x_1^2 + \text{etc.} + x_p^2 = 1$ wird, und Z unseren Werth im §. 20 vorstellt, Y aber eine Function derselben Art, welche zu einem Werthe m gehört, der von n verschieden ist. Das Integral verschwindet offenbar noch immer, wenn für Y und Z verschiedene Glieder aus dem Ausdrucke gesetzt werden, der im §. 20 mit Z bezeichnet wurde, und auch im Folgenden so heissen soll.

Nimmt man noch den zweiten Theil des Satzes im §. 11 hinzu, so beweist man auch leicht, dass

$$(b.) \qquad \int I^n[p, \cos\gamma_1]\, \overline{Z} \frac{da\, da_1 \ldots da_{p-1}}{a_p} = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}p}}{2n+p-1} Z$$

ist, wenn $\overline{Z}$ den Werth bezeichnet, welcher aus Z dadurch entsteht, dass man alle ψ mit η vertauscht (§. 19) oder alle x mit a, und wenn man so integrirt, dass $a^2 + a_1^2 + \text{etc.} + a_p^2$ gleich 1 wird. Einen speciellen Fall von $(b.)$ hat man bereits im §. 18 kennen gelernt.

Da $I^n[p, \cos\gamma_1]$ eine homogene Function n^{ten} Grades der x ist, so wird nach $(b.)$ auch Z dieselbe Eigenschaft besitzen, indem $\overline{Z}$ nur Constante nach den x, nämlich die a enthält, welche in $I^n[p, \cos\gamma]$ nur in ganzen Potenzen auftreten. Wir haben also das neue Resultat:

Die im §. 20 *angegebene Grösse* Z *ist eine homogene Function* n^{ten} *Grades der* x.

§. 23. Die σ Grössen L und M in Z sind dort mit eben so vielen Grössen $\Psi\cos(n_{p-1}\psi_p)$ und $\Psi\sin(n_{p-1}\psi_p)$, die für den Augenblick u_1, u_2, etc., u_σ heissen sollen, multiplicirt, zwischen denen keine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten stattfinden kann.

Denn wäre $b_1u_1+b_2u_2+\text{etc.}+b_\sigma u_\sigma=0$ eine solche Gleichung, in welcher die b also numerische Constante vorstellen, so würde man vermittelst (*a.*) und (*b.*) im §. 22, durch die ganz bekannte Methode der Coefficientenbestimmung finden, dass jedes b Null sein muss.

Kann man nun, wie es pag. 138 geschieht, nachweisen, dass $X^{(n)}$, d. h. dass die allgemeinste Function n^{ten} Grades der x, welche (6.) genügt, *höchstens* σ Constante linear enthält, mit anderen Worten, dass $X^{(n)}$ die Form hat

$$a_1v_1+a_2v_2+\text{etc.}+a_\tau v_\tau,$$

wo die a willkürliche Constante, die v bestimmte Functionen der x sind und $\tau\leqq\sigma$ ist: *so folgt hieraus bekanntlich die Uebereinstimmung von* $X^{(n)}$ *und* Z. Denn zunächst folgt, dass jede der σ Grössen u (s. oben) sich als lineare Verbindung der v darstellen lässt, dass also z. B.

$$u_m = a_1^{(m)}v_1+a_2^{(m)}v_2+\text{etc.}+a_\tau^{(m)}v_\tau;$$

aus dem Anfange dieses Paragraphen erhellt, dass zwischen den σ rechten Seiten des Gleichungssystemes, welches man aus der obigen Gleichung für $m=1$, etc., $m=\sigma$ findet, keine lineare Gleichung besteht. Hieraus geht hervor, dass $\tau=\sigma$, dann aber, dass jedes v, also auch dass

$$X^{(n)} = a_1v_1+a_2v_2+\text{etc.}+a_\tau v_\tau$$

die Form hat

$$X^{(n)} = b_1u_1+b_2u_2+\text{etc.}+b_\sigma u_\sigma.$$

Es ist offenbar r^nZ^n eine homogene Function n^{ten} Grades der ξ, welche (5.) genügt, $r^nX^{(n)}$ die allgemeinste homogene derartige Function. Wird noch der oben erwähnte Punkt über die Anzahl der Constanten in $X^{(n)}$ und zugleich über die Art ihres Auftretens bewiesen, so hat man also den Satz:

Die allgemeinste homogene Function der x *vom* n^{ten} *Grade, welche* (6.) *genügt, ist*

$$X^{(n)} = \Sigma\Psi\big(L\cos(n_{p-1}\psi_p)+M\sin(n_{p-1}\psi_p)\big);$$

die allgemeinste homogene Function n^{ten} *Grades der* ξ, *welche* (5.) *genügt, ist*

$r^n X^{(n)}$. *Es bedeuten hier L und M im Ganzen*

$$\sigma = (2n+p-1)\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)}$$

willkürliche Constanten; ferner ist

$$\Psi = I^{n}_{n_1}[p, \cos\psi_1]\, I^{n_1}_{n_2}[p-1, \cos\psi_2]\ldots I^{n_{p-2}}_{n_{p-1}}[2, \cos\psi_{p-1}]$$

und die Summation über alle nicht negativen Werthe n_1, n_2, etc., n_p *zu erstrecken, für welche*

$$n-n_1, \quad n_1-n_2, \quad \text{etc.}, \quad n_{p-1}-n_p$$

nicht negativ wird.

Um nun schliesslich das Fehlende über die Anzahl der Constanten nachzutragen, welche $r^n X^{(n)}$ besitzen kann, bezeichnen wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2}+\text{etc.}+\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_p^2}$$

mit ΔV, suchen also die allgemeinste Form einer homogenen Function n^{ten} Grades V von den ξ, welche der Gleichung

$$(c.) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\Delta V = 0$$

genügt. Indem man V nach Potenzen von ξ ordnet, kann man setzen

$$V = f_n+\xi f_{n-1}+\xi^2 f_{n-2}+\text{etc.}+\xi^{n-1} f_1+\xi^n f_0,$$

wo f_0, f_1, etc., f_n homogene Functionen resp. des Grades 0, 1, etc., n von ξ_1, ξ_2, etc., ξ_n vorstellen. Die Gleichung $(c.)$ verlangt dann, dass man habe

$$\Delta f_n+\xi\Delta f_{n-1}+\cdots+\xi^{n-3}\Delta f_3+\xi^{n-2}\Delta f_2$$
$$= 1\,.\,2\,.\,f_{n-2}+2\,.\,3\,.\,\xi f_{n-3}+\cdots+(n-1)(n-2)\xi^{n-3} f_1+n(n-1)\xi^{n-2} f_0,$$

d. h. dass das System von Gleichungen erfüllt werde:

$$1\,.\,2\,.\,f_{n-2}=\Delta f_n, \quad 2\,.\,3\,.\,f_{n-3}=\Delta f_{n-1}, \quad \text{etc.}, \quad n(n-1)f_0=\Delta f_2.$$

Es sind also f_n und f_{n-1} ganz willkürliche, nur nach der Festsetzung homogene Functionen des Grades n und $n-1$ von den p Veränderlichen ξ_1, ξ_2, etc., ξ_p; die übrigen f folgen aus diesen beiden durch die obigen Gleichungen. Eine Function wie f_n oder f_{n-1} ist aber eine lineare Verbindung von ganzen Potenzen der ξ mit resp.

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1\,.\,2\ldots(p-1)}, \qquad \frac{n(n+1)\ldots(n+p-2)}{1\,.\,2\ldots(p-1)}$$

Constanten; hieraus folgt, dass V wirklich nur σ Constante, und zwar in der oben angegebenen Art enthalten kann.

I.
$$\frac{1}{(1-2rz+r^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Pi\frac{p-3}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n I^n[p,z] \quad (p>1)$$

$$-\log(1-2rz+r^2) = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} r^n I^n[1,z]$$

$$n I^n[1,z] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{für} \quad n=0$$

$$I^n[1,z] = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \cos(n.\operatorname{arc}\cos z) = C^n(z) \quad (n>0)$$

$$I^n[2,z] = P^n(z)$$

$$I^n[p,1] = \frac{\Pi\frac{p-3}{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Pi(p+n-2)}{\Pi n\,\Pi(p-2)}$$

II. $\mathfrak{Z}_\nu^n[p,z] = z^{n-\nu} - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n+p-3)} z^{n-\nu-2} + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2\,.\,4(2n+p-3)(2n+p-5)} z^{n-\nu-4} - \text{etc.}$

$$I_\nu^n[p,z] = (\sqrt{z^2-1})^\nu \mathfrak{Z}_\nu^n[p,z]$$

$$I_0^n[p,z] = \mathfrak{Z}_0^n[p,z] \qquad I_\nu^n[2,z] = P_\nu^n(z)$$

$$\mathfrak{Z}_\nu^n[p,z] = \mathfrak{Z}_{\nu+m}^{n+m}[p-2m,z] = \mathfrak{Z}_0^{n-\nu}[p+2\nu,z] = I_0^{n-\nu}[p+2\nu,z]$$

$$I^n[p,z] = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Pi\frac{2n+p-3}{2}}{\Pi n} I_0^n[p,z]$$

III.
$$\frac{d^m I^n[p,z]}{dz^m} = 2^m I^{n-m}[p+2m,z]$$

$$2^\varpi I^n[2\varpi+1,z] = \frac{d^\varpi C^{n+\varpi}(z)}{dz^\varpi}$$

$$2^\varpi I^n[2\varpi+2,z] = \frac{d^\varpi P^{n+\varpi}(z)}{dz^\varpi}$$

$$2^{n-1} C^n(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{n\Pi\frac{2n-1}{2}} \frac{d^n\left((z^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}\right)}{dz^n}$$

$$2^n P^n(z) = \frac{1}{\Pi n} \frac{d^n((z^2-1)^n)}{dz^n}$$

IV.
$$1.3.5\ldots(2n-1) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\,\Pi\frac{2n-1}{2}$$
$$\Pi\frac{n}{2}\,\Pi\frac{n-1}{2} = \frac{\Pi n}{2^n}\sqrt{\pi}$$
$$\int_0^{\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{\Pi\frac{n-1}{2}}{\Pi\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}$$

n ganz und positiv.

V.
$$\frac{(z^2-1)^{\varpi}}{\Pi(n+\varpi)}\,\frac{d^{n+\varpi}(z^2-1)^n}{dz^{n+\varpi}} = \frac{1}{\Pi(n-\varpi)}\,\frac{d^{n-\varpi}(z^2-1)^n}{dz^{n-\varpi}}$$
$$\frac{(z^2-1)^{\frac{2\varpi-1}{2}}}{n\Pi(n+\varpi-1)}\,\frac{d^{\varpi}}{dz^{\varpi}}\cdot\left[\sqrt{z^2-1}\,\frac{d^n(z^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{dz^n}\right] = \frac{d^{n-\varpi}(z^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{\Pi(n-\varpi)\,dz^{n-\varpi}}$$

VI.
$$I^n[p,\cos\gamma] = \frac{\Pi\frac{p-2}{2}\,\Pi(p+n-2)}{\pi\,\Pi n\,\Pi(p-2)}\int_0^{\pi}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^n\sin^{p-2}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\Pi\frac{p-2}{2}\,\Pi(p+n-2)}{\pi\,\Pi n\,\Pi(p-2)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{p-2}\theta\,d\theta}{(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^{n+p-1}}$$
$$\int_0^{\pi}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\theta)^n\sin^p\theta\,d\theta = \frac{\Pi\frac{p-1}{2}\,\Pi\frac{2n+p-1}{2}}{\Pi(p+n)}\,2^{p+n}I_0^n[p+2,\cos\gamma]$$

VII.
$$\int_{-1}^{1}I_\nu^m[p,z]\,I_\nu^n[p,z](z^2-1)^{\frac{p-2}{2}}\,dz = 0 \qquad (m<n)$$
$$c^n[p] = \int_{-1}^{1}(I^n[p,z])^2(z^2-1)^{\frac{p-2}{2}}\,dz$$
$$c_\nu^n[p] = \int_{-1}^{1}(I_\nu^n[p,z])^2(z^2-1)^{\frac{p-2}{2}}\,dz$$
$$c^n[p] = (-\tfrac{1}{4})^{\frac{p-2}{2}}\,\frac{2}{2n+p-1}\,\frac{\Pi(n+p-2)}{\Pi n}$$
$$\frac{2^{2n+p-1}}{\pi}\,c_\nu^n[p] = (-1)^{\frac{p+2\nu-2}{2}}(2n+p-1)\,\frac{\Pi(n-\nu)\,\Pi(n+\nu+p-2)}{\left(\Pi\frac{2n+p-1}{2}\right)^2}$$

Ausnahme: $n^2c^n[1] = -i$ für $n=0$.

$$\text{VIII.}\quad \frac{(x+z\sqrt{x^2-1})^n}{\Pi n\,\Pi\frac{2n+p-2}{2}} = 2^{p+n-2}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\frac{2\nu+p-1}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(n+\nu+p-1)}\,I_\nu^n[p+1,x]\,I^\nu[p,z]$$

$$I^n[p,\cos\gamma] = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} k_\nu^n[p]\,I_\nu^n[p,\cos\eta]\,I_\nu^n[p,\cos\psi]\,I^\nu[p-1,\cos\gamma_1]$$

$$(-1)^\nu k_\nu^n[p] = \frac{(2\nu+p-2)}{\sqrt{\pi}}\,2^{2n+p-3}\,\frac{\left(\Pi\frac{2n+p-3}{2}\right)^2}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(n+\nu+p-2)}$$

$$\cos\gamma = \cos\eta\cos\psi+\sin\eta\sin\psi\cos\gamma_1$$

$$k_\nu^n[p]\,c_\nu^n[p] = (-1)^{\frac{p-2}{2}}\,\frac{2\nu+p-2}{2n+p-1}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi I^n[p,\cos\gamma]\sin^{p-2}\gamma_1\,d\gamma_1 = 2^{p-2}\,\frac{\Pi n\,\Pi\frac{p-3}{2}}{\Pi(n+p-2)}\,I^n[p,\cos\eta]\,I^n[p,\cos\psi]$$

$$\int I^m[p,ax+a_1x_1+\text{etc.}+a_px_p]\,I^n[p,bx+b_1x_1+\text{etc.}+b_px_p]\,\frac{dx\,dx_1\dots dx_{p-1}}{x_p} = 0 \quad (m<n)$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{p}{2}}}{2n+p-1}\,I^n[p,\,ab+a_1b_1+\text{etc.}+a_pb_p] \quad (m=n)$$

wenn $\quad a^2+a_1^2+\text{etc.}+a_p^2 = b^2+b_1^2+\text{etc.}+b_p^2 = 1$

$$x^2+x_1^2+\dots+x_p^2 = 1.$$

Halle, November 1862.

Ueber die *Steiner*schen Gegenpunkte, welche durch zwei in eine Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind.

(Von Herrn *von Staudt* in Erlangen.)

---

1. Der Schnittpunkt der drei Geraden, welche die Eckpunkte eines in eine Curve zweiter Ordnung beschriebenen Dreiecks mit den Polen der ihnen gegenüberliegenden Seiten verbinden, soll der Kürze wegen der Pol des Dreiecks, die Polare dieses Punktes aber zugleich auch die Polare des Dreiecks in Hinsicht auf die Curve heissen.

2. Liegen zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, welche in eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung beschrieben sind, perspectivisch, so dass also die drei Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 in einem Punkte S sich schneiden, so sind die Pole der Dreiecke entweder durch den Punkt S und dessen Polare s harmonisch getrennt, oder sie fallen mit dem Punkte S oder mit einem Punkte der Geraden s zusammen. Da nämlich in dem involutorischen ebenen Systeme, dessen Ordnungspunkt der Punkt S und dessen Ordnungslinie die Gerade s ist, den Punkten A_1, A_2, A_3 die Punkte B_1, B_2, B_3 und den Geraden, welche die Curve in den ersteren Punkten berühren, die Geraden zugeordnet sind, welche die Curve in den letzteren Punkten berühren, so ist in dem erwähnten Systeme auch dem Pole des einen Dreiecks der Pol des anderen zugeordnet, woraus der Satz folgt.

Wenn die Gerade A_1B_1 durch den Pol von A_2A_3 geht, folglich die Punkte A_1, A_2, B_1, A_3 aus jedem Punkte der Curve durch einen harmonischen Strahlenbüschel projicirt werden, so geht die Gerade B_2A_3 durch den Schnittpunkt R von A_1B_1 und s, welcher zu den drei Punkten A_1, S, B_1 der vierte harmonische Punkt ist. Ist der Punkt S der Pol des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und also auch des Dreiecks $B_1B_2B_3$, so sind auch die Geraden A_2B_3, A_3B_1 durch die Geraden A_3B_2, A_3A_2 und mithin die Punkte S, B_1 durch den Punkt R und die Gerade A_2A_3 harmonisch getrennt.

3. Durch eine Curve zweiter Ordnung, einen in ihr liegenden Punkt A_1 und einen von ihr eingeschlossenen Punkt S ist ein in die Curve beschriebenes Dreieck bestimmt, von welchem der erstere der gegebenen Punkte ein Eckpunkt, der letztere aber der Pol ist.

Es sei s die Polare des Punktes S und U der Pol der Geraden SA_1, welche die Curve in noch einem Punkte B_1 schneidet. Es werde ferner die Curve von demjenigen Strahle des Büschels U, welcher vom Strahle s durch die Punkte S, B_1 harmonisch getrennt ist, in den Punkten A_2, A_3, von der Geraden SA_2 auch noch im Punkte B_2 und von der Geraden SA_3 auch noch im Punkte B_3 geschnitten. Da nun die Gerade A_1B_1 durch den Pol von A_2A_3 geht, so geht die Gerade A_3B_2 durch den Schnittpunkt R von A_1B_1 und s. Weil ferner die Punkte S, B_1 durch den Punkt R und die Gerade A_3A_2, folglich die Geraden A_3B_3, A_3B_1 durch die Geraden A_3B_2, A_3A_2 harmonisch getrennt sind, so geht die Gerade A_2B_2 durch den Pol von B_1B_3 und also auch durch den Pol von A_1A_3, daher der Punkt S der Pol des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ist. Und wenn der Punkt S der Pol des Dreiecks $A_1A_2A_3$ sein soll, so muss die Gerade A_2A_3 durch den Punkt U gehen und (2) von der Geraden s durch die Punkte S, B_1 harmonisch getrennt sein.

4. Wenn zwei in eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B\,B_2B_3$ einen gemeinschaftlichen Pol P haben und in der Curve der Sinn $A_1A_2A_3$ mit dem Sinne $B_1B_2B_3$ übereinstimmt, so schneiden die drei Geraden A_1B_1, A_2B_3, A_3B_2 die Polare p des Punktes P in einem und demselben Punkte.

Es sei S_1 der Schnittpunkt von A_1B_1 und p, so kann man in die Curve ein Dreieck $B_1D_2D_3$ beschreiben, so dass die drei Geraden A_1B_1, A_2D_2, A_3D_3 im Punkte S_1 sich schneiden, dessen Polare durch den Punkt P geht, daher (2) dieser Punkt auch der Pol des Dreiecks $B_1D_2D_3$ ist. Da ferner im Punkte S_1 zwei reelle Tangenten der Curve sich schneiden, mithin in dieser der Sinn $B_1D_3D_2$ mit dem Sinne $A_1A_2A_3$ und also auch mit dem Sinne $B_1B_2B_3$ übereinstimmt, so muss (3) der Punkt D_3 mit B_2 und D_2 mit B_3 zusammenfallen, woraus der Satz folgt. Ebenso wird die Gerade p von den drei Geraden A_2B_2, A_1B_3, A_3B_1 in einem und demselben Punkte S_2 und von den drei Geraden A_3B_3, A_1B_2, A_2B_1 in einem und demselben Punkte S_3 geschnitten.

5. Die Eckpunkte von zwei in eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung beschriebenen Dreiecken $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sind die Eckpunkte von sechs Sechsecken, deren keines mit einem der Dreiecke eine Seite gemein hat. Die Gerade, welche den Schnittpunkt von A_1B_2 und A_2B_1 mit dem Schnittpunkte von A_2B_3 und A_3B_2 verbindet und also auch durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Seiten des Sechsecks $A_1B_2A_3B_1A_2B_3$ geht, soll durch $\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}$,

die *Pascal*sche Linie desjenigen der erwähnten Sechsecke, in welchem den Punkten A_2, A_3, A_1 die Punkte B_1, B_2, B_3 gegenüberliegen, durch $\binom{A_2A_3A_1}{B_1B_2B_3}$ bezeichnet werden, u. s. w.

Ebenso kann man, wenn m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 sechs Strahlen eines Strahlenbündels zweiter Ordnung sind, den Punkt, welcher mit je zwei einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Sechsseits $m_1n_2m_3n_1m_2n_3$ in einer und derselben Geraden liegt, durch $\binom{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3}$ bezeichnen.

6. Wenn von drei in eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung beschriebenen Dreiecken $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ jedes der beiden ersteren mit dem dritten perspektivisch liegt, so geht die Gerade $\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}$ sowohl durch den Schnittpunkt S der drei Geraden A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 als auch durch den Schnittpunkt T der drei Geraden B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3.

Da nämlich zwei einander gegenüberliegende Seiten des Sechsecks $A_1C_1B_1A_2C_2B_2$ im Punkte S, zwei andere solche Seiten im Punkte T sich schneiden, so geht die Gerade ST auch durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Seiten A_1B_2, A_2B_1. Ebenso lässt sich beweisen, dass die Gerade ST durch den Schnittpunkt von A_2B_3 und A_3B_2 geht, woraus der Satz folgt.

7. Wenn zwei in eine und dieselbe Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ verschiedene Pole P, Q haben, so schneiden sich die drei Geraden

$$\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}, \quad \binom{A_2A_3A_1}{B_1B_2B_3}, \quad \binom{A_3A_1A_2}{B_1B_2B_3}$$

in dem einen und die drei Geraden

$$\binom{A_1A_3A_2}{B_1B_2B_3}, \quad \binom{A_3A_2A_1}{B_1B_2B_3}, \quad \binom{A_2A_1A_3}{B_1B_2B_3}$$

in dem anderen von den beiden Punkten M, N, welche sowohl durch die Punkte P, Q als auch durch die Punkte F, G harmonisch getrennt sind, in welchen die Curve von der Geraden PQ geschnitten wird.

Es sei, wenn in der Curve der Sinn $A_1A_2A_3$ mit dem Sinne $B_1B_2B_3$ übereinstimmt, der Punkt M, im entgegengesetzten Falle aber der Punkt N derjenige von den beiden Punkten M, N, in welchem zwei reelle Tangenten der Curve sich schneiden. Beschreibt man nun in die Curve die Dreiecke $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, so dass die Geraden B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 im Punkte M, die Geraden B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 aber im Punkte N sich schneiden, so stimmt in der Curve der Sinn $C_1C_2C_3$ mit dem Sinne $A_1A_3A_2$, der Sinn $D_1D_2D_3$ aber

mit dem Sinne $A_1A_2A_3$ überein. Weil ferner die Punkte P, Q durch den Punkt M und dessen Polare und ebenso durch den Punkt N und dessen Polare harmonisch getrennt sind, so ist (2) der Punkt P auch der Pol der Dreiecke $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, daher (4) das erstere auch mit jedem der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_1$, $A_3A_1A_2$, das letztere aber auch mit jedem der Dreiecke $A_1A_3A_2$, $A_3A_2A_1$, $A_2A_1A_3$ perspectivisch liegt, woraus (6) der Satz folgt. Ein anderer Beweis des Satzes ist in der nächstfolgenden Nummer enthalten.

Dass die *Steiner*schen Gegenpunkte M, N mit den Punkten P, Q in einer und derselben Geraden liegen, hat schon Herr *Grossmann* gefunden und im LVIII. Bande dieses Journals bewiesen. Dass aber die Punkte M, N durch die vier Punkte P, Q, F, G auf die obige Art bestimmt sind, scheint demselben entgangen zu sein, was die nächste Veranlassung zu diesem Aufsatze gegeben hat.

Wenn die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ einen gemeinschaftlichen Pol P haben und in der Curve der Sinn $A_1A_2A_3$ mit dem Sinne $B_1B_2B_3$ übereinstimmt, so fallen die drei ersteren der oben erwähnten Geraden mit der Polare des Punktes P zusammen, während die drei letzteren in diesem Punkte sich schneiden.

8. Bezieht man zwei in einer und derselben Curve zweiter Ordnung liegende Punktgebilde projectivisch so auf einander, dass den Punkten A_1, A_2, A_3 des einen Gebildes die Punkte B_1, B_2, B_3 des anderen entsprechen, so entsprechen den (imaginären) Punkten X, X_1, in welchen die Curve von der Polare des Dreiecks $A_1A_2A_3$ geschnitten wird, die Punkte Y, Y_1, in welchen die Curve von der Polare des Dreiecks $B_1B_2B_3$ geschnitten wird. Da nun die zu einander projektivischen Strahlenbüschel, von welchen der eine das erstere Gebilde aus dem Punkte B_1, der andere aber das letztere aus dem Punkte A_1 projicirt, den Strahl A_1B_1 entsprechend gemein haben, so liegen die Punkte, in welchen die Strahlen B_1A_2, B_1A_3, B_1X, B_1X_1 von den Strahlen A_1B_2, A_1B_3, A_1Y, A_1Y_1 geschnitten werden, in einer und derselben Geraden, daher die Gerade $\left(\begin{smallmatrix}A_1A_2A_3\\B_1B_2B_3\end{smallmatrix}\right)$ auch durch den Schnittpunkt M von XY_1 und X_1Y geht. Eben so wird bewiesen, dass die beiden folgenden der in der vorigen Nummer betrachteten sechs *Pascal*schen Linien durch den Punkt M, die drei übrigen aber durch den Schnittpunkt N von XY und X_1Y_1 gehen. Weil aber in jedem der Punkte M, N zwei einander gegenüberliegende Seiten des vollständigen Vierecks XYX_1Y_1 sich schneiden, so sind

sie sowohl durch die Punkte F, G, in welchen die Gerade MN die Curve schneidet, als auch durch die Pole P, Q der beiden übrigen Seiten harmonisch getrennt.

Bemerkt wird noch, dass die zu einander projektivischen Gebilde $A_1A_2A_3\ldots$, $B_1B_2B_3\ldots$ die Punkte entsprechend gemein haben, in welchen die Curve von der Geraden $\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}$ geschnitten wird. Werden aber zwei in der Curve liegende Punktgebilde projektivisch so auf einander bezogen, dass den Punkten A_1, A_2, A_3 des einen Gebildes die Punkte A_2, A_3, A_1 des anderen entsprechen, so haben sie die Punkte X, X_1 entsprechend gemein, daher die Polare des Dreiecks $A_1A_2A_3$ auch durch $\binom{A_1A_2A_3}{A_2A_3A_1}$ bezeichnet werden kann.

9. Wenn die Punkte A_1, A_2, A_3 in der einen, die Punkte B_1, B_2, B_3 aber in der anderen von zwei sich schneidenden Geraden liegen, so giebt es in der ersteren zwei Punkte X, X_1, in der letzteren aber zwei Punkte Y, Y_1, so dass die Gebilde $A_1A_2A_3XX_1$, $A_2A_3A_1XX_1$, $B_1B_2B_3YY_1$ zu einander projectivisch sind. Da alsdann zu diesen Gebilden auch noch die Gebilde $A_3A_1A_2XX_1$, $A_1A_3A_2X_1X$, $A_3A_2A_1X_1X$, $A_2A_1A_3X_1X$ projectivisch sind, so gehen wieder von den bisher betrachteten sechs *Pascal*schen Linien die drei ersteren durch den Schnittpunkt von XY_1 und X_1Y, die drei letzteren aber durch den Schnittpunkt von XY und X_1Y_1.

Indem der Wurf $A_1A_2XX_1$ zu dem Wurfe $A_2A_3XX_1$ und also auch zu dem Wurfe $A_3A_2X_1X$ projektivisch ist, so ist $A_1A_3.A_2A_2.XX_1$ eine Involution. Sucht man also zu den drei Punkten A_1, A_2, A_3 den vierten harmonischen Punkt H_2, so ist dieser vom Punkte A_2 auch durch die Punkte X, X_1 harmonisch getrennt. Eben so sind, wenn $A_2A_3A_1H_3$, $A_3A_1A_2H_1$ harmonische Würfe sind, die Punkte A_3, H_3 so wie auch die Punkte A_1, H_1 durch die Punkte X, X_1 harmonisch getrennt.

10. Durch drei Gerade a_1, a_2, a_3, von welchen keine zwei in einerlei Ebene liegen, und drei Gerade b_1, b_2, b_3, deren jede die drei ersteren schneidet, sind sechs Ebenen bestimmt, deren jede die sechs gegebenen Geraden nur in drei Punkten schneidet. Drei dieser Ebenen schneiden sich in einer Geraden m, die drei übrigen in einer anderen Geraden n.

Die Regelschaar $a_1a_2a_3\ldots$ enthält nämlich zwei Gerade x, x_1, die Regelschaar $b_1b_2b_3\ldots$ aber zwei Gerade y, y_1, so dass die Gebilde $a_1a_2a_3xx_1$, $a_2a_3a_1xx_1$, $b_1b_2b_3yy_1$ zu einander, mithin zu denselben auch die Gebilde $a_3a_1a_2xx_1$, $a_1a_3a_2x_1x$ u. s. w. projectivisch sind. Da nun je zwei zu ein-

ander projectivische Regelschaaren, deren jede die Leitschaar der anderen ist, eine Curve zweiter Ordnung erzeugen, so liegen sowohl die Punkte a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 als auch die Punkte a_2b_1, a_3b_2, a_1b_3 so wie auch die Punkte a_3b_1, a_1b_2, a_2b_3 mit den beiden Punkten xy, x_1y_1 in einerlei Ebene, woraus hervorgeht, dass drei der im Satze erwähnten Ebenen in der Geraden m sich schneiden, welche den Punkt xy mit dem Punkte x_1y_1 verbindet. Eben so schneiden sich die drei übrigen in der Geraden n, welche die Punkte xy_1, x_1y mit einander verbindet.

Schneidet eine Ebene E die sechs gegebenen Geraden in den Punkten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, so schneiden sich, wenn die Ebene durch keine der Geraden m, n geht, die drei Geraden

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2A_3A_1 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3A_1A_2 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$$

in dem in der Ebene E liegenden Punkte der Geraden m und die drei Geraden

$$\begin{pmatrix} A_1A_3A_2 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3A_2A_1 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2A_1A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$$

in dem in der Ebene E liegenden Punkte der Geraden n.

Da nämlich x, x_1, y, y_1, m, n die sechs Kanten eines Tetraeders sind, so werden sie von der Ebene E in den sechs Eckpunkten X, X_1, Y, Y_1, M, N eines vollständigen Vierseits geschnitten. Da ferner die Gebilde $A_1A_2A_3XX_1$, $A_2A_3A_1XX_1$, $B_1B_2B_3YY_1$, sie mögen nun in einer Curve zweiter Ordnung oder in zwei Geraden liegen, zu einander projektivisch sind, so folgt der Satz aus 8. und 9.

Geht die Ebene E durch eine der Geraden m, n, so fallen drei der sechs *Pascal*schen Linien mit dieser Geraden zusammen, während die drei übrigen in dem in der Ebene E liegenden Punkte der anderen sich schneiden.

11. Durch sechs in einerlei Ebene liegende Gerade, von welchen drei m_1, m_2, m_3 in einem Punkte M, die drei übrigen n_1, n_2, n_3 in einem anderen Punkte N sich schneiden, sind im Allgemeinen sechs Curven α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 zweiter Ordnung bestimmt, welche projectivisch so auf einander bezogen werden können, dass auch je sechs homologe Punkte A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 derselben in einer Curve K zweiter Ordnung liegen und überdies die Geraden

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2A_3A_1 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3A_1A_2 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} A_1A_3A_2 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3A_2A_1 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2A_1A_3 \\ B_1B_2B_3 \end{pmatrix}$$

mit den gegebenen Geraden zusammenfallen.

Jede der sechs festen Curven geht durch die beiden Punkte M, N und durch drei von den neun Punkten mn, in welchen nämlich die drei Geraden m von den drei Geraden n geschnitten werden, und zwar geht

α_1 durch m_1n_1, m_2n_2, m_3n_3
α_2 durch m_1n_2, m_2n_3, m_3n_1
α_3 durch m_1n_3, m_2n_1, m_3n_2
β_1 durch m_1n_1, m_2n_3, m_3n_2
β_2 durch m_1n_2, m_2n_1, m_3n_3
β_3 durch m_1n_3, m_2n_2, m_3n_1.

Legt man durch den Punkt M die Geraden μ_1, μ_2, μ_3 und durch den Punkt N die Geraden ν_1, ν_2, ν_3, so dass $m_3m_1m_2\mu_1$, $m_1m_2m_3\mu_2$, $m_2m_3m_1\mu_3$, $n_3n_1n_2\nu_1$, $n_1n_2n_3\nu_2$, $n_2n_3n_1\nu_3$ harmonische Würfe sind, so geht nun auch jede der sechs festen Curven durch drei von den neun Punkten $\mu\nu$, so dass jede der drei Curven α jede der drei Curven β in den Punkten M, N und in zwei einander gegenüberliegenden von den achtzehn Punkten mn, $\mu\nu$ schneidet, wenn man nämlich dem Punkte m_1n_1 den Punkt $\mu_1\nu_1$, dem Punkte m_1n_2 den Punkt $\mu_1\nu_2$ u. s. w. gegenüberliegend nennt.

Der Strahlenbüschel M enthält zwei Strahlen x, x_1, der Strahlenbüschel N zwei Strahlen y, y_1, so dass die Gebilde $m_1m_2m_3xx_1$, $m_2m_3m_1xx_1$, $n_1n_2n_3yy_1$ zu einander, mithin zu denselben auch die Gebilde $m_3m_1m_2xx_1$, $m_1m_3m_2x_1x$ u. s. w. projectivisch sind, daher die drei Curven α in den vier Punkten M, N, xy, x_1y_1, die drei Curven β aber in den vier Punkten M, N, xy_1, x_1y sich schneiden.

Die Punkte $\binom{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3}$, $\binom{m_3m_1m_2}{n_1n_2n_3}$, $\binom{m_2m_3m_1}{n_1n_2n_3}$ sind die Pole der Geraden MN in Hinsicht auf die Curven α_1, α_2, α_3 und liegen daher in der Geraden p, welche den Punkt xy_1 mit dem Punkte x_1y verbindet. Die Punkte $\binom{m_1m_3m_2}{n_1n_2n_3}$, $\binom{m_2m_1m_3}{n_1n_2n_3}$, $\binom{m_3m_2m_1}{n_1n_2n_3}$ sind die Pole der Geraden MN in Hinsicht auf die Curven β_1, β_2, β_3 und liegen daher in der Geraden q, welche den Punkt xy mit dem Punkte x_1y_1 verbindet.

In der Geraden p liegen auch die Punkte U_1, U_2, U_3, welche die Pole der Geraden q in Hinsicht auf die Curven α_1, α_2, α_3 sind. Ebenso liegen in der Geraden q die Punkte V_1, V_2, V_3, welche die Pole der Geraden p in Hinsicht auf die Curven β_1, β_2, β_3 sind. Jede der neun Geraden UV geht durch zwei einander gegenüberliegende von den achtzehn Punkten mn, $\mu\nu$. Durch jeden der Punkte U, V gehen aber auch sechs von den sechs

und dreissig Geraden, deren jede nur eine der Curven α, β in einem der Punkte mn und zugleich in einem der Punkte $\mu\nu$ schneidet.

Die neun Strahlenbüschel, welche die Punkte $\mu\nu$ zu Mittelpunkten haben, können projectivisch so auf einander bezogen werden, dass je zwei Büschel, deren Mittelpunkte mit dem Punkte M oder mit dem Punkte N und also auch mit dem Mittelpunkte eines dritten Büschels in einer und derselben Geraden liegen, ein gerades Gebilde erzeugen, welches im ersteren Falle in derjenigen Geraden n, im letzteren aber in derjenigen Geraden m liegt, welche vom Mittelpunkte des dritten Büschels durch die Mittelpunkte der beiden ersteren Büschel harmonisch getrennt ist. Je drei Büschel, deren Mittelpunkte in einer und derselben von den sechs Curven α, β liegen, erzeugen diese Curve. Es sind hierdurch auch die sechs erwähnten Curven auf die Büschel und daher auch auf einander projectivisch bezogen und zwar auf die im Satze angegebene Weise. Die Curve K geht immer durch die vier Punkte xy, x_1y_1, xy_1, x_1y.

12. Wenn zwei Curven zweiter Ordnung zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit einander gemein haben und jede auch noch durch zwei ausserhalb der anderen liegende Eckpunkte des Vierseits geht, so schneiden sich die Geraden, welche die eine, gleichviel welche, von den beiden Curven in jenen gemeinschaftlichen Punkten berühren, und die Geraden, welche der anderen in den übrigen gemeinschaftlichen Punkten der beiden Curven sich anschmiegen, in einem und demselben Punkte. Eine solche Lage hat, was die in der vorigen Nummer betrachteten Curven anbelangt, jede der drei Curven α_1, α_2, α_3 zu jeder der drei Curven β_1, β_2, β_3 und jede dieser sechs Curven zu jeder Curve K zweiter Ordnung, welche durch sechs homologe Punkte A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 derselben geht. Es schneiden sich daher die drei Geraden, welche die Curven α_1, α_2, α_3 in den Punkten A_1, A_2, A_3 berühren, in dem Punkte Q, welcher in Hinsicht auf die Curve K der Pol der Geraden q und zugleich der Pol des Dreiecks $B_1B_2B_3$ ist. Die drei Geraden aber, welche die Curven β_1, β_2, β_3 in den Punkten B_1, B_2, B_3 berühren, schneiden sich in dem Punkte P, welcher vom Punkte Q durch die Punkte M, N harmonisch getrennt und in Hinsicht auf die Curve K der Pol der Geraden p und des Dreiecks $A_1A_2A_3$ ist.

Bewegen sich die sechs Punkte A, B in den sechs Curven α, β als homologe Punkte derselben, so drehen sich die neun Geraden AB um die neun Punkte $\mu\nu$, während die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 um die Punkte

U_1, U_2, U_3 und die Geraden B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 um die Punkte V_1, V_2, V_3 sich drehen. Die Geraden PA_1, PA_2, PA_3, QB_1, QB_2, QB_3, welche die Curve K in noch sechs homologen Punkten der Curven α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 schneiden, drehen sich um die Punkte, welche in Hinsicht auf diese Curven die Pole der Geraden MN sind. Fällt irgend einer der drei Punkte A in die Gerade p, so fallen alle drei in diese Gerade, die drei Punkte B aber in die Gerade q, so dass alsdann die Curve K in den Inbegriff von zwei Geraden übergeht.

Die Aufgabe: in eine gegebene Curve zweiter Ordnung, welche (11) durch die vier Punkte xy, x_1y_1, xy_1, x_1y geht, zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ zu beschreiben, so dass die Geraden $\binom{A_1A_2A_3}{B_1B_2B_3}$, $\binom{A_2A_3A_1}{B_1B_2B_3}$ u. s. w. mit den gegebenen Geraden m_1, m_2 u. s. w. zusammenfallen, lässt nach dem Obigen zwei Auflösungen zu.

Erlangen, 1862.

Ueber die Determinante, deren Elemente die Quadrate der sechszehn Verbindungslinien der Eckpunkte zweier beliebiger Tetraeder sind.

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

I.

Das Product der Volumina zweier beliebiger Tetraeder P und Π kann bekanntlich als rationale Function der Quadrate der sechszehn Verbindungslinien der Eckpunkte der beiden Tetraeder und zwar in Determinantenform ausgedrückt werden. Sind nämlich $E_1E_2E_3E_4$ und $\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\mathrm{E}_3\mathrm{E}_4$ die Ecken von P und Π und bezeichnet man das Quadrat der Strecke $E_i\mathrm{E}_k$ durch e_{ik} so ist, wie bekannt,

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 288 E_1E_2E_3E_4 . \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\mathrm{E}_3\mathrm{E}_4 .$$

Aus dieser Gleichung leitet man, indem man beide Tetraeder congruiren lässt, u. A. unmittelbar die Gleichung her, welche das Volumen eines Tetraeders durch seine sechs Kanten ausdrückt. Der betreffenden Formel steht aber bekanntlich eine andere von *Crelle* (math. Aufs.), *Joachimsthal* (Bd. 40 d. J.), *v. Staudt* (Bd. 47 d. J.) behandelte gegenüber, mittelst welcher das Product Pr (wo r der Halbmesser der dem P umschriebenen Kugel) durch die sechs Kanten des Tetraeders ausgedrückt wird. Zu dieser letzteren Formel lässt sich aber, wie ich sogleich zeigen werde, ebenfalls eine allgemeinere finden, vermöge welcher, wenn ϱ der Radius der dem Π umschriebenen Kugel ist, das Product $Pr.\Pi\varrho$ (in ähnlicher Weise, wie das Product $P\Pi$ in obiger Gleichung) durch eine aus den Quadraten jener sechszehn Linien gebildete Determinante und durch den Winkel, unter welchem sich die beiden Kugeln schneiden, in einfachster Weise ausgedrückt werden kann. Nennen wir nämlich diesen Winkel φ, so behaupten wir, dass

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 576 Pr.\Pi\varrho.\cos\varphi.$$

Nehmen wir, um dies zu beweisen, ein rechtwinkliges Coordinatensystem an und nennen x_i, y_i, z_i die Coordinaten von E_i; ξ_i, η_i, ζ_i die Coordinaten von E_i, seien endlich a, b, c und α, β, γ die Coordinaten der Mittelpunkte C und I' der dem P und Π umschriebenen Kugeln, so erhalten wir zunächst für das Quadrat der Centralen CI' die Gleichung

$$(3.)\qquad (a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2 = r^2+\varrho^2+2r\varrho\cos\varphi.$$

Ferner ist

$$(4.)\qquad (x_i-\xi_k)^2+(y_i-\eta_k)^2+(z_i-\zeta_k)^2 = e_{ik},$$

$$(5.)\qquad (x_i-a)^2+(y_i-b)^2+(z_i-c)^2 = r^2,$$

$$(5^*.)\qquad (\xi_k-\alpha)^2+(\eta_k-\beta)^2+(\zeta_k-\gamma)^2 = \varrho^2.$$

Durch Addition von (3.) und (4.), ferner von (5.) und (5*.), und nachherige Subtraction erhält man

$$(6.)\qquad (x_i-\alpha)(\xi_k-a)+(y_i-\beta)(\eta_k-b)+(z_i-\gamma)(\zeta_k-c)+r\varrho\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}e_{ik}.$$

Letztere Gleichung bildet das Schema für sechszehn Gleichungen, welche man erhält, wenn man den Indices allmählig sämmtliche Werthe von 1 bis 4 ertheilt. Aus diesen sechszehn Gleichungen ergiebt sich aber unter Benutzung des Multiplicationstheorems für Determinanten, die nachfolgende

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e_{11} & -\frac{1}{2}e_{12} & -\frac{1}{2}e_{13} & -\frac{1}{2}e_{14} \\ -\frac{1}{2}e_{21} & -\frac{1}{2}e_{22} & -\frac{1}{2}e_{23} & -\frac{1}{2}e_{24} \\ -\frac{1}{2}e_{31} & -\frac{1}{2}e_{32} & -\frac{1}{2}e_{33} & -\frac{1}{2}e_{34} \\ -\frac{1}{2}e_{41} & -\frac{1}{2}e_{42} & -\frac{1}{2}e_{43} & -\frac{1}{2}e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi & x_1-\alpha & y_1-\beta & z_1-\gamma \\ r\cos\varphi & x_2-\alpha & y_2-\beta & z_2-\gamma \\ r\cos\varphi & x_3-\alpha & y_3-\beta & z_3-\gamma \\ r\cos\varphi & x_4-\alpha & y_4-\beta & z_4-\gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varrho & \xi_1-a & \eta_1-b & \zeta_1-c \\ \varrho & \xi_2-a & \eta_2-b & \zeta_2-c \\ \varrho & \xi_3-a & \eta_3-b & \zeta_3-c \\ \varrho & \xi_4-a & \eta_4-b & \zeta_4-c \end{vmatrix}.$$

Somit ist

$$\tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} r\varrho\cos\varphi.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber ohne Weiteres die Gleichung (2.): und zwar erhalten wir aus der letzteren durch Benutzung von (1.) zugleich die nachfolgende

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} -\frac{1}{2r\varrho\cos\varphi} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

II.

Die Gleichung (2.) giebt zunächst folgenden bemerkenswerthen Satz: *Drehen sich zwei Tetraeder auf beliebige Weise um die als unbeweglich gedachten Mittelpunkte der ihnen umschriebenen Kugeln, so behält die Determinante*

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix}$$

beständig denselben Werth.

Lassen wir ferner beide Tetraeder congruiren, indem wir $e_{ik} = e_{ki}$, $e_{ii} = 0$, $\cos\varphi = -1$ setzen, so erhalten wir aus (2.) die schon oben erwähnte bekannte Gleichung

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{12} & 0 & e_{23} & e_{24} \\ e_{13} & e_{23} & 0 & e_{34} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} & 0 \end{vmatrix} = -576P^2r^2,$$

in welcher sich bekanntlich die Determinante in vier Factoren zerlegen lässt. Ebenso giebt auch die Formel (7.) einen Ausdruck für den Radius der dem P umschriebenen Kugel.

Setzen wir in (2.) $\cos\varphi = +1$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die äussere Berührung, setzen wir $\cos\varphi = -1$, die für die innere Berührung der beiden Kugeln. Durch Verbindung von (2.) mit (8.) erhält man so eine Bedingungsgleichung, welche sämmtliche acht und zwanzig Verbindungslinien der acht Punkte $E_1E_2E_3E_4$, $E_1E_2E_3E_4$ enthält. Bezeichnen wir nämlich durch ∂_{ik} das Quadrat von E_iE_k, und durch ∂'_{ik} das Quadrat von E_iE_k, so heisst diese Gleichung

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 0 & \partial_{12} & \partial_{13} & \partial_{14} \\ \partial_{12} & 0 & \partial_{23} & \partial_{24} \\ \partial_{13} & \partial_{23} & 0 & \partial_{34} \\ \partial_{14} & \partial_{24} & \partial_{34} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \partial'_{12} & \partial'_{13} & \partial'_{14} \\ \partial'_{12} & 0 & \partial'_{23} & \partial'_{24} \\ \partial'_{13} & \partial'_{23} & 0 & \partial'_{34} \\ \partial'_{14} & \partial'_{24} & \partial'_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Lassen wir in (2.) E_1 mit E_1, E_2 mit E_2, E_3 mit E_3, nicht aber E_4 mit E_4 zusammenfallen und setzen $\cos\varphi = -1$, so erhalten wir in Verbindung mit (8.) eine Bedingungsgleichung dafür, dass die fünf Punkte $E_1 E_2 E_3 E_4 \mathrm{E}_4$ auf der Oberfläche einer Kugel liegen. Diese Gleichung enthält nur die zehn Verbindungslinien jener fünf Punkte und muss daher mit der von *Cayley* für diesen Fall gefundenen Bedingungsgleichung dem Wesen nach übereinstimmen, obwohl sie der äusseren Form nach von ihr verschieden ist.

III.

Als der bemerkenswertheste unter den besonderen Fällen, welche die Gleichung (2.) umfasst, erscheint derjenige, in welchem $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Wir erhalten dann den Satz: *Sind die beiden den Tetraedern P und Π umschriebenen Kugeln orthogonal, so ist die Determinante*

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

und umgekehrt: *ist diese Determinante* $= 0$, *so sind die beiden Kugeln orthogonal.* Das letztere folgt daraus, dass in dem Product $Pr \,.\, \Pi\varrho \,.\cos\varphi$ einer der beiden Factoren Pr und $\Pi\varrho$ nur dann gleich Null sein kann, wenn die Ecken des betreffenden Tetraeders in einem Kreise liegen, (denn liegen die vier Ecken in einer Ebene und nicht in einem Kreise, so ist zwar das betreffende Tetraeder gleich Null, dagegen der Radius der Kugel unendlich gross, das Product Pr aber hat dann immer noch einen endlichen Werth). Liegen aber die vier Ecken in einem Kreise, so lässt sich durch letzteren doch stets eine Kugel legen, welche der anderen orthogonal ist.

Bezeichnen wir nun den Coefficienten von e_{ik} in der Entwickelung der Determinante $\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix}$ durch ε_{ik}, so ist beispielsweise

$$\varepsilon_{12} = -\begin{vmatrix} e_{21} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix},$$

folglich mit Berücksichtigung von (6.) (wenn man dort $\cos\varphi = 0$ setzt) und mit Anwendung des Multiplicationsgesetzes für Determinanten

$$\tfrac{1}{8}\varepsilon_{12} = \begin{vmatrix} x_2-\alpha & y_2-\beta & z_2-\gamma \\ x_3-\alpha & y_3-\beta & z_3-\gamma \\ x_4-\alpha & y_4-\beta & z_4-\gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1-a & \eta_1-b & \zeta_1-c \\ \xi_3-a & \eta_3-b & \zeta_3-c \\ \xi_4-a & \eta_4-b & \zeta_4-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Demnach ist

$$\varepsilon_{12} = 288 I' E_2 E_3 E_4 . C \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4 = 288 I' E_2 E_3 E_4 . C \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4 \mathrm{E}_1 .$$

Eben solche Ausdrücke erhält man für die übrigen ε und zwar ist

$$(10.)\begin{cases} -\varepsilon_{11} = 288 I' E_2 E_3 E_4 . C \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4, & -\varepsilon_{21} = 288 E_1 I' E_3 E_4 . C \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4, \\ -\varepsilon_{12} = 288 I' E_2 E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 C \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4, & -\varepsilon_{22} = 288 E_1 I' E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 C \mathrm{E}_3 \mathrm{E}_4, \\ -\varepsilon_{13} = 288 I' E_2 E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 C \mathrm{E}_4, & -\varepsilon_{23} = 288 E_1 I' E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 C \mathrm{E}_4, \\ -\varepsilon_{14} = 288 I' E_2 E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 C, & -\varepsilon_{24} = 288 E_1 I' E_3 E_4 . \mathrm{E}_1 \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 C \end{cases} \text{ etc. etc.}$$

übereinstimmend mit dem bekannten Satze, wonach, wenn die Determinante verschwindet, sein muss

$$\varepsilon_{11} : \varepsilon_{12} : \varepsilon_{13} : \varepsilon_{14} = \varepsilon_{21} : \varepsilon_{22} : \varepsilon_{23} : \varepsilon_{24} = \text{etc.}$$

Vorstehendes kann als Grundlage für die Untersuchung desjenigen Coordinatensystems dienen, in welchem, wenn x_1, x_2, x_3, x_4 die Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes E im Raume von den vier festen Punkten E_1, E_2, E_3, E_4 sind, die Gleichung einer beliebigen Fläche durch eine *homogene* Function der x ausgedrückt wird. Nach einem bekannten Satze (von *Bodenmiller*, bewiesen u. A. von *Möbius*, *Schlömilch* und *Chasles*) giebt es in einer Ebene immer zwei (reelle oder imaginäre) Punkte von der Beschaffenheit, dass ihre Entfernungen von drei festen Punkten derselben Ebene sich wie drei beliebige gegebene Zahlen verhalten, und zwar liegen diese beiden Punkte mit dem Mittelpunkte des durch jene drei festen Punkte gehenden Kreises in gerader Linie und der eine derselben ist der Pol des anderen (im *Plücker*schen Sinne). Ein entsprechender Satz gilt auch für den Raum, nämlich für vier feste Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 und die durch sie gelegte Kugel, und es würden sonach bestimmten Werthen von x_1, x_2, x_3, x_4 nach obiger Coordinatenbestimmung im Allgemeinen immer zwei Punkte, ein ausserhalb

und ein innerhalb liegender, entsprechen, von denen der eine aus dem anderen immer leicht bestimmt werden kann.

Dies vorausgeschickt, so folgt aus dem Obigen, dass durch eine *homogene Gleichung des ersten Grades,* etwa

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4x_4 = 0$$

in obigem Coordinatensystem *eine Kugel vorgestellt* wird, welche der durch $E_1E_2E_3E_4$ gehenden Kugel *orthogonal* ist. Aus den oben für die ε gefundenen Werthen folgt nun, dass die Constanten A_1, A_2, A_3, A_4 in demselben Verhältnisse stehen, wie die Tetraeder $1'E_2E_3E_4$, $1'E_3E_4E_1$, $1'E_4E_1E_2$, $1'E_1E_2E_3$ und somit diese Constanten weiter nichts sind, als die Coordinaten des Mittelpunktes der orthogonalen Kugel nach dem gewöhnlichen Coordinatensystem. Eine allgemeine Untersuchung, insbesondere derjenigen Oberflächen, welche nach diesem Coordinatensystem durch eine homogene Function zweiten Grades vorgestellt werden, dürfte um so interessantere Resultate versprechen, als aus dem Obigen hervorgeht, dass, wenn wir auch hier den Dualismus in Betreff der Oberflächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse zur Geltung bringen, die Oberflächen zweiter Klasse nach unserm Coordinatensystem mit den Oberflächen zweiter Ordnung nach dem gewöhnlichen System übereinstimmen würden.

Schliesslich bleibe nicht unerwähnt, dass, wenn wir E_4 zum Mittelpunkt der durch $E_1E_2E_3E_4$ gehenden Kugel machen, so dass also die durch $E_1E_2E_3E_4$ gehende der anderen orthogonale Kugel in die Ebene eines grössten Kreises ausartet, die Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = 0$$

in folgende

$$(11.) \qquad \begin{vmatrix} 1 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ 1 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ 1 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ 1 & e_{41} & e_{42} & e_{43} \end{vmatrix} = 0$$

übergeht. Letzteres ist also die Bedingung dafür, dass die Punkte $E_1E_2E_3$ in der Ebene eines grössten Kreises der durch $E_1E_2E_3E_4$ gelegten Kugel liegen.

IV.

Aus der Gleichung (2.) lassen sich auch interessante Relationen, welche das Product der sinus zweier Raumwinkel und die ihnen umschriebenen normalen Kegel betreffen, ableiten. Um auch hier wieder das Hauptresultat voranstellen zu können, wollen wir durch $E_1E_2E_3$ und $E_1E_2E_3$ die beiden dreiseitigen Ecken bezeichnen, deren Kanten einen beliebigen Punkt O des Raumes mit $E_1E_2E_3$, $E_1E_2E_3$ verbinden; ferner werde der Winkel E_iOE_k durch ε_{ik} bezeichnet, und durch r' und ϱ' die Winkel, welche die Achsen der jenen beiden Ecken umschriebenen geraden Kegel mit den Seiten der letzteren bilden. Wir behaupten dann, dass analog der Gleichung (2.)

$$(12.)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\varepsilon_{11} & \cos\varepsilon_{12} & \cos\varepsilon_{13} \\ 1 & \cos\varepsilon_{21} & \cos\varepsilon_{22} & \cos\varepsilon_{23} \\ 1 & \cos\varepsilon_{31} & \cos\varepsilon_{32} & \cos\varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \sin E_1E_2E_3 \tang r' . \sin E_1E_2E_3 \tang \varrho' . \cos\psi,$$

wo ψ der Winkel ist, unter welchem sich die beiden Kegel schneiden.

Lassen wir nämlich in der Gleichung (2.) die Punkte E_4 und E_4 mit O zusammenfallen und sei O der Mittelpunkt einer Kugel, deren Radius $= 1$ und auf deren Fläche sich die Punkte $E_1E_2E_3E_1E_2E_3$ befinden, so verwandelt sich die auf der linken Seite der Gleichung (2.) stehende Determinante, wenn man in derselben die letzte Horizontal- und Verticalreihe zur ersten Horizontal- und Verticalreihe macht, in

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{11} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{12} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{13} \\ 1 & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{21} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{22} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{23} \\ 1 & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{31} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{32} & 4\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon_{33} \end{vmatrix},$$

welche durch eine leichte Reduction auf die Form

$$4 . \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\varepsilon_{11} & \cos\varepsilon_{12} & \cos\varepsilon_{13} \\ 1 & \cos\varepsilon_{21} & \cos\varepsilon_{22} & \cos\varepsilon_{23} \\ 1 & \cos\varepsilon_{31} & \cos\varepsilon_{32} & \cos\varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

gebracht wird. Die Gleichung (2.) hat somit schon folgende Form angenommen:

$$(13.)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\varepsilon_{11} & \cos\varepsilon_{12} & \cos\varepsilon_{13} \\ 1 & \cos\varepsilon_{21} & \cos\varepsilon_{22} & \cos\varepsilon_{23} \\ 1 & \cos\varepsilon_{31} & \cos\varepsilon_{32} & \cos\varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 144 Pr. \Pi\varrho . \cos\varphi,$$

und es bleibt nur noch übrig, den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck umzuformen. Denke man sich daher durch $OE_1E_2E_3$ und $OE_1E_2E_3$ normale Kegel mit der Spitze O gelegt, und bezeichne die Winkel, welche die Achsen OB und OB derselben mit den Seiten bilden, durch r' und ϱ'; sei ferner OF eine der beiden Durchschnittslinien der Kegel, so ist zunächst, da die Mittelpunkte C und I' der beiden durch $OE_1E_2E_3$ und $OE_1E_2E_3$ gehenden Kugeln in OB und OB liegen, der Winkel $COI' = 180^0 - \varphi$, und folglich

$$(14.) \qquad -\cos\varphi = \cos r'\cos\varrho' - \sin r'\sin\varrho'\cos\psi.$$

Verbindet man nun C und I' mit der Mitte M von OF, so sind COM und $I'OM$ rechtwinklige Dreiecke, und es ist somit, da $CO = r$, $I'O = \varrho$, $OM = \frac{1}{2}$ ist,

$$(15.) \qquad r = \frac{1}{2\cos r'}, \qquad \varrho = \frac{1}{2\cos\varrho'}.$$

Aus (14.) und (15.) folgt somit, dass

$$(16.) \qquad 4r\varrho\cos\varphi = -1 + \operatorname{tang} r'.\operatorname{tang}\varrho'\cos\psi.$$

Ausserdem aber ist $PII = 36\sin E_1E_2E_3\sin E_1E_2E_3$, welche Gleichung mit (16.) und (13.) zusammengestellt, die Gleichung (12.) giebt.

Die letztere wäre somit bewiesen, und es lässt sich auch aus ihr, gerade so wie (7.) aus (2.), eine Gleichung herleiten, in welcher die Sinus der Raumwinkel nicht mehr vorkommen. Nach *v. Staudt* ist nämlich

$$\begin{vmatrix} \cos\mathfrak{e}_{11} & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ \cos\mathfrak{e}_{21} & \cos\mathfrak{e}_{22} & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ \cos\mathfrak{e}_{31} & \cos\mathfrak{e}_{32} & \cos\mathfrak{e}_{33} \end{vmatrix} = \sin E_1E_2E_3.\sin E_1E_2E_3.$$

Dies in Verbindung mit (12.) giebt

$$(17.) \qquad \begin{vmatrix} 1-\operatorname{tang} r'\operatorname{tang}\varrho'\cos\psi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{11} & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{21} & \cos\mathfrak{e}_{22} & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{31} & \cos\mathfrak{e}_{32} & \cos\mathfrak{e}_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir leiten schliesslich aus (12.) und (17.) folgende Resultate her:

1) Lässt man die beiden Raumwinkel congruiren, so erhält man aus (17.)

$$(18.) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos^2 r'} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{12} & 1 & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{13} & \cos\mathfrak{e}_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und aus (12.)

$$(19.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{12} & 1 & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{13} & \cos\mathfrak{e}_{23} & 1 \end{vmatrix} = -\sin^2 E_1E_2E_3 \cdot \operatorname{tang}^2 r'.$$

2) Bezeichnen wir durch $\mathfrak{d}_{ik}$ und $\mathfrak{d}'_{ik}$ die Winkel E_iOE_k und E_iOE_k, so erhalten wir aus (12.) in Verbindung mit (19.) die der (9.) entsprechende Bedingungsgleichung für die Berührung der beiden Kegel

$$(20.)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{11} & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{21} & \cos\mathfrak{e}_{22} & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{31} & \cos\mathfrak{e}_{32} & \cos\mathfrak{e}_{33} \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\mathfrak{d}_{12} & \cos\mathfrak{d}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{d}_{12} & 1 & \cos\mathfrak{d}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{d}_{13} & \cos\mathfrak{d}_{23} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\mathfrak{d}'_{12} & \cos\mathfrak{d}'_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{d}'_{12} & 1 & \cos\mathfrak{d}'_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{d}'_{13} & \cos\mathfrak{d}'_{23} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Die beiden Kegel schneiden sich rechtwinklig, wenn

$$(21.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{11} & \cos\mathfrak{e}_{12} & \cos\mathfrak{e}_{13} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{21} & \cos\mathfrak{e}_{22} & \cos\mathfrak{e}_{23} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{31} & \cos\mathfrak{e}_{32} & \cos\mathfrak{e}_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Insbesondere liegen die Geraden OE_1 und OE_2 mit der Achse des durch OE_1. OE_2, OE_3 gehenden Kegels in einer Ebene, wenn

$$(22.)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\mathfrak{e}_{11} & \cos\mathfrak{e}_{12} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{21} & \cos\mathfrak{e}_{22} \\ 1 & \cos\mathfrak{e}_{31} & \cos\mathfrak{e}_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Indem ich diese Betrachtungen schliesse, bemerke ich noch, dass ich, um nicht durch Weitschweifigkeit zu ermüden, die analogen Betrachtungen für die Ebene unterlassen habe.

Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Die Aufgabe, die endlichen Gleichungen der Flächen zu bestimmen, deren Hauptkrümmungshalbmesser ϱ und ϱ' in jedem Punkte der Bedingung

$$\varrho' = \lambda(\varrho)$$

genügen, kann mit einer anderen in Verbindung gebracht werden, welche sich auf die Transformation des Linienelementes einer Kugel in die Form:

$$\sqrt{E\,dp^2 + \Phi(E)\,dq^2}$$

bezieht. Zu dieser Behandlungsweise führt die Untersuchung der Abbildung der in Rede stehenden Flächen auf eine Kugel vom Radius Eins, wenn diese Abbildung in dem von *Gauss* in den: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" angegebenen Sinn verstanden wird. In der That zeigt sich hierbei, dass dem System der Krümmungslinien einer individuellen Fläche der betrachteten Gattung auf der Kugel ein Curvensystem entspricht, durch dessen Parameter das Linienelement derselben die angegebene Form erhält; und dass die Kenntniss dieses Curvensystems zur Darstellung der Gleichung der entsprechenden Fläche vollständig ausreichend ist.

1.

Da die nachfolgenden Untersuchungen ihren Ausgangspunkt in einigen von *Gauss* in den disqq. gen. aufgestellten Gleichungen haben, so mögen zunächst die dort angenommenen und im Folgenden beibehaltenen Bezeichnungen vorangeschickt werden. Es sind dies, falls X, Y, Z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes einer krummen Fläche angeben, welche durch die Werthe zweier unabhängiger Variabeln p und q bestimmt sind, die folgenden:

$$A = \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q}, \qquad D = A\frac{\partial^2 X}{\partial p^2} + B\frac{\partial^2 Y}{\partial p^2} + C\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2},$$

$$B = \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}, \qquad D' = A\frac{\partial^2 X}{\partial p\,\partial q} + B\frac{\partial^2 Y}{\partial p\,\partial q} + C\frac{\partial^2 Z}{\partial p\,\partial q},$$

$$C = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q}, \qquad D'' = A\frac{\partial^2 X}{\partial q^2} + B\frac{\partial^2 Y}{\partial q^2} + C\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2},$$

$$E = \frac{\partial X^2}{\partial p^2} + \frac{\partial Y^2}{\partial p^2} + \frac{\partial Z^2}{\partial p^2},$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q},$$

$$G = \frac{\partial X^2}{\partial q^2} + \frac{\partial Y^2}{\partial q^2} + \frac{\partial Z^2}{\partial q^2},$$

$$\Delta = EG - F^2, \qquad m' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \qquad n' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}.$$

Aus ihnen folgen die Beziehungen: (l. c. art. XI)

$$(1.)\quad \begin{cases} AD' = \dfrac{\partial^2 X}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial X}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial X}{\partial q}(m'F - n'E), \\ BD' = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial Y}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial Y}{\partial q}(m'F - n'E), \\ CD' = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial Z}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial Z}{\partial q}(m'F - n'E). \end{cases}$$

Wir machen von diesen Gleichungen eine Anwendung auf den Fall, dass X, Y, Z die Coordinaten eines Punktes einer Kugel vom Radius Eins bezeichnen, und daher der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

genügen. Unter dieser Voraussetzung gelten, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, die Relationen:

$$X = \frac{A}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Y = \frac{B}{\sqrt{\Delta}}, \qquad Z = \frac{C}{\sqrt{\Delta}},$$

$$D = -E\sqrt{\Delta}, \qquad D' = -F\sqrt{\Delta}, \qquad D'' = -G\sqrt{\Delta},$$

in Folge deren die Gleichungen (1.) in die folgenden übergehen:

$$(2.)\quad \begin{cases} -F\Delta X = \dfrac{\partial^2 X}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial X}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial X}{\partial q}(m'F - n'E), \\ -F\Delta Y = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial Y}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial Y}{\partial q}(m'F - n'E), \\ -F\Delta Z = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial p\,\partial q}\Delta + \dfrac{\partial Z}{\partial p}(n'F - m'G) + \dfrac{\partial Z}{\partial q}(m'F - n'E). \end{cases}$$

Sind die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes der betrachteten Kugel in der Weise durch die Variabeln p und q bestimmt, dass das Quadrat des Linienelementes

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

die Form

$$E\,dp^2 + \Phi(E)\,dq^2$$

annimmt, für welche aus leicht ersichtlichen Gründen die gleichgeltende

$$\frac{dp^2}{k^2}+\frac{dq^2}{\theta'(k)^2}$$

gesetzt werden wird, so verwandeln sich die Gleichungen (2.), wegen

$$E=\frac{1}{k^2}, \qquad F=0, \qquad G=\frac{1}{\theta'(k)^2},$$

in:

$$0 = \frac{1}{k^2\theta'(k)^2}\frac{\partial^2 X}{\partial p\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\theta'(k)^2}\frac{\partial\frac{1}{k^2}}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{k^2}\frac{\partial\frac{1}{\theta'(k)^2}}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q},$$

$$0 = \frac{1}{k^2\theta'(k)^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial p\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\theta'(k)^2}\frac{\partial\frac{1}{k^2}}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{k^2}\frac{\partial\frac{1}{\theta'(k)^2}}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q},$$

$$0 = \frac{1}{k^2\theta'(k)^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial p\partial q}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{\theta'(k)^2}\frac{\partial\frac{1}{k^2}}{\partial q}\frac{\partial Z}{\partial p}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{k^2}\frac{\partial\frac{1}{\theta'(k)^2}}{\partial p}\frac{\partial Z}{\partial q}.$$

Diesem Gleichungssystem kann man die folgende Gestalt geben:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta(k)\frac{\partial X}{\partial p}}{\partial q} = \dfrac{\partial[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial X}{\partial q}}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\theta(k)\frac{\partial Y}{\partial p}}{\partial q} = \dfrac{\partial[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial Y}{\partial q}}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\theta(k)\frac{\partial Z}{\partial p}}{\partial q} = \dfrac{\partial[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial Z}{\partial q}}{\partial p}. \end{cases}$$

Hiernach sind die Integrale

$$(4.)\qquad \begin{cases} x = \int^{p,q}\left[\theta(k)\frac{\partial X}{\partial p}\,dp+[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial X}{\partial q}\,dq\right], \\ y = \int^{p,q}\left[\theta(k)\frac{\partial Y}{\partial p}\,dp+[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial Y}{\partial q}\,dq\right], \\ z = \int^{p,q}\left[\theta(k)\frac{\partial Z}{\partial p}\,dp+[\theta(k)-k\theta'(k)]\frac{\partial Z}{\partial q}\,dq\right] \end{cases}$$

durch die gewählten Endwerthe p, q der Integrationen allein bestimmt, und genügen den partiellen Differentialgleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p}=\varrho\frac{\partial X}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}=\varrho'\frac{\partial X}{\partial q}, \\ \frac{\partial y}{\partial p}=\varrho\frac{\partial Y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}=\varrho'\frac{\partial Y}{\partial q}, \\ \frac{\partial z}{\partial p}=\varrho\frac{\partial Z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q}=\varrho'\frac{\partial Z}{\partial q}, \end{cases}$$

in denen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho &= \theta(k), \\ \varrho' &= \theta(k) - k\,\theta'(k). \end{cases}$$

Betrachtet man x, y, z als die durch die Werthe von p und q bestimmten Coordinaten eines Punktes einer krummen Fläche S, so zeigt die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

und die mit ihrer Hülfe aus den Gleichungen (5.) hervorgehende

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

dass X, Y, Z die Cosinus der Winkel bestimmen, welche die im Punkte (x, y, z) der Fläche S errichtete Normale mit den Axen bildet. Die Gleichungen (5.) selbst aber lehren, dass p und q mit den Parametern der Krümmungslinien dieser Fläche, ϱ und ϱ' mit den beiden Hauptkrümmungshalbmessern im Punkte (x, y, z) identisch sind. Diese Hauptkrümmungshalbmesser sind durch die Gleichung, welche sich durch Elimination von k aus den Gleichungen (6.) ergiebt, mit einander verbunden, eine Gleichung, welche durch eine passende Bestimmung der Function $\theta(k)$ zu jeder beliebigen gemacht werden kann.

Die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\varrho' = \lambda(\varrho)$$

hängt daher ab von der Transformation des Quadrates des Linienelementes einer Kugel vom Radius Eins in die Form:

$$\frac{dp^2}{k^2} + \frac{dq^2}{\theta'(k)^2}.$$

Was die beiden Schaalen der Flächen der Krümmungsmittelpunkte der durch die Gleichungen (4.) definirten Flächen betrifft, welche, wie im 59sten Bande pag. 390 dieses Journals nachgewiesen worden ist, abgeschlossene Klassen auf einander abwickelbarer Flächen bilden, so sind die Coordinaten eines Punktes (ξ, η, ζ) der dem Krümmungsradius $\theta(k)$ entsprechenden Schaale, wie aus den Gleichungen (4.) ohne Weiteres hervorgeht, durch die Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} \xi &= -\int \theta'(k)\left(X dk + k\frac{\partial X}{\partial q}\,dq\right), \\ \eta &= -\int \theta'(k)\left(Y dk + k\frac{\partial Y}{\partial q}\,dq\right), \\ \zeta &= -\int \theta'(k)\left(Z dk + k\frac{\partial Z}{\partial q}\,dq\right) \end{cases}$$

bestimmt, und ergiebt sich hieraus das Quadrat des Linienelementes:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \theta'(k)^2\,dk^2 + k^2\,dq^2,$$

eine Formel, welche bis auf die veränderte Bezeichnung mit der betreffenden der eben citirten Abhandlung identisch ist.

Eine ganz analoge Darstellung ergiebt sich für die zweite, dem Hauptkrümmungsradius $\theta(k)-k\theta'(k)$ entsprechende Schaale der Flächen der Krümmungsmittelpunkte der durch die Gleichungen (4.) dargestellten Oberflächen.

2.

Die allgemeine Bestimmung der Variabeln p und q, welche geeignet sind, dem Quadrate des Linienelementes einer Kugel vom Radius Eins die im vorigen Paragraphen angegebene Form zu ertheilen, ist, wenn wir nicht irren, bisher nur für zwei besondere Fälle dieser Form gegeben worden. Es ergeben sich diese beiden Fälle durch Substitution von $k+a$ und $\frac{k^2}{2}$ für $\theta(k)$. Für die erste dieser Annahmen wird die Form des Quadrates des Linienelementes:

$$dq^2+\frac{dp^2}{k^2},$$

welche Form man, wie bekannt, für jede Fläche durch Einführung der Bogenlänge einer willkürlichen auf derselben gezeichneten Curve und der von den Punkten dieser Curve an gezählten, senkrecht zu ihr stehenden geodätischen Linien als Variable erreichen kann; eine Bestimmung, die für die Kugel leicht durchzuführen ist. Die für diesen Fall durch die Gleichungen (4.) bestimmte Flächenklasse ist alsdann die der Bedingung

$$\varrho' = a$$

genügende der Canalflächen.

Für die Substitution $\theta(k)=\frac{1}{2}k^2$ wird das Quadrat des Linienelementes:

$$\frac{1}{k^2}(dp^2+dq^2),$$

welche Form für die Abbildung einer Kugel auf eine Ebene in der Art, dass die kleinsten Theile ähnlich bleiben, gefordert wird. Die sogenannte allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist vollständig bekannt. Die in diesem Falle durch die Gleichungen (4.) bestimmte Flächenfamilie ist die durch die Bedingung

$$\varrho+\varrho' = 0$$

gegebene Classe der Flächen kleinster Oberfläche, deren Gleichungen, vermöge der angedeuteten Herleitung in eleganter Gestalt, durch die Parameter der Krümmungslinien ausgedrückt, erhalten werden. *Einer jeden bestimmten Abbildungsart der Punkte einer Kugel auf eine Ebene in der Weise, dass*

die kleinsten Theile einander ähnlich bleiben, entspricht hiernach eine bestimmte der Flächen kleinster Oberfläche, und umgekehrt.

Die Gleichungen (7.) bestimmen für den eben betrachteten Fall die auf die Rotationsfläche der Evolute einer Kettenlinie aufwickelbaren Flächen.

Die beiden eben genannten der Flächenfamilien, bei denen in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius durch den andern bestimmt ist, denen die beiden bekannten Transformationen des Quadrates des Linienelementes einer Kugel entsprechen, sind, wenn man von ihren Parallelen absieht, die mit ihnen zugleich bestimmt sind, in der That die einzigen, für welche bisher die Aufstellung der endlichen Gleichungen gegeben ist.

3.

Es verdient ein dritter Fall bemerkt zu werden, in welchem sich, und zwar für jede Fläche, die Variabeln p und q in aller Allgemeinheit bestimmen lassen, die die Transformation des Quadrates des Linienelementes in die Form

$$\frac{dp^2}{k^2}+\frac{dq^2}{\theta'(k)^2}$$

herbeiführen, in welcher $\theta'(k)=\sqrt{1-k^2}$, also

$$\theta(k) = \tfrac{1}{2}(\arcsin k + k\sqrt{1-k^2}).$$

Dieser Fall tritt auf, wenn man die Lage eines Punktes einer krummen Fläche durch seine geodätischen Abstände von zwei willkürlich auf derselben gezeichneten Curven bestimmt. Die dieser Bestimmung entsprechende Form des Quadrates des Linienelementes ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung. Es sei s die Bogenlänge der einen, auf der Fläche willkürlich gezeichneten Curve, von einem beliebigen ihrer Punkte an gemessen, und u die Länge einer vom Endpunkte von s stets nach derselben Seite positiv gemessenen, senkrecht gegen die Curve gerichteten geodätischen Linie. Jedem Werthenpaare des durch die Quantitäten u, s gebildeten Grössengebietes entspricht alsdann ein bestimmter Punkt P der krummen Fläche. Man kann dieses Gebiet in eine Anzahl anderer der Art zertheilen, dass allen in einem bestimmten derselben enthaltenen Werthenpaaren *verschiedene* Punkte P entsprechen. Alsdann sind für jeden Punkt P die Grössen u und s eindeutig bestimmt, wenn man die Grenzen des Gebietes angiebt, innerhalb dessen deren Werthe fallen sollen. Das Quadrat $d\sigma^2$ des Linienelementes hat für die Variabeln u und s, wie bekannt, die Form:

$$(8.) \qquad d\sigma^2 = du^2 + m\,ds^2.$$

Ebenso ist

$$(9.) \qquad d\sigma^2 = dv^2 + n\,dt^2,$$

wenn v und t die Bedeutung von u und s in Beziehung auf die zweite, auf der betrachteten Fläche willkürlich gezeichnete Curve haben. Da einem bestimmten Werthenpaare u, s ein bestimmtes v, t entspricht, so sind s und t mit u und v bestimmt, und die Einführung der letzteren als unabhängige Variable ergiebt für das Quadrat des Linienelementes:

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Diese homogene Function der Grössen du und dv muss, wie die Gleichungen (8.) und (9.) zeigen, durch Subtraction der Quadrate du^2 oder dv^2 resp. in die Quadrate der in du und dv linearen Ausdrücke

$$\sqrt{m}\,.\,ds$$
$$\sqrt{n}\,.\,dt$$

übergehen, welche Eigenschaft zwischen den Grössen E, F, G die Relationen

$$(E-1)\,G = (G-1)\,E = F^2$$

erfordert. Hiernach ist

$$d\sigma^2 = E(du^2 + dv^2) + 2\sqrt{E(E-1)}\,du\,dv$$

oder, wenn man einen Winkel ω durch die Bedingung

$$E = \frac{1}{\sin^2\omega}$$

bestimmt,

$$d\sigma^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\cos\omega\,du\,dv}{\sin^2\omega}.$$

Führt man als neue Variable die halbe Summe p und die halbe Differenz q der Grössen u und v ein, so ergiebt sich schliesslich:

$$d\sigma^2 = \frac{dp^2}{\sin^2\frac{1}{2}\omega} + \frac{dq^2}{\cos^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{dp^2}{k^2} + \frac{dq^2}{\theta'(k)^2},$$

wo

$$k = \sin\tfrac{1}{2}\omega, \qquad \theta'(k) = \sqrt{1-k^2}$$

gesetzt worden. W. z. b. w.

Diese Form des Quadrates des Linienelementes zeigt, dass auf jeder Fläche diejenigen Linien, für welche die Summe der geodätischen Abstände von zwei willkürlich auf ihr gezeichneten Curven constant ist, von denen senkrecht geschnitten wird, für welche die Differenz dieser Abstände denselben Werth beibehält.

Substituirt man für die willkürlichen Curven zwei Punkte, so gelangt man zu einer Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft eines Systems

confocaler Ellipsen und Hyperbeln, eine Verallgemeinerung, welche man Herrn *Betti* verdankt. (*Tortolini* Annalen Bd. III, *Sulla teorica generale delle superficie curve*)*).

4.

Für die Darstellung der neuen Flächenklasse, die sich aus der Anwendung der eben angedeuteten Transformation auf eine Kugel ergiebt, wird es unsere nächste Aufgabe sein, die Bestimmung eines Punktes (X, Y, Z) einer Kugel vom Radius Eins durch die Variabeln p und q anzugeben. Für diesen Zweck sind zunächst die Coordinaten X, Y, Z sowohl durch die Variabeln u und s als auch durch v und t auszudrücken.

Bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der ersten auf der Kugel willkürlich gezeichneten Curve, bestimmt als Functionen von s, λ, μ, ν diejenigen eines beliebigen Punktes der zweiten Curve, bestimmt durch t, so erfüllen diese Grössen die folgenden Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$
$$\frac{d\xi^2}{ds^2} + \frac{d\eta^2}{ds^2} + \frac{d\zeta^2}{ds^2} = 1,$$
$$\frac{d\lambda^2}{dt^2} + \frac{d\mu^2}{dt^2} + \frac{d\nu^2}{dt^2} = 1,$$

und die Darstellung der Punkte (X, Y, Z), welche in dem gemeinschaftlichen Bereich des Gebietes (u, s) und desjenigen von (v, t) enthalten sind, geschieht, wie man leicht verificirt, durch die Gleichungen:

$$(10.) \quad \begin{cases} X = a\sin u + \xi\cos u = \alpha\sin v + \lambda\cos v, \\ Y = b\sin u + \eta\cos u = \beta\sin v + \mu\cos v, \\ Z = c\sin u + \zeta\cos u = \gamma\sin v + \nu\cos v, \end{cases}$$

in denen:

$$a = \eta\frac{d\zeta}{ds} - \zeta\frac{d\eta}{ds}, \qquad \alpha = \mu\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\mu}{dt},$$
$$b = \zeta\frac{d\xi}{ds} - \xi\frac{d\zeta}{ds}, \qquad \beta = \nu\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\nu}{dt},$$
$$c = \xi\frac{d\eta}{ds} - \eta\frac{d\xi}{ds}, \qquad \gamma = \lambda\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\lambda}{dt}.$$

---

*) In der Note des Herrn *Betti* ist, ich weiss nicht durch welchen Umstand, das Quadrat des Linienelementes für die betreffenden Variabeln durchgängig als identisch mit

$$du^2 + dv^2 + 2F\,du\,dv$$

angegeben worden, ein Irrthum, der auf die Resultate keinen Einfluss hat.

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich X, Y, Z durch s und t in folgender Form:

$$(11.)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\frac{d\eta}{ds}\frac{d\nu}{dt} - \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\mu}{dt}}{\sin\psi}, \\ Y = \dfrac{\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}\frac{d\nu}{dt}}{\sin\psi}, \\ Z = \dfrac{\frac{d\xi}{ds}\frac{d\mu}{dt} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d\lambda}{dt}}{\sin\psi}, \end{cases}$$

$$\cos\psi = \frac{d\xi}{ds}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\eta}{ds}\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\nu}{dt},$$

während zur Bestimmung von u und v durch s und t sich die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \cos u = X\xi + Y\eta + Z\zeta, & \sin u = Xa + Yb + Zc, \\ \cos v = X\lambda + Y\mu + Z\nu, & \sin v = X\alpha + Y\beta + Z\gamma \end{cases}$$

ergeben, von denen die beiden rechts stehenden unter Benutzung der Werthe von a, b, c, α, β, γ und X, Y, Z mit Hülfe einer bekannten Transformation in

$$(13.)\quad \begin{cases} \sin u = -\dfrac{\xi\frac{d\lambda}{dt} + \eta\frac{d\mu}{dt} + \zeta\frac{d\nu}{dt}}{\sin\psi}, \\ \sin v = -\dfrac{\lambda\frac{d\xi}{ds} + \mu\frac{d\eta}{ds} + \nu\frac{d\zeta}{ds}}{\sin\psi} \end{cases}$$

umgesetzt werden können.

Endlich sind die Variabeln p und q durch die Gleichungen

$$p = \frac{u+v}{2}, \qquad q = \frac{u-v}{2}$$

als Functionen von s und t gegeben.

Zur Bildung des Quadrates des Linienelementes

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

durch du und dv bestimmen wir die Grössen dX, dY, dZ aus den linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\sin u\,du &= \xi\,dX + \eta\,dY + \zeta\,dZ, \\ -\sin v\,dv &= \lambda\,dX + \mu\,dY + \nu\,dZ, \\ 0 &= X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ, \end{aligned}$$

welche sich durch Differentiation der Gleichungen (12.) und der folgenden:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

ergeben. Aus ihrer Auflösung folgt:

$$(14.)\quad \begin{cases} dX = \dfrac{\frac{d\lambda}{dt}du + \frac{d\xi}{ds}dv}{\sin\psi}, \\ dY = \dfrac{\frac{d\mu}{dt}du + \frac{d\eta}{ds}dv}{\sin\psi}, \\ dZ = \dfrac{\frac{d\nu}{dt}du + \frac{d\zeta}{ds}dv}{\sin\psi}, \end{cases}$$

wovon man sich leicht durch Substitution und Berücksichtigung der Gleichungen (13.) überzeugt. Hiernach wird:

$$dX^2+dY^2+dZ^2 = \frac{du^2+dv^2+2\cos\psi\,du\,dv}{\sin^2\psi},$$

und folglich, wenn man die Variabeln p und q einführt und

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi = k, \qquad \frac{\psi+\sin\psi}{4} = \theta(k)$$

setzt:

$$dX^2+dY^2+dZ^2 = \frac{dp^2}{k^2}+\frac{dq^2}{\theta'(k)^2}.$$

Die Gleichungen (4.), welche mit Hülfe der Werthe von k und $\theta(k)$ die Form

$$(15.)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}\int\left[(\psi+\sin\psi)\,dX - 2\sin\psi\,\dfrac{\partial X}{\partial q}\,dq\right], \\ y = \frac{1}{4}\int\left[(\psi+\sin\psi)\,dY - 2\sin\psi\,\dfrac{\partial Y}{\partial q}\,dq\right], \\ z = \frac{1}{4}\int\left[(\psi+\sin\psi)\,dZ - 2\sin\psi\,\dfrac{\partial Z}{\partial q}\,dq\right] \end{cases}$$

annehmen, stellen hiernach die Flächenklasse dar, deren Hauptkrümmungsradien ϱ und ϱ' in jedem Punkte durch die Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{\psi+\sin\psi}{4}, \\ \varrho' = \dfrac{\psi-\sin\psi}{4}, \end{cases}$$

verbunden sind, aus denen sich durch Elimination von ψ

$$(16^a.)\qquad 2(\varrho-\varrho') = \sin 2(\varrho+\varrho')$$

ergiebt.

Es bleibt schliesslich noch übrig, in den Gleichungen (15.) die Quantitäten dq, $\frac{\partial X}{\partial q}$, $\frac{\partial Y}{\partial q}$, $\frac{\partial Z}{\partial q}$ durch s, t, ds, dt darzustellen, da eine explicite

Darstellung von ψ, X, Y, Z durch p und q nur in besonderen Fällen zu ermöglichen ist. Bei der Einführung von u und v statt p und q, welche zu diesem Zwecke zunächst geschehen wird, ist

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial q} = \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$2dq = du - dv$$

zu setzen, wo die auf u und v bezüglichen Differentialquotienten aus den Gleichungen (14.) entnommen werden können. Zur Darstellung von du, dv durch ds und dt addire man die Gleichungen (14.), nachdem man sie der Reihe nach mit $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$ multiplicirt hat, wodurch man

$$m\,ds = \frac{\cos\psi\, du + dv}{\sin\psi}$$

erhält, wenn der Kürze wegen

$$m = \frac{\partial X}{\partial s}\frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial Y}{\partial s}\frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{d\zeta}{ds} = -\left(X\frac{d^2\xi}{ds^2} + Y\frac{d^2\eta}{ds^2} + Z\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)$$

gesetzt wird. Auf ähnliche Weise erhält man:

$$n\,dt = \frac{du + \cos\psi\, dv}{\sin\psi},$$

wo

$$n = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial t}\frac{d\nu}{dt} = -\left(X\frac{d^2\lambda}{dt^2} + Y\frac{d^2\mu}{dt^2} + Z\frac{d^2\nu}{dt^2}\right).$$

Es ergeben sich daher für du und dv die Bestimmungen:

$$du = \frac{-m\,ds\cos\psi + n\,dt}{\sin\psi},$$

$$dv = \frac{m\,ds - n\,dt\cos\psi}{\sin\psi}.$$

Mit ihrer Hülfe erhält man nunmehr durch eine einfache Rechnung:

$$x = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left\{\left(\varepsilon\frac{d\xi}{ds} + \delta\frac{d\lambda}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{d\lambda}{dt} + \delta\frac{d\xi}{ds}\right)n\,dt\right\},$$

$$y = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left\{\left(\varepsilon\frac{d\eta}{ds} + \delta\frac{d\mu}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{d\mu}{dt} + \delta\frac{d\eta}{ds}\right)n\,dt\right\},$$

$$z = \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left\{\left(\varepsilon\frac{d\zeta}{ds} + \delta\frac{dv}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{dv}{dt} + \delta\frac{d\zeta}{ds}\right)n\,dt\right\},$$

$$\varepsilon = \psi - \sin\psi\cos\psi, \qquad \delta = \sin\psi - \psi\cos\psi.$$

Diese ziemlich complicirten Gleichungen enthalten die vollständige Integration der durch die Gleichung

$$2(\varrho - \varrho') = \sin 2(\varrho + \varrho')$$

gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Form von einem directen Integrationsversuche abschrecken würde. Man kann jedoch aus denselben für eine eingehendere Untersuchung der durch sie dargestellten Flächenklasse keinen weiteren Vortheil ziehen, vielmehr sind die Elemente zu einer Discussion der allen Flächen dieser Art zukommenden Eigenschaften in den Gleichungen (11.), (13.), (16.) enthalten, welche man aus den vorstehenden durch entsprechende Rechnungen wieder herzustellen hätte.

Die Gleichungen (7.), welche sich für unseren Fall in

$$\xi = -\int \cos\frac{\psi}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,X\,d\psi + \sin\frac{\psi}{2}\,\frac{\partial X}{\partial q}\,dq\right\},$$

$$\eta = -\int \cos\frac{\psi}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,Y\,d\psi + \sin\frac{\psi}{2}\,\frac{\partial Y}{\partial q}\,dq\right\},$$

$$\zeta = -\int \cos\frac{\psi}{2}\left\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,Z\,d\psi + \sin\frac{\psi}{2}\,\frac{\partial Z}{\partial q}\,dq\right\}$$

verwandeln, und in die man, auf die eben angegebene Weise s und t als Variable einzuführen hat, bestimmen die Classe der Flächen, deren Linienelement in die Form

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \cos^4\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi^2}{4} + \sin^2\frac{\psi}{2}\,dq^2$$

oder, wenn $\sin\frac{\psi}{2} = r$ gesetzt wird, in die folgende

$$(1-r^2)\,dr^2 + r^2\,dq^2$$

gebracht werden kann. Als Repräsentant dieser Classe kann eine Rotationsfläche von der durch die Gleichungen

$$z = \int_0^r \sqrt{1-\alpha^2-r^2}\,dr,$$

$$y = \alpha r \sin\frac{q}{\alpha},$$

$$x = \alpha r \cos\frac{q}{\alpha}$$

bestimmten Form angesehen werden, in denen α einen die Einheit nicht überschreitenden Parameter bezeichnet.

5.

Für die Ermittelung der auf eine Kugel abwickelbaren Flächen, deren Lauf durch die Bedingung

$$\varrho\varrho' = 1$$

oder durch die partielle Differentialgleichung

$$(17.) \qquad \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(1+\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+\frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)^2} = 1$$

bestimmt wird, hat unsere Behandlungsweise den Erfolg, dass die Aufgabe von der Integration einer anderen Differentialgleichung abhängig gemacht wird, die zwar ebenfalls von der zweiten Ordnung ist, jedoch nur denjenigen Differentialquotienten dieser Ordnung enthält, der durch die auf einander folgende Differentiation nach beiden der unabhängigen Variabeln gebildet wird. Diese Zurückführung darf nach dem, was *Ampère* über partielle Differentialgleichungen gelehrt hat, in der That als eine Reduction des Problems angesehen werden.

Damit die Gleichungen (6.) durch Elimination von k auf die Beziehung

$$\varrho\varrho' = 1$$

führen, ist $\theta(k)$ gleich $\sqrt{1+k^2}$ zu nehmen.

Die Integration der Differentialgleichung (17.) kommt daher darauf hinaus, das Quadrat des Linienelementes einer Kugel vom Radius Eins in die Form

$$\frac{1}{k^2}\,dp^2+\left(\frac{1}{k^2}+1\right)dq^2$$

zu transformiren oder in die gleichbedeutende:

$$d\alpha^2+d\beta^2+(e^w+e^{-w})\,d\alpha\,d\beta,$$

welche aus ihr durch die Substitutionen

$$p=\frac{\alpha-\beta}{i}, \qquad q=\alpha+\beta, \qquad \frac{1}{k}=\frac{e^{\frac{1}{2}w}-e^{-\frac{1}{2}w}}{2}$$

hervorgeht.

Sind ϑ und φ die Polarcoordinaten eines Punktes einer Kugel vom Radius Eins, so ist das Quadrat des Linienelementes derselben:

$$d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2,$$

welcher Ausdruck durch die Substitution

$$u = \operatorname{ctg}\vartheta\, e^{-\varphi i},$$
$$v = \lg\sin\vartheta+\varphi i$$

die einfachere Form

$$e^{2v}\,du^2-dv^2$$

annimmt. Unsere Aufgabe verlangt daher die Bestimmung der zwei Functionen

u und v durch α und β in der Art, dass die Gleichung

$$e^{2v}du^2 - dv^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + (e^w + e^{-w})\,d\alpha\,d\beta$$

eine identische wird.

Da

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta}d\beta,$$

so wird diese Bedingung erfüllt, wenn v so bestimmt wird, dass

$$(18.)\qquad e^v du = \sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \alpha^2}}\,d\alpha + \sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \beta^2}}\,d\beta,$$

d. i. durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial e^{-v}\sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \alpha^2}}}{\partial \beta} = \frac{\partial e^{-v}\sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \beta^2}}}{\partial \alpha}$$

oder durch die folgende:

$$(19.)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \alpha^2}}\sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \beta^2}} = 0.$$

Ist v eine durch diese Gleichung definirte Function der Variabeln α und β, so ergiebt die Gleichung (18.) die Function u durch Quadratur, während w durch die Gleichung

$$(20.)\qquad \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \alpha^2}}\sqrt{1+\frac{\partial v^2}{\partial \beta^2}} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\,\frac{\partial v}{\partial \beta}$$

zu bestimmen ist.

Die Bestimmung von w kann auch für sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von einfacher Form zurückgeführt werden. Es ergiebt sich diese Gleichung, wenn man aus den Coefficienten 1, 1, $e^w + e^{-w}$ des Quadrates des Linienelementes

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + (e^w + e^{-w})\,d\alpha\,d\beta$$

nach der bekannten *Gauss*ischen Formel das Krümmungsmass ableitet, und dasselbe, da es sich auf eine Kugel vom Radius Eins bezieht, gleich Eins setzt. Man gelangt auf diesem Wege zu der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial \beta} = -\frac{e^w - e^{-w}}{2}.$$

Die Gleichung (20.) zeigt hiernach, dass die Integration dieser partiellen Differentialgleichung durch die Integration der Gleichung (19.) gegeben ist, ein Resultat, welches man auch direct hätte ableiten können.

Berlin, 1862.

Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées.

(Par M. *Edouard Combescure* à St. Etienne.)

Le n°. 5 des *annali di matematica*, qui a paru en Novembre 1862, contient un très-intéressant mémoire de Mr. *E. Beltrami* sur les *développées* et les *développantes* des courbes à double courbure. L'auteur fait voir (p. 264 et suiv.) que *la recherche des développées d'une courbe plane quelconque dépend d'une seul quadrature.* J'établirai ci-après que si la courbe donnée est gauche la détermination des *développées* dépend de l'intégration d'une équation de *Bernouilli.* L'auteur traite ensuite (p. 276) le problème inverse dont l'objet est de trouver les *développantes* d'une courbe donnée quelconque, et il le résout complètement. Il est bien visible que les deux problèmes en question reviennent: le premier, à trouver l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par une courbe directrice et la loi de déplacement angulaire et la génératrice rectiligne: le second, à trouver les courbes qui coupent sous un angle, dont la loi est donnée, les tangentes à l'arête de rebroussement supposée connue.

Il me sera utile, pour ce qui suit, de reproduire textuellement le n°. 6 d'une note que j'ai communiquée, en avril 1860, à la société Impériale d'Agriculture du département de la Loire et qui a paru, la même année, dans les Annales, mathématiquement peu connues, de la dite Société.

§. I.

1. „Les coordonnées (rectangulaires) x, y, z d'un point d'une surface quelconque étant exprimées par des fonctions de deux paramètres quelconques u et θ, tout-à-fait indépendants, les trajectoires orthogonales des courbes $\theta =$ constante sont déterminées par l'équation

$$d\theta S \frac{dx}{du}\frac{dx}{d\theta} + du S\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 0 \text{ *)}.$$

*) S désigne et désignera toujours une somme symétrique à trois termes. L'équation résulte de ce que, pour les courbes $\theta =$ constante, les cosinus de direction de la tangente sont proportionals à $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$, tandis que, pour une courbe quelconque tracée sur la surface, ils le sont à $\frac{dx}{du}du + \frac{dx}{d\theta}d\theta$, $\frac{dy}{du}du + \frac{dy}{d\theta}d\theta$, $\frac{dz}{du}du + \frac{dz}{d\theta}d\theta$.

S'il s'agit d'une surface réglée, on peut prendre

$$(a.) \qquad x = \lambda + \lambda_1 u, \qquad y = \mu + \mu_1 u, \qquad z = \nu + \nu_1 u,$$

les λ, μ, ... λ_1, ... dépendant uniquement de θ. L'équation différentielle devient

$$(\Phi + u\Theta\Theta')\,d\theta + \Theta^2 du = 0,$$

où $\Theta^2 = S\lambda_1^2$, $\Phi = S\lambda_1\lambda'$, les accents indiquant les dérivées par rapport à θ. Il en résulte $u = \dfrac{v - \Psi}{\Theta}$, v étant une constante arbitraire ou le paramètre des trajectoires orthogonales, et Ψ désignant $\int \dfrac{\Phi\, d\theta}{\Theta}$. Par suite

$$x = \lambda + \frac{\lambda_1}{\Theta}(v - \Psi), \qquad y = \mu + \frac{\mu_1}{\Theta}(v - \Psi), \qquad z = \nu + \frac{\nu_1}{\Theta}(v - \Psi);$$

et, pour un arc quelconque tracé sur la surface, on a

$$ds^2 = dv^2 + \left[S(\lambda' + \lambda_1' u)^2 - \frac{1}{\Theta^2}(\Phi + \Theta\Theta' u)^2\right] d\theta^2,$$

u devant être remplacé par sa valeur précédente. Si l'on désigne par φ l'angle de la courbe considérée avec la génératrice rectiligne correspondante, on a

$$dv = \cos\varphi \,.\, ds,$$

et

$$\operatorname{tang}\varphi\, dv = d\theta \sqrt{S(\lambda' + \lambda_1' u)^2 - \frac{1}{\Theta^2}(\Phi + \Theta\Theta' u)^2},$$

d'où l'on déduit entre θ et v l'équation des courbes pour lesquelles φ est une fonction connue de ces variables et particulièrement celle des trajectoires obliques, c'est-à-dire qui coupent les génératrices sous un angle constant.

On peut remarquer que σ désignant l'arc de la directrice ($x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \nu$) et ε l'angle de cette directrice avec la génératrice rectiligne correspondante au point de rencontre, on a

$$\Phi = \Theta \cos\varepsilon \frac{d\sigma}{d\theta}, \qquad \text{et par suite} \qquad \Psi = \int \cos\varepsilon\, d\sigma;$$

de façon que cette quantité Ψ peut être assimilée à une sorte de travail mécanique."

Je conserverai les mêmes notations, sauf que je supposerai tout de suite égale à **1** la quantité Θ que j'avais conservée pour des raisons de symétrie: λ_1, μ_1, ν_1 seront dès lors, sans facteur étranger, les cosinus de direction de la génératrice rectiligne et l'on pourra écrire généralement

(**1**.) $\operatorname{tang}\varphi\, dv = V d\theta$, en posant, pour abréger,

$$V = \sqrt{(v - \Psi)^2 S\lambda_1'^2 + 2(v - \Psi) S\lambda'\lambda_1' + \sigma'^2 \sin^2\varepsilon}.$$

2. Cela posé, s'il s'agit d'une surface développable, dont l'arête de rebroussement est la directrice donnée (λ, μ, ν), on aura

$$\varepsilon = 0, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda'}{\sigma'}, \quad \mu_1 = \frac{\mu'}{\sigma'}, \quad \nu_1 = \frac{\nu'}{\sigma'}, \quad S\lambda'\lambda_1' = \sigma' S\lambda_1\lambda_1' = 0, \quad \Psi = 0,$$

et l'équation différentielle deviendra

$$(2.) \qquad \operatorname{tang}\varphi\, dv = (v-\sigma)\, d\theta \sqrt{\frac{S\lambda''^2 - \sigma''^2}{\sigma'^2}} = (v-\sigma)\, d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de contingence de la courbe donnée. Si φ est une fonction donnée quelconque de θ et que l'on pose

$$r = e^{\int \cot\varphi\, d\omega},$$

on aura donc

$$(3.) \quad \begin{cases} v-\sigma = \tau\left(c - \int \frac{d\sigma}{\tau}\right), \\ x-\lambda = \frac{d\lambda}{d\sigma}\cdot\tau\left(c - \int \frac{d\sigma}{\tau}\right), \\ y-\mu = \frac{d\mu}{d\sigma}\cdot\tau\left(c - \int \frac{d\sigma}{\tau}\right), \\ z-\nu = \frac{d\nu}{d\sigma}\cdot\tau\left(c - \int \frac{d\sigma}{\tau}\right), \end{cases}$$

$$s + \text{constante} = \int \frac{dv}{\cos\varphi} = \int \frac{(v-\sigma)\, d\omega}{\sin\varphi}.$$

Ce qui ne diffère que par la notation des formules de M. *Beltrami* et repond à la seconde des questions posées.

Lorsque φ est une fonction donnée des deux variables θ et v (ce qui me semble le point de vue général où l'on doit se placer, par analogie avec ce que l'on fait sur le plan) l'équation (2.) cesse d'être linéaire et il faut la traiter par les artifices que l'on juge convenables. Par exemple, si l'on avait

$$\cot\varphi = A + Bv,$$

A et B étant des fonctions de θ seul, on rentrerait dans le cas d'une équation de *Bernouilli*, qui serait tout de suite intégrable si A était nul, et qu'on intègrerait généralement si, A ou B étant indéterminée, on déterminait cette fonction d'après une solution particulière, d'ailleurs arbitraire, de l'équation différentielle. On aurait encore un choix d'exemples *à posteriori* beaucoup plus nombreux, en désignant par M une fonction arbitraire de θ et v et déterminant φ par la condition que l'équation (2.) ou plus généralement l'équation (1.), étant multipliée par M, devint une différentielle exacte. On devrait

prendre alors

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{M}\left[f(v) - \int \frac{dMV}{dv}\, d\theta\right],$$

$f(v)$ étant une fonction arbitraire de v, V le radical de l'équation (1.), et v étant regardé comme constant dans l'intégration relative à θ.

§. II.

3. Le problème de trouver l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par une directrice et la loi de variation angulaire de la génératrice rectiligne, revient à considérer dans les équations (3.) x, y, z, s, φ comme des fonctions données l, m, n, p, q d'un paramètre indépendant θ, et à en déduire λ, μ, ν, σ. L'équation $dv = \cos\varphi\, ds$ permet de considérer v comme une fonction aussi connue du même paramètre et alors, en remettant $v-\sigma$ pour la parenthèse, on a à intégrer le système

$$\frac{d\lambda}{\lambda - l} = \frac{d\mu}{\mu - m} = \frac{d\nu}{\nu - n} = \frac{d\sigma}{\sigma - v},$$

$$d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = d\sigma^2,$$

qu'on rendrait tout-à-fait symétrique en remplaçant σ et v par $\sigma\sqrt{-1}$ et $v\sqrt{-1}$. Ce système conduit par des transformations de rapports égaux et des différentiations à trois équations finies, deux linéaires et une quadratique entre $\lambda - l$, $\mu - m$, $\nu - n$, $\sigma - v$ et des quantités connues, ce qui réduit la question à une intégration unique. Mais je préfère revenir aux formules et aux conventions du n°. 1 où λ, μ, ν, ε sont censées des fonctions données en θ.

L'arc de trajectoire normal aux génératrices rectilignes a pour différentielle $V d\theta$. Le minimum de cette différentielle est, pour une même valeur de θ,

$$d\theta \sqrt{\sigma'^2 \sin^2\varepsilon - \frac{(S\lambda'\lambda'_1)^2}{S\lambda'^2_1}}$$

et correspond à

$$v - \Psi = -\frac{S\lambda'\lambda'_1}{S\lambda'^2};$$

il répond à la ligne de striction dont les équations sont, par suite,

$$(4.) \qquad x = \lambda - \lambda_1 \frac{S\lambda'\lambda'_1}{S\lambda'^2_1}, \quad y = \mu - \mu_1 \frac{S\lambda'\lambda'_1}{S\lambda'^2_1}, \quad z = \nu - \nu_1 \frac{S\lambda'\lambda'_1}{S\lambda'^2_1}.$$

Pour que la surface soit développable il faut et il suffit que ce minimum soit zéro, c'est à dire que l'on ait

$$\sigma'^2 \sin^2\varepsilon = \frac{(S\lambda'\lambda'_1)^2}{S\lambda'^2_1};$$

et comme généralement

$$ds^2 = dv^2 + V^2 d\theta^2,$$

on aura, dans ce cas,

$$ds = \pm dv; \quad \text{d'où} \quad s + \text{const.} = \pm v,$$

le signe $\pm$ se rapportant au double sens dans lequel on peut compter l'arc s de l'arête de rebroussement. La question est ramenée actuellement à déterminer λ_1, μ_1, ν_1 d'après les trois équations

$$\sigma'^2 \sin^2 \varepsilon = \frac{(S\lambda' \lambda_1')^2}{S\lambda_1'^2}, \qquad S\lambda' \lambda_1 = \sigma' \cos\varepsilon, \qquad S\lambda_1^2 = 1.$$

4. Si l'on fait

$$a = \frac{\lambda'}{\sigma' \cos\varepsilon}, \qquad b = \frac{\mu'}{\sigma' \cos\varepsilon}, \qquad c = \frac{\nu'}{\sigma' \cos\varepsilon},$$

le système des trois équations précédentes peut être remplacé par le suivant

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_1'}{\lambda_1 - a} = \dfrac{\mu_1'}{\mu_1 - b} = \dfrac{\nu_1'}{\nu_1 - c}, \\ a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 = 1, \\ \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \\ A\lambda_1 + B\mu_1 + C\nu_1 = \varpi; \end{cases}$$

où l'on a introduit auxiliairement la quatrième équation, dans laquelle A, B, C, ϖ sont des fonctions indéterminées de θ. On vérifie que les trois premières lignes $(\alpha.)$ peuvent tenir lieu du système primitif, par la double transformation de rapports déduite de la première ligne

$$\frac{S\lambda_1'^2}{S(\lambda_1 - a)^2} = \frac{(S\lambda_1' \lambda_1')^2}{(S\lambda_1' (\lambda_1 - a))^2}$$

qui reproduit la première équation du système en question.

Sous la condition

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$

on déduit des trois dernières équations $(\alpha.)$

$$(\beta.) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a}{h^2} + \dfrac{A}{H^2}\varpi + (Bc - Cb)R, \\ \mu_1 = \dfrac{b}{h^2} + \dfrac{B}{H^2}\varpi + (Ca - Ac)R, \\ \nu_1 = \dfrac{c}{h^2} + \dfrac{C}{H^2}\varpi + (Ab - Ba)R, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$R = \frac{1}{h^2 H^2}\sqrt{H^2(h^2 - 1) - h^2\varpi^2}; \qquad a^2 + b^2 + c = h^2; \qquad A^2 + B^2 + C^2 = H^2.$$

De la première ligne ($\alpha.$) on déduit les deux nouveaux rapports égaux

$$\frac{SA\lambda_1'}{SA(\lambda_1-a)} = \frac{Sa\lambda_1'}{Sa(\lambda_1-a)}; \quad \text{mais de}$$

$$SA\lambda_1 = \varpi, \qquad Sa\lambda_1 = 1, \quad \text{on tire}$$

$$SA\lambda_1' = \varpi' - SA'\lambda_1, \quad Sa\lambda_1' = -Sa'\lambda_1:$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{\varpi' - SA'\lambda_1}{\varpi} = \frac{Sa'\lambda_1}{h^2-1}.$$

Or de ($\beta.$) on conclut

$$SA'\lambda_1 = \frac{SA'a}{h^2} + \frac{H'}{H}\cdot\varpi + RSA'(Bc-Cb),$$

$$Sa'\lambda_1 = \frac{h'}{h} + \frac{Sa'A}{H^2}\cdot\varpi + RSa'(Bc-Cb);$$

donc, en observant que

$$SA'a = -SAa', \quad \text{on aura}$$

$$\varpi' = \left(\frac{H'}{H} + \frac{h'}{h(h^2-1)}\right)\varpi - \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{h^2\varpi^2}{H^2(h^2-1)}\right)SAa' + \left[SA'(Bc-Cb) + \varpi\frac{Sa'(Bc-Cb)}{h^2-1}\right]R.$$

Si l'on pose pour un instant

$$H = K\frac{h}{\sqrt{h^2-1}},$$

et qu'on transpose dans le premier membre le premier terme du second, le nouveau premier membre revient à $K\left(\frac{\varpi}{K}\right)'$ et, en faisant

$$\frac{\varpi}{K} = \varpi\cdot\frac{h}{H\sqrt{h^2-1}} = \sin\psi,$$

l'équation revient à

$$\psi' = -\frac{SAa'}{Hh\sqrt{h^2-1}}\cos\psi + \frac{SA'(Bc-Cb)}{hH^2} + \frac{Sa'(Bc-Cb)}{Hh^2\sqrt{h^2-1}}\sin\psi,$$

ce qui, par la substitution

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = w,$$

rentre dans une équation de *Bernouilli*. On pourrait, dans l'équation transformée en w, assujettir les fonctions A, B, C à la nouvelle condition d'annuler le coefficient du terme en w^2 ou du terme indépendant; mais on serait amené pour déterminer ces fonctions à une équation différentielle du même genre que l'équation en ψ, ce qu'on pouvait prévoir par une légère réflexion. Je prendrai donc tout de suite la deuxième condition finie

$$SAa' = 0, \quad \text{qui, jointe à} \quad SAa = 0,$$

fournit

$$\frac{A}{bc'-b'c}=\frac{B}{ca'-c'a}=\frac{C}{ab'-a'b}=\frac{H}{h\sqrt{Sa'^2-h'^2}};\quad \text{d'où}$$

$$\frac{Bc-Cb}{a'h-ah'}=\frac{Ca-Ac}{b'h-bh'}=\frac{Ab-Ba}{c'h-ch'}=\frac{H}{\sqrt{Sa'^2-h'^2}};\quad \text{et par suite}$$

$$(3^*.)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a}{h^2}+\dfrac{\sqrt{h^2-1}}{h^2\sqrt{Sa'^2-h'^2}}[(bc'-b'c)\sin\psi+(a'h-ah')\cos\psi], \\ \mu_1 = \dfrac{b}{h^2}+\dfrac{\sqrt{h^2-1}}{h^2\sqrt{Sa'^2-h'^2}}[(ca'-ac')\sin\psi+(b'h-bh')\cos\psi], \\ \nu_1 = \dfrac{c}{h^2}+\dfrac{\sqrt{h^2-1}}{h^2\sqrt{Sa'^2-h'^2}}[(ab'-a'b)\sin\psi+(c'h-ch')\cos\psi], \\ \psi' = \dfrac{Sa'(bc''-b''c)}{h(Sa'^2-h'^2)}+\dfrac{\sqrt{Sa'^2-h'^2}}{h\sqrt{h^2-1}}\sin\psi. \end{cases}$$

5. Il reste, pour avoir les cordonnées x, y, z de l'arête de rebroussement, à mettre dans les formules (4.) du n°. 3, les valeurs de λ_1, μ_1, ν_1 qu'on vient de trouver. On observe pour cela que

$$S\lambda'\lambda_1'=-\sigma'\cos\varepsilon\,Sa'\lambda_1=-\sigma'\cos\varepsilon\left[\frac{h'}{h}+\frac{\sqrt{h^2-1}}{h}\cdot\sqrt{Sa'^2-h'^2}\cos\psi\right],$$

$$\frac{S\lambda'\lambda_1'}{S\lambda_1'^2}=\frac{\sigma'^2\sin^2\varepsilon}{S\lambda'\lambda_1'}=\frac{-\sigma'\sin^2\varepsilon}{\cos\varepsilon\left[\dfrac{h'}{h}+\dfrac{\sqrt{h^2-1}}{h}\cdot\sqrt{Sa'^2-h'^2}\cos\psi\right]}=-u;$$

et si l'on veut introduire partout les données primitives λ, μ, ν, ε, on trouve sans peine

$$bc'-b'c=\frac{\sigma'\cos\alpha}{\varrho\cos^2\varepsilon},\ldots;\qquad a'h-ah'=\frac{\sigma'\cos\xi}{\varrho\cos^2\varepsilon},\ldots;$$

$$\sqrt{Sa'^2-h'^2}=\frac{\sigma'}{\varrho\cos\varepsilon},\qquad Sa'(bc''-b''c)=\frac{S\lambda''(\mu'\nu'''-\nu'\mu''')}{\sigma'^3\cos^3\varepsilon}=\frac{-\sigma'^3}{\varrho^2 r\cos^3\varepsilon};$$

ϱ désignant le rayon de courbure de la directrice, $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ ses cosinus de direction: r le rayon de torsion, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus de direction de l'axe du plan osculateur. Au moyen de quoi la solution est condensée dans le tableau suivant:

$$x=\lambda+\lambda_1 u,\quad y=\mu+\mu_1 u,\quad z=\nu+\nu_1 u,\quad s+\text{const}=\int\cos\varepsilon\,d\sigma+u,$$

$$\lambda_1 = \frac{d\lambda}{d\sigma}\cos\varepsilon+\sin\varepsilon(\cos\alpha\sin\psi+\cos\xi\cos\psi),$$

$$\mu_1 = \frac{d\mu}{d\sigma}\cos\varepsilon+\sin\varepsilon(\cos\beta\sin\psi+\cos\eta\cos\psi),$$

$$\nu_1 = \frac{d\nu}{d\sigma}\cos\varepsilon+\sin\varepsilon(\cos\gamma\sin\psi+\cos\zeta\cos\psi),$$

$$u = \frac{\sin\varepsilon}{\dfrac{d\varepsilon}{d\sigma} + \dfrac{1}{\varrho}\cos\psi},$$

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\cot\varepsilon\sin\psi;$$

auquel on peut joindre la relation

$$\cos\chi = \sin\varepsilon\sin\psi,$$

χ désignant l'angle du plan osculateur et de la génératrice rectiligne correspondante, et qui résulte de la dernière équation (α.). Il serait sans doute possible en interprétant convenablement ces formules, d'arriver à une solution *géométrique* de la question; mais je laisse cet examen de côté.

6. Tout dépend actuellement de l'intégration de l'équation différentielle en ψ. Cette équation est immédiatement intégrable 1° quand r est infini, c'est-à-dire quand la directrice est plane, c'est le cas résolu par M. *Beltrami*: 2° quand $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire quand les génératrices rectilignes sont normales à la directrice, dans ce cas

$$\psi = v_0 - v, \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \chi = v_0 - v,$$

dv étant l'angle de torsion et v_0 une constante arbitraire, et toutes les formules se simplifient notablement; 3° lorsque

$$\frac{r}{\varrho}\cot\varepsilon = k,$$

k étant une constante donnée, ce qui, en supposant de plus ε constant, comprend le cas des hélices tracées sur des cylindres à base quelconque.

Généralement il faudra se donner une solution particulière (dans le cas d'une directrice plane cette solution aurait été la *développée* plane de la courbe, si la forme donnée ici à l'équation différentielle n'avait rendu son intégration manifeste) et prendre en conséquence

$$\cot\varepsilon = \frac{f'(\sigma) + \dfrac{1}{r}}{\dfrac{1}{\varrho}\sin f(\sigma)},$$

f étant une fonction quelconque. Celle est même généralement la forme nécessaire de $\cot\varepsilon$; car la forme connue de l'intégrale générale de l'équation de *Bernouilli* soumet forcément les coefficients de l'équation à une pareille relation (ou toute autre équivalente). Et quel que soit, dans le présent problème, le choix initial des variables, il est impossible, à part quelques cas particuliers, de ramener la question à des quadratures *directes*, sans quoi, en renversant le calcul, l'équation de *Bernoulli* serait intégrable sans solution

particulière. Moyennant cette relation on trouvera par le procédé connu

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}f} = 1+\frac{e^{\int \cot f\, dv}}{\varkappa+\frac{1}{2}\int dv \operatorname{tang}\frac{f}{2} e^{\int \cot f\, dv}},$$

$\varkappa$ étant une constante arbitraire et dv l'angle de torsion.

7. En faisant varier cette constante, on aura diverses arêtes de rebroussement, répondant à la même loi de variation angulaire de la génératrice rectiligne, et dont l'ensemble formera une surface sur laquelle un point quelconque sera fixé par des valeurs particulières, attribuées aux paramètres $\varkappa$ et θ ou σ. Pour trouver les trajectoires orthogonales des arêtes de rebroussement c'est-à-dire des courbes $\varkappa =$ constante, on observe d'abord que de $(\alpha.)$ on déduit

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_1-a} = \frac{Sa\lambda_1'}{Sa(\lambda_1-a)} = \frac{Sa'\lambda_1}{h^2-1} = \frac{h'}{h(h^2-1)} + \frac{\sqrt{Sa'^2-h'^2}}{h\sqrt{h^2-1}}\cos\psi = \frac{\sigma'\cos\varepsilon}{u},$$

d'où, à cause de

$$x' = \lambda'+\lambda_1' u+\lambda_1 u',$$

on déduit

$$x' = \lambda_1(\sigma'\cos\varepsilon+u').$$

Donc, en observant que

$$\frac{dx}{d\varkappa} = \lambda_1\frac{du}{d\varkappa}+u\frac{d\lambda_1}{d\varkappa},$$

on aura

$$S\frac{dx}{d\varkappa}\frac{dx}{d\theta} = (\sigma'\cos\varepsilon+u')\frac{du}{d\varkappa}, \qquad S\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = (\sigma'\cos\varepsilon+u')^2.$$

Donc, d'après le commencement du n°. 1, l'équation différentielle des trajectoires cherchées sera

$$d\theta(\sigma'\cos\varepsilon+u')+\frac{du}{d\varkappa}d\varkappa = 0; \qquad \text{d'où}$$

$$\int \cos\varepsilon\, d\sigma+u = \text{constante}, \qquad \text{c. à dire}$$

$$s = \text{constante},$$

s étant toujours l'arc de l'arête de rebroussement. Ce qui, en vertu d'une propriété connue de la théorie des surfaces, montre que les arêtes de rebroussement forment une série de lignes géodésiques sur la surface qui est leur lieu géométrique. Cette propriété a été établie autrement par M. *Beltrami*. On la déduit aisément de l'expression des cosinus de direction de la normale à la surface.

§. III.

8. Supposons que l'on veuille faire passer par une courbe donnée aux coordonnées rectangulaires α, β, γ, fonctions d'un paramètre θ, une surface développable qui soit tangente, le long de son arête de rebroussement à l'ellipsoide donné

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1.$$

On aura évidemment à intégrer le système

$$\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{dy}{y-\beta}=\frac{dz}{z-\gamma},$$

$$\frac{\alpha x}{l^2}+\frac{\beta y}{m^2}+\frac{\gamma z}{n^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1,$$

lequel, par la double substitution

$$x=l\lambda_1,\qquad y=m\mu_1,\qquad z=n\nu_1,$$
$$\alpha=la,\qquad \beta=mb,\qquad \gamma=nc$$

devient le système ($\alpha.$), n°. 4. Par la substitution inverse, faite dans le système ($\beta^*.$), on aura donc, tout de suite,

(A.)
$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{\delta^2}+\dfrac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2\sqrt{S\dfrac{\alpha'^2}{l^2}-\delta'^2}}\left[\dfrac{l}{mn}(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\sin\psi+(\alpha'\delta-\alpha\delta')\cos\psi\right], \\ y=\dfrac{\beta}{\delta^2}+\dfrac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2\sqrt{S\dfrac{\alpha'^2}{l^2}-\delta'^2}}\left[\dfrac{m}{ln}(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)\sin\psi+(\beta'\delta-\beta\delta')\cos\psi\right], \\ z=\dfrac{\gamma}{\delta^2}+\dfrac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2\sqrt{S\dfrac{\alpha'^2}{l^2}-\delta'^2}}\left[\dfrac{n}{lm}(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\sin\psi+(\gamma'\delta-\gamma\delta')\cos\psi\right], \\ \psi'=\dfrac{1}{lmn}\cdot\dfrac{S\alpha'(\beta\gamma''-\gamma\beta'')}{\delta\left(S\dfrac{\alpha'^2}{l^2}-\delta'^2\right)}+\dfrac{\sqrt{S\dfrac{\alpha'^2}{l^2}-\delta'^2}}{\delta\sqrt{\delta^2-1}}\sin\psi, \end{cases}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\delta=\sqrt{\frac{\alpha^2}{l^2}+\frac{\beta^2}{m^2}+\frac{\gamma^2}{n^2}}.$$

On remarque encore que l'intégration est immédiate quand la courbe donnée est plane, et dans d'autres cas faciles à voir.

9. Si l'on remplace dans les équations (A.) ψ par $\frac{\psi}{l}$ et que, après avoir multiplié la dernière par l, on fasse tendre cette quantité vers l'infini, on aura les formules relatives au cylindre

$$\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{n^2}=1,$$

savoir

$$x=\frac{\alpha}{\delta^2}+\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}\left[\psi+mn\,\frac{\alpha'\delta-\alpha\delta'}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}\right],$$

$$y=\frac{\beta}{\delta^2}-\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2}\,\frac{m\gamma}{n},$$

$$z=\frac{\gamma}{\delta^2}+\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta^2}\,\frac{n\beta}{m},$$

$$\psi'=mn\delta\,\frac{S\alpha'(\beta\gamma''-\gamma\beta'')}{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2}+\frac{1}{mn}\,\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\delta^2\sqrt{\delta^2-1}}\,\psi,$$

où

$$\delta=\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}+\frac{\gamma^2}{n^2}}.$$

Il n'y aura qu'à intégrer par le procédé ordinaire l'équation linéaire en ψ.

10. Si dans les équations (A.) on remplace x par $x-l$, α par $\alpha-l$, m^2 par pl, n^2 par ql et qu'on fasse tendre ensuite l vers l'infini on aura les formules relatives au paraboloide elliptique

$$2x=\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q},$$

savoir

$$x=-\alpha+\frac{\beta^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}+\frac{\sqrt{-2\alpha+\frac{\beta^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}}}{\sqrt{\frac{\beta'^2}{p}+\frac{\gamma'^2}{q}}}\left[\frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{q}}(\beta\gamma'-\beta'\gamma)\sin\psi+\left(\frac{\beta\beta'}{p}+\frac{\gamma\gamma'}{q}\right)\cos\psi\right],$$

$$y=\beta+\frac{\sqrt{-2\alpha+\frac{\beta^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}}}{\sqrt{\frac{\beta'^2}{p}+\frac{\gamma'^2}{q}}}\left[\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\gamma'\sin\psi+\beta'\cos\psi\right],$$

$$z=\gamma+\frac{\sqrt{-2\alpha+\frac{\beta^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}}}{\sqrt{\frac{\beta'^2}{p}+\frac{\gamma'^2}{q}}}\left[-\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\beta'\sin\psi+\gamma'\cos\psi\right],$$

$$\psi'=\frac{\beta'\gamma''-\gamma'\beta''}{\sqrt{p}\sqrt{q}\left(\frac{\beta'^2}{p}+\frac{\gamma'^2}{q}\right)}+\frac{\sqrt{\frac{\beta'^2}{p}+\frac{\gamma'^2}{q}}}{\sqrt{-2\alpha+\frac{\beta^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}}}\sin\psi.$$

11. Le cas de l'hyperboloide à une nappe se déduit des formules (A.) en changeant l en $l\sqrt{-1}$, ψ en $\psi\sqrt{-1}$ et transformant $i\sin i\psi$, $\cos i\psi$ (i étant $\sqrt{-1}$) en exponentielles réelles ou en fonctions hyperboliques: l'équation en ψ est toujours une équation de *Bernoulli*. Pour en déduire ce qui est relatif au cône on change dans les formules obtenues, et que je puis me dispenser d'écrire, l, m, n en lk, mk, nk. On obtient des expressions de la forme

$$x = \frac{k\alpha}{\delta^2} + k[A(e^{\psi} - e^{-\psi}) + B(e^{\psi} + e^{-\psi})],$$

$$\psi' = M + kN(e^{\psi} - e^{-\psi}),$$

A, B, M, N étant des fonctions indépendentes de k. Si l'on faisait tout de suite $k = 0$, x, y, z ne dépendraient pas de ψ, ce qui ne peut être. Mais si l'on remplace ψ par $\psi + \log C$, C étant une constante quelconque et que l'on pose $kC = 1$, on aura

$$\lim k(e^{\psi} - e^{-\psi}) = \lim\left(e^{\psi} - \frac{1}{C^2}e^{-\psi}\right) = e^{\psi},$$

et conséquemment, pour le cas du cône,

$$x = (A + B)e^{\psi}, \qquad \psi' = M + Ne^{\psi}.$$

L'équation différentielle revient à une équation linéaire en la divisant par e^{ψ}.

L'hyperboloide à deux nappes et ses variétés se traitent d'une manière analogue.

§. IV.

12. J'ajouterai, pour terminer, quelques remarques concernant les surfaces réglées en général. Si, revenant aux notations du n°. 1, λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 sont des fonctions bien définies du paramètre θ, on peut, par les formules (4.) du n°. 3, rapporter la surface à sa ligne de striction qui est une des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. Mais il est plus simple de supposer

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad \lambda_1, \quad \mu_1, \quad \nu_1$$

égaux aux cosinus de direction de l'axe du plan osculateur de la directrice (λ, μ, ν) qui devient elle-même la ligne de striction. En désignant par r le rayon de torsion de cette courbe, les formules générales peuvent alors s'écrire

$$x = \lambda + \lambda_1 v, \qquad y = \mu + \mu_1 v, \qquad z = \nu + \nu_1 v,$$

$$ds^2 = dv^2 + d\sigma^2\left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right),$$

$$\operatorname{tang}\varphi\, dv = d\sigma\sqrt{1 + \frac{v^2}{r^2}},$$

ce qui résulte aussi de considérations géométriques très-simples. On voit en particulier que, si r est constant et que φ ne dépende que de θ ou de v, le problème des trajectoires des génératrices rectilignes est immédiatement ramené aux quadratures.

On fait dépendre aussi d'une quadrature l'évaluation de l'aire limitée sur la surface par un contour donné quelconque. Car, l'élément superficiel du second ordre étant

$$dv\,d\sigma\sqrt{1+\frac{v^2}{r^2}},$$

on peut, quel que soit r, effectuer l'intégration par rapport à v, et, en substituant aux limites de v les fonctions de θ ou σ données par le contour, le reste dépendra d'une simple quadrature, ou de plusieurs quadratures séparées si ce contour est formé d'arcs de plusieurs courbes. La même réduction aura lieu visiblement, s'il s'agit de la détermination du centre de gravité ou du moment d'inertie de la position considérée de surface.

13. Si l'on prend $d\theta$ pour l'élément constant du temps et que l'on considère le mouvement d'un point matériel sur la surface, la fonction des forces ne dépendant que de v, en faisant

$$R=\tfrac{1}{2}\left[v'^2+\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)\sigma'^2\right]+f(v)=H,$$

H étant la constante des forces vives, on aura, par les formules générales de la mécanique analytique, savoir

$$\frac{d.\left(\frac{dR}{dv'}\right)}{d\theta}=\frac{dR}{dv},\qquad \frac{d.\left(\frac{dR}{d\sigma'}\right)}{d\theta}=\frac{dR}{d\sigma},$$

les deux équations particulières du mouvement

$$v''=\frac{v}{r^2}\sigma'^2+f'(v),$$

$$\left[\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)\sigma'\right]'=-\frac{v^2}{r^3}\sigma'^2\frac{dr}{d\sigma}.$$

Si donc r est constant, on aura cette intégrale première

$$\sigma'=\frac{c}{1+\frac{v^2}{r^2}}$$

qui, combinée avec l'équation des forces vives, donne

$$v'=\sqrt{2H-2f(v)-\frac{c^2}{1+\frac{v^2}{r^2}}},$$

et par suite

$$d\sigma = \frac{c\,dv}{\left(1+\frac{v^2}{r^2}\right)\sqrt{2H-2f(v)-\frac{c^2}{1+\frac{v^2}{r^2}}}}$$

de façon que le problème est ramené aux quadratures.

En particulier, lorsque la fonction $f(v)$ est nulle, le mobile décrit uniformément une ligne géodésique de la surface: on peut prendre l'élément du temps égal à l'arc ds de la ligne parcourue et supposer $H=\frac{1}{2}$; en posant en outre

$$v = r\cot\psi,$$

l'équation précédente (en changeant son signe) devient

$$\frac{d\sigma}{rc} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}}.$$

On a donc, en désignant par c' une nouvelle constante,

$$v = r\cot\mathrm{am}\left(\frac{\sigma+c'}{rc}, c\right)$$

pour l'équation des lignes géodésiques; et

$$ds = \frac{r\,d\psi}{\sin^2\psi\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}};$$

s en résulte par une quadrature elliptique.

St. Etienne, 7. Janvier 1863.

Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. *Chasles* abhängt.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

P r o b l e m.

On donne dans le même plan deux systèmes de sept point chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques.

Wenn $a = 0$ und $a_1 = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien in derselben Ebene darstellen, die sich in einem Punkte c schneiden, so ist

$$(1.) \qquad a - \lambda a_1 = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt c geht. Diese Gleichung kann man für den analytischen Ausdruck des vom Centrum c ausgehenden Strahlbüschels nehmen. Denn man erhält aus ihr die Gleichung jedes einzelnen Strahles, wenn man dem willkürlichen Factor λ den ihm entsprechenden Werth zuertheilt.

Sind ferner $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen irgend zweier geraden Linien, welche sich in dem Punkte C schneiden, so ist wieder:

$$(2.) \qquad A - \lambda A' = 0$$

mit dem willkürlichen Factor λ die Gleichung irgend einer geraden Linie, welche durch den Punkt C geht; und die Gleichung (2.) ist der analytische Ausdruck für einen zweiten vom Centrum C ausgehenden Strahlbüschel.

Die Gleichungen (1.) *und* (2.) *repräsentiren irgend zwei von den Centren c und C ausgehende homographische Strahlbüschel, deren homologe Strahlen durch den willkürlichen, aber in beiden Gleichungen gleichen Factor* λ *bestimmt sind.*

Beiläufig sei erwähnt, dass in gleicher Weise die Gleichung (2.) eine beliebige mit dem Strahlbüschel (1.) homographisch getheilte gerade Linie darstellt, wenn $A = 0$ und $A' = 0$ die Gleichungen von irgend zwei Punkten bedeuten.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir annehmen, dass c und C die Centren seien der gesuchten beiden Strahlbüschel und dass die Gleichungen (1.) und (2.) die homologen Strahlen der beiden Systeme darstellen. Es seien ferner x, y, z mit den angehängten Indices $1, 2, \ldots, 7$ die homogenen Coordinaten der 7 gegebenen Punkte des einen Systemes und X, Y, Z mit denselben Indices die Coordinaten der entsprechenden Punkte des anderen Systemes.

Lassen wir alsdann k irgend einen der genannten sieben Indices bedeuten, so drücken die beiden Gleichungen

$$(3.) \qquad (a)_k - \lambda_k (a_1)_k = 0, \qquad (A)_k - \lambda_k (A')_k = 0$$

die vierzehn Bedingungen aus, dass sieben Strahlen des einen Strahlbüschels c durch die sieben gegebenen Punkte des einen Systemes gehen, und dass ihre homologen Strahlen des anderen Strahlbüschels C durch die sieben gegebenen Punkte des anderen Systemes gehen, vorausgesetzt, dass $(a)_k$, $(a_1)_k$ und $(A)_k$, $(A')_k$ die Ausdrücke bedeuten, in welche a, a_1 und A, A' durch Veränderung der variabeln Coordinaten in die den Indices k entsprechenden Coordinaten der gegebenen Punkte des einen und des anderen Systemes übergehen.

Diese vierzehn Bedingungen reduciren sich durch Elimination von λ_k auf folgende sieben Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{(a)_k}{(a_1)_k} - \frac{(A)_k}{(A')_k} = 0,$$

welche das vorgelegte Problem lösen.

Denn bestimmt man die zwölf Constanten in den vier linearen Functionen a, a_1, A, A' in der Weise, dass sie den sieben Gleichungen (4.) genügen, so ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(5.) \qquad a = 0, \qquad a_1 = 0$$

die Coordinaten des gesuchten Centrums c, und aus den Gleichungen

$$(6.) \qquad A = 0, \qquad A' = 0$$

die Coordinaten des Centrums C.

Aus dem Umstande, dass nur sieben Gleichungen die zwölf Constanten zu bestimmen haben, darf man aber nicht folgern, dass das Problem unendlich viele Auflösungen zulasse. Es ist im Gegentheil, wie M. *Chasles* bemerkt, das Problem ein vollständig bestimmtes.

Um dieses nachzuweisen, setzen wir:

$$(7.) \qquad \begin{cases} a = \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z, & A = \alpha^0 X + \beta^0 Y + \gamma^0 Z, \\ a_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & A' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z. \end{cases}$$

Von den zwölf in diese vier linearen Ausdrücke von a, a_1, A, A' eingehenden Constanten können wir zwei, z. B. β_0 und γ_1 gleich 0 setzen, was darauf hinauskäme, den beiden durch das Centrum c gehenden geraden Linien $a=0$ und $a_1=0$, die wir beliebig um das Centrum drehen können, bestimmte Richtungen zu geben.

Berücksichtiget man ferner die Art des Eingehens der noch übrigen Constanten in die Gleichungen (4.), so sieht man, dass sich noch drei Constanten auf die Einheit zurückführen lassen, etwa $\alpha_0=\alpha_1=\alpha^0=1$. Es bleiben also in der That nur sieben zu bestimmende Constanten übrig, deren Zahl gleich ist der Zahl der das Problem lösenden Gleichungen.

Wir werden jedoch, um die Symmetrie nicht zu zerstören, im Folgenden sämmtliche zwölf Constanten berücksichtigen, aber an ihrer Stelle neun andere einführen.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir die Gleichung (4.) wie folgt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} (a_{00}x_k+a_{01}y_k+a_{02}z_k)X_k \\ +(a_{10}x_k+a_{11}y_k+a_{12}z_k)Y_k \\ +(a_{20}x_k+a_{21}y_k+a_{22}z_k)Z_k = 0, \end{cases}$$

indem wir haben:

$$(9.)\qquad \begin{cases} a_{00}=\alpha_0\alpha'-\alpha_1\alpha^0, & a_{10}=\beta_0\alpha'-\beta_1\alpha^0, & a_{20}=\gamma_0\alpha'-\gamma_1\alpha^0, \\ a_{10}=\alpha_0\beta'-\alpha_1\beta^0, & a_{11}=\beta_0\beta'-\beta_1\beta^0, & a_{21}=\gamma_0\beta'-\gamma_1\beta^0, \\ a_{20}=\alpha_0\gamma'-\alpha_1\gamma^0, & a_{21}=\beta_0\gamma'-\beta_1\gamma^0, & a_{22}=\gamma_0\gamma'-\gamma_1\gamma^0. \end{cases}$$

Diese neun neuen Constanten a sind jedoch nicht unabhängig von einander, sondern es findet, wie aus der Determinanten-Theorie bekannt ist, zwischen ihnen die Gleichung Statt:

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Da aber in die acht Gleichungen (8.) und (10.) nur die Verhältnisse der zu bestimmenden neun Constanten a eingehen, so geben diese Gleichungen die Lösung des vorgelegten Problemes vollständig und zwar in folgender Weise.

Es seien m und n irgend zwei von den Constanten a. Durch sie lassen sich die übrigen sieben Constanten vermittelst der sieben linearen Gleichungen (8.) ausdrücken in der Form:

$$(11.)\qquad a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}m+c_{\mu\nu}n,$$

indem $b_{\mu\nu}$ und $c_{\mu\nu}$ bestimmte Functionen der Coordinaten der gegebenen vierzehn Punkte darstellen. Setzen wir nun diese Werthe (11.) in (10.), so erhalten wir die gesuchte in $\frac{m}{n}$ cubische Gleichung:

$$(12.)\qquad \begin{vmatrix} b_{00}m+c_{00}n, & b_{01}m+c_{01}n, & b_{02}m+c_{02}n \\ b_{10}m+c_{10}n, & b_{11}m+c_{11}n, & b_{12}m+c_{12}n \\ b_{20}m+c_{20}n, & b_{21}m+c_{21}n, & b_{22}m+c_{22}n \end{vmatrix} = 0.$$

Lösen wir diese cubische Gleichung auf, und setzen $n=1$, so geben die Gleichungen (11.) die Werthe aller neun Coefficienten a.

Es bleibt noch übrig die Coordinaten x, y, z des Centrums c festzustellen. Zu diesem Zwecke erinnern wir, dass $a=0$ und $a_1=0$ die Gleichungen zweier geraden Linien sind, welche sich in dem Centrum c schneiden. Bezeichnen wir nun mit X, Y, Z irgend welche Grössen, so stellt die Gleichung: $aA'-a_1A=0$ oder, vollständig entwickelt, die Gleichung:

$$(13.)\qquad \begin{cases} (a_{00}x+a_{01}y+a_{02}z)X \\ +(a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z)Y \\ +(a_{20}x+a_{21}y+a_{22}z)Z = 0 \end{cases}$$

ein System von geraden Linien dar, welche sich in dem Centrum c schneiden. Man hat daher zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z dieses Centrums irgend zwei von den drei Gleichungen:

$$(14.)\qquad \begin{cases} a_{00}x+a_{01}y+a_{02}z = 0, \\ a_{10}x+a_{11}y+a_{12}z = 0, \\ a_{20}x+a_{21}y+a_{22}z = 0. \end{cases}$$

Da die Coefficienten in diesen Gleichungen aber von der cubischen Gleichung (12.) abhängen, so hat man drei Auflösungen des Problemes.

Wenn in dem behandelten Probleme an Stelle von sieben Punkten in jedem der beiden Systeme acht Punkte gegeben wären, so würde dasselbe im Allgemeinen keine Lösung haben. Man kann sich aber die Frage stellen, welche Lage der achte Punkt o des ersten Systemes haben muss, wenn der ihm entsprechende Punkt O des zweiten Systemes gegeben ist. Diese Frage beantwortet die Gleichung (13.), wenn man festsetzt, dass x, y, z die Coordinaten des Punktes o und dass X, Y, Z die gegebenen Coordinaten des Punktes O seien. Sie sagt aus, dass der Punkt o auf einer von dem gegebenen Punkte O abhängenden geraden Linie (13.) beliebig gewählt werden

kann, welche durch das Centrum c geht. Die Gleichung (13.) stellt aber drei verschiedene gerade Linien dar, von welchen jede durch eines der drei Centren c geht. Man kann daher den Punkt o beliebig auf drei von dem Punkte O abhängenden geraden Linien wählen, welche durch die drei Centren c gehen.

Man erhält die Gleichung dieser drei geraden Linien in der Form eines Productes aus drei linearen Factoren, wenn man aus den sieben Gleichungen (8.) und der achten Gleichung (13.) die Verhältnisse der neun Coefficienten a in linearer Weise berechnet und sie in die Gleichung (10.) einsetzt. Die so präparirte Gleichung (10.) stellt mit den willkürlichen Constanten X, Y, Z Curven dritter Ordnung dar, welche durch die drei Centren c gehen. Aus der Discussion solcher Curven dritter Ordnung hat man bisher die Lösung des Problemes von M. *Chasles* abgeleitet, indem man die sechs von den neun Schnittpunkten zweier von diesen Curven feststellte, welche nicht die drei gesuchten Centren c sind.

Heidelberg, im März 1862.

Ebene Curven, zwischen deren Bogen und Coordinaten eine Gleichung zweiten Grades besteht.

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Ist zwischen dem Bogen s und den rechtwinkligen Coordinaten x, y einer ebenen Curve eine beliebige Gleichung zweiten Grades

$$(1.)\qquad As^2+2(Bx+Cy)s+Dx^2+2Exy+Fy^2+2(Gs+Hx+Jy)+K=0$$

gegeben, so lässt sich die resultirende Gleichung zwischen x und y mit Hülfe eines elliptischen Integrals allgemein darstellen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst kann man die Aufgabe auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Setzt man nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\cos\tau,\qquad \frac{\partial y}{\partial s}=\sin\tau,$$

differentiirt die Gleichung (1.) erst nach s, dann zweimal nach τ, so erhält man:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \lambda s+\mu x+\nu y+\xi=0, \\ \lambda' s+\mu' x+\nu' y+\xi'+\varrho s'=0, \\ \lambda'' s+\mu'' x+\nu'' y+\xi''+\frac{3}{2}\varrho' s'+\varrho s''=0, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \lambda &= A+B\cos\tau+C\sin\tau, \\ \mu &= B+D\cos\tau+E\sin\tau, \\ \nu &= C+E\cos\tau+F\sin\tau, \\ \xi &= G+H\cos\tau+J\sin\tau, \\ \varrho &= \lambda+\mu\cos\tau+\nu\sin\tau \end{aligned}$$

gesetzt ist, und die Accente Differentialquotienten nach τ bezeichnen. Durch

paarweise Verbindung der drei Gleichungen findet man die folgenden mit constanten Coefficienten:

$$(3.)\quad \begin{cases} As+Bx+Cy+G &= -(\varrho s''+\frac{3}{2}\varrho' s'), \\ Bs+Dx+Ey+H &= (\varrho s''+\frac{3}{2}\varrho' s')\cos\tau+\varrho' s'\sin\tau, \\ Cs+Ex+Fy+I &= (\varrho s''+\frac{3}{2}\varrho' s')\sin\tau-\varrho' s'\cos\tau, \end{cases}$$

woraus, wenn man ferner zur Abkürzung

$$h=-\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix};\quad f=\begin{vmatrix} G & B & C \\ H & D & E \\ J & E & F \end{vmatrix};\quad q=\begin{vmatrix} 1 & B & C \\ -\cos\tau & D & E \\ -\sin\tau & E & F \end{vmatrix}$$

setzt, die folgende lineare Gleichung für s allein hervorgeht:

$$(4.)\quad q(\varrho s''+\tfrac{3}{2}\varrho' s')-q'\varrho s'-hs+f=0.$$

Zwei specielle Integrale derselben lassen sich unmittelbar aus Gleichung (1.) finden. Da nämlich (4.) nicht von K abhängt und durch Substitution von $s+\frac{f}{h}$ für s von dem einzigen von G, H, J abhängigen Term f befreit wird, so kann man in Gleichung (1.)

$$G=H=J=K=0$$

setzen, und erhält aus letzterer in Verbindung mit der Relation

$$\partial s^2=\partial x^2+\partial y^2$$

eine homogene Gleichung erster Ordnung, die sich nach bekannter Methode auflösen lässt, und wegen des doppelten Vorzeichens der im Resultat enthaltenen Quadratwurzel zwei Werthe für s liefert. Setzt man zur Abkürzung

$$g=\begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix};\quad \sigma=\int\frac{q\partial\tau}{g\varrho+h}\sqrt{\frac{h}{\varrho}},$$

so lauten dieselben:

$$s=\sqrt{\frac{g\varrho+h}{\varrho}}\,e^{\pm\sigma}.$$

Das vollständige Integral der Gleichung (4.) ist demnach

$$s = \sqrt{\frac{g\varrho+h}{\varrho}}(ce^{\sigma}+c_1e^{-\sigma})+\frac{f}{h}.$$

Da dieser Ausdruck auch den allgemeinsten, der Gleichung (1.) entsprechenden Werth in sich enthalten muss, so bleiben nur noch die Bedingungen für c, c_1 zu suchen, unter denen der gegebenen Gleichung genügt wird. Die Rechnung kürzt sich einigermassen, indem man aus dem System

$$\begin{aligned} As+Bx+Cy+G &= \alpha, \\ Bs+Dx+Ey+H &= \beta, \\ Cs+Ex+Fy+J &= \gamma, \\ Gs+Hx+Jy+K &= \delta, \end{aligned}$$

wo α, β, γ die bekannten Werthe (3.) haben, zuerst die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A & B & C & G-\alpha \\ B & D & E & H-\beta \\ C & E & F & J-\gamma \\ G & H & J & K-\delta \end{vmatrix} = 0$$

bildet; dann für die letzte Gleichung des Systems die Gleichung (1.) in der Form

$$\alpha s+\beta x+\gamma y+\delta = 0$$

substituirt, und beide resultirende Gleichungen addirt, wodurch man erhält:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & G-\alpha \\ B & D & E & H-\beta \\ C & E & F & J-\gamma \\ G+\alpha & H+\beta & J+\gamma & K \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & \alpha \\ B & D & E & \beta \\ C & E & F & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C & G \\ B & D & E & H \\ C & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix} = k,$$

denn auf diesem Wege ist zugleich mit der Unbekannten δ der ganze lineare Theil eliminirt. Eine Berechnung der Determinante zur Linken giebt:

$$-4h^2 c\, c_1 = k,$$

und das Integral der Gleichung (1.) lautet nun:

$$s = \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{g\varrho+h}{\varrho}}\left(ce^{\sigma} - \frac{k}{c}e^{-\sigma}\right) + \frac{f}{h}.$$

Mittelst der Gleichungen (3.) lassen sich nun leicht die Werthe der Coordinaten finden. Setzt man

$$f_1 = \begin{vmatrix} A & G & C \\ B & H & E \\ C & J & F \end{vmatrix}, \quad f_2 = \begin{vmatrix} A & B & G \\ B & D & H \\ C & E & J \end{vmatrix}, \quad g_1 = \begin{vmatrix} E & F \\ B & C \end{vmatrix}, \quad g_2 = \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix},$$

so wird

$$x = \left(\frac{g_1\varrho}{h} + \cos\tau\right)\frac{ce^{\sigma} - \frac{k}{c}e^{-\sigma}}{2\sqrt{\varrho}\sqrt{g\varrho+h}} + \nu\,\frac{ce^{\sigma} + \frac{k}{c}e^{-\sigma}}{2\sqrt{h}\sqrt{g\varrho+h}} + \frac{f_1}{h},$$

$$y = \left(\frac{g_2\varrho}{h} + \sin\tau\right)\frac{ce^{\sigma} - \frac{k}{c}e^{-\sigma}}{2\sqrt{\varrho}\sqrt{g\varrho+h}} + \mu\,\frac{ce^{\sigma} + \frac{k}{c}e^{-\sigma}}{2\sqrt{h}\sqrt{g\varrho+h}} + \frac{f_2}{h}.$$

Die Elimination von τ zwischen beiden Gleichungen lässt sich allgemein ausführen. Setzt man nämlich

$$(5.) \qquad \alpha_1 = \alpha - As = Bx + Cy + G,$$

$$(6.) \qquad \begin{cases} \beta_1 = \beta - Bs = Dx + Ey + H, \\ \gamma_1 = \gamma - Cs = Ex + Fy + J, \end{cases}$$

$$\delta_1 = \delta - Gs = Hx + Jy + K,$$

so lässt sich Gleichung (1.) schreiben:

$$(7.) \qquad \alpha^2 = \alpha_1^2 - A(\beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1)$$

und Gleichung (2.):

$$(8.) \qquad \alpha+\beta\cos\tau+\gamma\sin\tau = 0.$$

Gleichung (7.) giebt zuerst α, dann Gleichung (5.) s, dann die Gleichungen (6.) β und γ, dann Gleichung (8.) $\cos\tau$ und $\sin\tau$, ausgedrückt in x und y, woraus weiter λ, μ, ν, ϱ, σ folgen.

Die vorstehende Auflösung erleidet nur eine Ausnahme für $h = 0$, d. i. für den Fall, wo die gegebene Gleichung parabolisch ist, wo sich nämlich die linearen Terme durch keine Veränderung des Anfangs der x, y, s entfernen lassen. In diesem Falle aber ergiebt sich unmittelbar das erste Integral der Gleichung (4.):

$$s' = -\frac{fq}{\varrho^{\frac{3}{2}}}\int\frac{\partial\tau\sqrt{\varrho}}{q^2},$$

demzufolge sich s als ein Doppelintegral darstellen würde. Anstatt jedoch die Constante der zweiten Integration der ursprünglichen Gleichung gemäss zu bestimmen, kann man sogleich den Werth von s mittelst Gleichung (1.), die wir in der Form

$$(G+\alpha)s+(H+\beta)x+(J+\gamma)y+K = 0$$

schreiben, und mittelst zweier der Gleichungen (3.) auf s' und s'' zurückführen, und erhält nach Elimination von x und y:

$$2fs+\begin{vmatrix} D & E & H \\ E & F & J \\ H & J & K \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D & E & \beta \\ E & F & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus nach Berechnung der letzten Determinante hervorgeht:

$$s = -\tfrac{1}{2}fg^2\Big(\int\frac{\partial\tau\sqrt{\varrho}}{q^2}\Big)^2 - \frac{fg\varrho'}{2q\sqrt{\varrho}}\int\frac{\partial\tau\sqrt{\varrho}}{q^2}$$

$$-\frac{f}{2q^2}(D\sin^2\tau - 2E\sin\tau\cos\tau + F\cos^2\tau) - \frac{1}{2f}\begin{vmatrix} D & E & H \\ E & F & J \\ H & J & K \end{vmatrix}.$$

Die Werthe von x und y sind hieraus leicht zu finden.

Die beiden Integrale

$$\int \frac{q\partial\tau}{g\varrho+h}\sqrt{\frac{h}{\varrho}}, \qquad \int \frac{\partial\tau\sqrt{\varrho}}{q^2}$$

stellen sich unmittelbar als elliptische Functionen dar, insofern ϱ, abgesehen von einem reinen Quadrat im Nenner, Function vierten Grades von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau$ ist. Eine Berechnung zeigt, dass das letztere keine Function dritter Gattung enthält.

Berlin, 1862.

Jacob Steiner.

Eine fast ununterbrochene Kette bilden im Journal von seiner Entstehung an bis vor wenig Jahren die unübertroffenen Arbeiten des am 1. April verstorbenen *Jacob Steiner*. Dem Journal liegt es darum ob, die Trauerkunde, welche die ganze mathematische Welt schmerzlich bewegt, zu bestätigen und dem Verstorbenen an der Stelle ein Denkmal zu setzen, wo die Kette abläuft.

Jacob Steiner gilt für den ersten Geometer seiner Zeit. Mit dem grössten Theile seiner Arbeiten, welche ihm diese Geltung verschafft haben, hat er das Journal geschmückt. Sie folgten schnell auf einander mit zwei grösseren, aber bedeutsamen Unterbrechungen.

Die Zeit der ersten Lücke in dem Journal füllt die Bearbeitung seines classischen Werkes aus: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Der Charakter des Buches ist Einfachheit und Strenge der Principien neben Mannigfaltigkeit der daraus gewonnenen Resultate. Darum wird es auch als Muster eines Lehrbuches der höheren Geometrie für spätere Zeiten dienen, welches reiche Keime weiterer Entwickelung in sich trägt. Der Verfasser vereinfacht, erweitert und vermehrt darin die von *Poncelet* erfundenen Beweismethoden.

Die Zeit der zweiten Unterbrechung scheint dem Kampfe mit dem Imaginären in der Geometrie gewidmet gewesen zu sein, wovon sich die Spuren vorher und nachher in dem Journal auffinden lassen. Es gewinnt diese Hypothese an Wahrscheinlichkeit, wenn man von dem Gespenst — wie *Steiner* sich auszudrücken liebte — in der Ebene und im Raume hört, mit dessen Hülfe er die verborgenen Wahrheiten enthüllte. Von da ab datiren seine zahlreichsten Entdeckungen, die weit über die Grenzen hinausgehen, welche seine Zeitgenossen sich gesteckt haben. Sie sind, gleich den *Fermat*schen Sätzen, für die Mit- und Nachwelt Räthsel. Denn *Steiner* hat es in dem Drange seiner Entdeckungen nicht mehr bewältigen können, die Wege zu bezeichnen, die ihn dahin geführt haben. Es ist dieses um so mehr zu bedauern, als er sich jetzt auf einem Boden befand, auf dem die synthetische Geometrie zwar eine Richtschnur der Bearbeitung geben, den sie aber nicht beherrschen kann, weil ihr die Allgemeinheit der Grundlage mangelt.

Die *Steiner*schen Sätze bleiben deshalb für den Geometer ein zu erstrebendes Ziel, für den Analytiker ein Wegweiser zur Bildung und Erforschung von Functionen, die in der höheren Algebra von grosser Bedeutung sind.

*Steiner*s Wirken steht mit der synthetischen Geometrie in unauflöslicher Verbindung. Mit unermüdlicher und ausschliesslicher Thätigkeit widmete er sich ihr, bis zu dem Grade der Schwärmerei, dass er es wie eine Schmach der Synthesis aufnahm, wenn bisweilen die Analysis, deren Macht er nicht unterschätzte, gleiche oder gar weitergreifende Resultate brachte.

Diese Hingebung hat er noch in einer letztwilligen Verordnung bekundet, welche durch Stiftung eines Preises für synthetische Geometrie auch in der Zukunft die Kräfte der Mathematiker auf diesen Zweig der Wissenschaft zu lenken sucht.

Heidelberg, den 22. April 1863.

Otto Hesse.

Ueber die Reibung der Flüssigkeiten.

Nachtrag zu der Abhandlung Seite 229 Band 59 dieses Journals.

(Von Herrn *Oskar Emil Meyer* in Göttingen.)

§. 1.

In der in der Ueberschrift genannten Abhandlung habe ich die mathematische Theorie einer Methode entwickelt, welche *Coulomb* zur experimentellen Bestimmung der inneren Reibung von Flüssigkeiten erfunden hat *). Ich habe die für dies Problem geltenden simultanen partiellen Differentialgleichungen durch eine Reihe von particularen Lösungen integrirt. Dabei zeigte sich der dieser Art von Aufgaben eigenthümliche Umstand, dass die particularen Lösungen theils in reeller theils in complex-imaginärer Form auftraten.

Die Natur der allgemeinen Lösung habe ich dann einer besonderen Discussion für den Fall unterworfen, dass die flüssige Umgebung des Apparats unbegrenzt ist. In diesem Falle giebt es zwei complex-imaginäre Lösungen, und es ist leicht nachzuweisen, dass die Summe der unendlich vielen reellen mit wachsender Zeit weit rascher verschwindet als die ersteren, so dass sie bald zu vernachlässigen ist.

Den allgemeineren Fall einer von festen Wänden begrenzten Flüssigkeit habe ich nicht näher untersucht. Vielmehr habe ich nur die Form der Lösungen der Differentialgleichungen entwickelt, ohne indess unter diesen die complex-imaginären von den reellen zu sondern oder auch nur nachzuweisen, dass unter ihnen complex-imaginäre enthalten sein können, noch zu bestimmen, wie viele derselben existiren.

---

*) Seit der Publication dieser Arbeit ist mir eine zweite Abhandlung von *Stokes* über Reibung (Transactions of the Cambridge philosophical society Vol. 9, part 2. 1851) bekannt geworden, in welcher derselbe ausser verschiedenen anderen Problemen auch die später von mir gelöste Aufgabe behandelt (Art. 7 und Note *B*). Ich mache daher auf Priorität keinen Anspruch, wenn auch unsere Methoden und Endformeln von einander sehr verschieden sind.

Stokes berechnet in dieser Abhandlung aus den bis dahin angestellten Beobachtungen numerische Werthe der Reibung verschiedener Flüssigkeiten. Diese stimmen für tropfbare Flüssigkeiten mit meinen Zahlen überein; dagegen weicht der für atmosphärische Luft berechnete Werth beträchtlich von meinen Bestimmungen (Bd. 59, S. 281) ab. Ich will desshalb hier vorläufig bemerken, dass meine Beobachtungen eine noch nicht berücksichtigte Fehlerquelle enthalten, worauf ich an einem anderen Orte zurückkommen werde.

Diese Lücke beabsichtige ich durch die gegenwärtige Mittheilung auszufüllen. Ich werde den Beweis führen, dass unter der früher anfgestellten unendlichen Reihe von particularen Lösungen je nach den Umständen entweder *zwei* oder *keine* von complex-imaginärer Form enthalten sind.

Das physikalische Interesse dieses Beweises liegt darin, dass nach der früheren Abhandlung die complex-imaginären Glieder, zu einem vereinigt, das Glied bilden, von dem die Periodicität der Bewegung abhängt. Es wird also zugleich bewiesen, *dass die Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement der Schwingungsbögen des Coulombschen Apparates eindeutige Grössen, also unabhängig vom Anfangszustande der Bewegung sind*, falls überhaupt periodische Bewegung zu Stande kommt. Eine solche findet nicht mehr statt, wenn die Ausdehnung der Flüssigkeit sehr beschränkt und dadurch der Einfluss ihrer inneren Reibung so sehr vermehrt wird, dass die Reibungskräfte über die anderen auf den Apparat wirkenden Kräfte, welche regelmässig wiederkehrende Oscillationen hervorzurufen streben, das Uebergewicht erhalten.

Ausser diesem physikalischen Interesse besitzt die Aufgabe ein nicht geringeres mathematisches. Die particularen Lösungen der Differentialgleichungen werden nämlich bestimmt durch die Quadrate der Wurzeln einer transcendenten Gleichung, welche gleiche positive und negative Wurzeln besitzt. Die reelle oder imaginäre Form der Lösungen hängt von der der Wurzeln ab. Die Lösung des Problems ist hierdurch darauf zurückgeführt, *von einer gewissen transcendenten Gleichung zu beweisen, dass sie ausser unendlich vielen reellen Wurzeln je nach dem Werthe der in ihr enthaltenen Parameter entweder vier oder keine complex-imaginären Wurzeln besitzt.* Diese Eigenschaft jener Gleichung aber scheint mir merkwürdig genug zu sein, um eine besondere Beachtung zu verdienen.

§. 2.

Ueber die endliche Anzahl der complex-imaginären Wurzeln einer transcendenten Gleichung.

Die in Rede stehende transcendente Gleichung erscheint in meiner erwähnten Abhandlung in mehreren verwandten Formen, welche je nach der Natur des physikalischen Problems, dem sie entsprechen, ein mehr oder minder complicirtes Ansehen haben. Die allgemeinste Form ist (Gleichung (14.) §. 8. S. 285, Bd. 59)

$$(1.) \qquad 0 = m^4 + \alpha^4 - 2m^3 \left\{ \beta_2 \frac{\cos mc}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc} + \beta_3 \frac{\cos mc'}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'} \right\}.$$

Hierin bezeichnet m die gesuchte Wurzel, und es sind α, β_2, β_3 ζ_2, ζ_3, c, c' reelle positive Grössen. Die Gleichung bezieht sich auf das physikalische Problem, die Bewegung des *Coulomb*schen Apparats zu bestimmen, wenn die Scheibe desselben sich *in der Grenze zweier* an derselben nicht adhärirenden Flüssigkeiten befindet. Haften die Flüssigkeiten aber an der Scheibe, so wird $\zeta_2 = 0$ und $\zeta_3 = 0$, und die Gleichung (1.) wird einfacher

$$(2.) \qquad 0 = m^4 + \alpha^4 - 2m^3\{\beta_2 \operatorname{ctg} mc + \beta_3 \operatorname{ctg} mc'\}.$$

Sind beide Flüssigkeiten gleich, befindet sich also die Scheibe *in einer* Flüssigkeit, so wird $\beta_2 = \beta_3 = \beta$ und (Gleichung (10.) §. 6, S. 249, Bd. 59)

$$(3.) \qquad 0 = m^4 + \alpha^4 - 2\beta m^3(\operatorname{ctg} mc + \operatorname{ctg} mc').$$

Befindet sich endlich die Scheibe *in der Mitte der Flüssigkeit*, so wird $c = c'$ und

$$(4.) \qquad 0 = m^4 + \alpha^4 - 4\beta m^3 \operatorname{ctg} mc.$$

Es ist nachzuweisen, dass einer der Gleichungen (1.) bis (4.) je nach dem positiv und reell vorausgesetzten Werthe der Parameter vier oder keine complex-imaginären Wurzeln m genügen. Dies habe ich in der früheren Abhandlung (Bd. 59, S. 256 und 292) für den speciellen Fall unendlich grosser c und c' daraus bewiesen, dass in diesem Falle für complexe m die Gleichungen sich in algebraische Gleichungen verwandeln. Ich will jetzt denselben Beweis ohne jene beschränkende Voraussetzung führen.

Um die Betrachtung möglichst von weitläufigen Rechnungen frei zu halten, beschränke ich dieselbe auf die Untersuchung der einfachsten Form der Gleichungen, wie sie die Gleichung (4.) darstellt. Es wird sich schliesslich leicht ergeben, wie der Beweis allgemeiner zu führen ist.

Ich bringe zunächst die Gleichung (4.) auf die Form

$$(5.) \qquad 0 = \frac{4\beta m^3}{m^4 + \alpha^4} - \operatorname{tg} mc.$$

Dann zerlege ich den algebraischen Theil in Partialbrüche und entwickle ebenfalls die Tangente nach Partialbrüchen; so erhalte ich

$$(6.) \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{2\sqrt{2}\,\beta(m\sqrt{2}+\alpha)}{(m\sqrt{2}+\alpha)^2+\alpha^2} + \dfrac{2\sqrt{2}\,\beta(m\sqrt{2}-\alpha)}{(m\sqrt{2}-\alpha)^2+\alpha^2} + \dfrac{2mc}{m^2c^2-(\frac{1}{2}\pi)^2} + \dfrac{2mc}{m^2c^2-(\frac{3}{2}\pi)^2} + \cdots \\ \qquad \cdots + \dfrac{2mc}{m^2c^2-\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right)^2} + \cdots . \end{cases}$$

Breche ich diese Reihe nach dem n^{ten} Gliede der Tangentenentwickelung ab, so besteht die Gleichung aus $n+2$ Gliedern. Schaffe ich die Nenner

durch Multiplication fort und dividire durch den gemeinsamen Factor m, so bleibt eine algebraische Gleichung, welche für m^2 vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Sie hat also $(n+1)$ Wurzeln m^2. Nun ist leicht einzusehen, dass von diesen $(n+1)$ Wurzeln mindestens $(n-1)$ reell und positiv sein müssen. Denn da mit wachsendem reellen positiven m die Function

$$(7.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2\sqrt{2}\,\beta(m\sqrt{2}+\alpha)}{(m\sqrt{2}+\alpha)^2+\alpha^2}+\frac{2\sqrt{2}\,\beta(m\sqrt{2}-\alpha)}{(m\sqrt{2}-\alpha)^2+\alpha^2}+\frac{2mc}{m^2c^2-(\tfrac{1}{2}\pi)^2}+\frac{2mc}{m^2c^2-(\tfrac{3}{2}\pi)^2}+\cdots \\ &\qquad\qquad \cdots+\frac{2mc}{m^2c^2-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2} \end{aligned} \right.$$

für die Werthe

$$m^2c^2=(\tfrac{1}{2}\pi)^2,\quad (\tfrac{3}{2}\pi)^2,\quad (\tfrac{5}{2}\pi)^2,\quad \ldots\quad \left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2$$

negativ unendlich gross und gleich darauf positiv unendlich gross wird, ohne für andere reelle Werthe von m unstetig zu werden, so ist klar, dass zwischen $\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$ und $\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$, $\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$ und $\left(\frac{5}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$, $\ldots$ $\left(\frac{2n-3}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$ und $\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c}\right)^2$ mindestens je ein positiver reeller Werth von m^2 liegen muss, welcher die unter (7.) angegebene Function $=0$ macht. Die betrachtete Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades hat also mindestens $(n-1)$ positive Wurzeln m^2. Ausser diesen können ihr höchstens zwei negative oder imaginäre Werthe von m^2 genügen. Die Gleichung besitzt also höchstens vier imaginäre Wurzeln m.

Dieser Beweis gilt für jede ganze Zahl n, also auch für einen beliebig grossen Werth derselben. Lässt man nun n beliebig wachsen, so bringt man dadurch die algebraische Gleichung bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit in Uebereinstimmung mit der Gleichung (6.), also auch mit der mit letzterer identischen transcendenten Gleichung (5.). Damit ist bewiesen, *dass auch die Gleichung* (5.) *nicht mehr als höchstens vier imaginäre Wurzeln m besitzen kann.*

Die möglichen Werthe der Anzahl der imaginären m sind also 0, 1, 2, 3, 4. Von diesen Möglichkeiten bleiben aber nur die erste und die letzte, 0 und 4, und zwar in Folge einer Bemerkung, welche ich schon in der früheren Arbeit gemacht habe. Rein imaginäre Werthe von m können nämlich, wie leicht einzusehen ist, der Gleichung nicht genügen; die imaginären Werthe von m sind also von der complexen Form $m=a+bi$, wo $i=\sqrt{-1}$ ist. Genügt aber dieser Werth, so erfüllt die Gleichung auch der andere $a-bi$, und die mit entgegengesetztem Zeichen behafteten $-a-bi$ und $-a+bi$. *Besitzt*

also die Gleichung (5.) *überhaupt imaginäre Wurzeln, so besitzt sie deren nicht mehr und nicht weniger als vier, und zwar von complex-imaginärer Form.*

§. 3.

Andre Art des Beweises.

Das gefundene Resultat ist ein specieller Fall eines allgemeinen Theorems, des Theorems nämlich, das jede monodrome und monogene Function im ganzen Intervalle aller reellen und imaginären Werthe ihres Arguments ebenso oft unendlich gross wie unendlich klein wird, wobei auf die Ordnung des unendlich Kleinen und unendlich Grossen Rücksicht zu nehmen ist.

Wendet man dieses Theorem auf den vorliegenden Fall an, so wird die Function

$$P = \frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4} - \operatorname{tg} mc$$

immer nur unendlich gross erster Ordnung. Es tritt aber die Schwierigkeit ein, dass die Function für unendlich grosse reelle m keine bestimmte Bedeutung mehr behält.

Nun ist früher bewiesen (Bd. 59, S. 253), dass, wenn $m = a+bi$ ein complex-imaginärer Werth ist, der $P = 0$ macht, immer

$$a^2+b^2 < \alpha^2$$

ist; demnach wird P für sehr grosse imaginäre m nie 0, ebensowenig ∞. Andererseits überzeugt man sich durch Construction zweier Curven, deren Abscissen m und deren Ordinaten

$$p = \frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4} \quad \text{und} \quad q = \operatorname{tg} mc$$

sind, für alle reellen Werthe von m leicht davon, dass zwischen je zwei hinlänglich grossen Werthen von m^2, für welche $q = \infty$ wird, immer ein, aber auch nur ein reeller Werth von m^2 liegt, für welchen $p = q$ wird. Für reelle m von grossem absoluten Werthe wechseln also die Punkte, für welche die Function P Null oder unendlich wird, regelmässig ab.

Demnach bleibt jener allgemeine Lehrsatz für die Function P angenähert richtig, wenn ich das Intervall der unbeschränkt Veränderlichen m nicht bis ins Unendliche sondern bis zu einer sehr grossen oberen Grenze ausdehne. Da ich diese Grenze beliebig gross wählen kann, so kann ich in der Anwendung jenes Satzes auf die Function P jeden beliebigen Grad von Strenge erreichen, d. h. exacte Resultate finden.

Ich wähle nun die Grenzen für die reellen Werthe von m so, dass dieselben $2n$ Zweige der Curve q umfassen, und verstehe unter n eine ganze Zahl von beliebiger Grösse. Im imaginären Intervall reicht die Bestimmung aus, dass die Bestandtheile a und b von $m = a + bi$ grösser als α sind. Innerhalb dieser Grenzen lassen sich nun leicht die Werthe von m aufzählen, für welche $P = 0$ oder ∞ wird.

Die Function P wird zunächst unendlich gross für vier imaginäre Wurzeln m, welche der Gleichung

$$0 = m^4 + \alpha^4$$

genügen, ferner für $2n$ reelle Werthe von m. Denn da das Intervall $2n$ Zweige der Curve q umfasst, so wird in demselben q, also auch P, $2n$mal unendlich. Demnach wird innerhalb der gewählten Grenzen die Function P überhaupt $(2n+4)$ mal unendlich gross.

Es lässt sich ferner ein Minimum der Anzahl reeller m, welche $P = 0$ machen, in jenem Intervall angeben. Da nämlich die Curve p jeden Zweig der Curve q mindestens einmal schneiden muss, und da innerhalb der Grenze $2n$ Zweige der Curve q liegen, so wird innerhalb derselben mindestens $2n$ mal die Ordinate p gleich der Ordinate q, oder es wird P für mindestens $2n$ reelle Werthe von m gleich Null.

Da nun innerhalb jener sehr grossen Grenze die Anzahl der Unendlichkeitspunkte von P gleich der der Nullpunkte sein muss, so folgt, dass P höchstens für vier imaginäre Werthe von m verschwinden kann.

Diese veränderte Form des Beweises zeigt die enge Beziehung zwischen den imaginären Werthen von m, welche $P = 0$ machen, und denen, für welche es unendlich wird, also die Verwandtschaft der betrachteten transcendenten Gleichung mit der algebraischen $m^4 + \alpha^4 = 0$, in welche sie übergeht, wenn bei dem physikalischen Probleme von der Reibung abstrahirt wird.

§. 4.

Bedingungen für das Auftreten der vier complex-imaginären Wurzeln.

Nach dem Vorigen ist die Anzahl der complex-imaginären Wurzeln der Gleichung (5.) entweder 4 oder 0. Es bleibt zu untersuchen übrig, welche dieser beiden Möglichkeiten stattfindet, und unter welchen Umständen. Dies kann auf geometrischem Wege geschehen.

Ich bringe zunächst die Gleichung (5.) auf die Form

$$(8.) \qquad mc = \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4}$$

und construire dann die beiden Curven, deren Ordinaten

$$(9.) \qquad y = mc, \qquad z = \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4}$$

sind, für jeden positiven reellen Werth der Abscisse m. Ein Durchschnittspunkt beider Curven hat zur Abscisse eine Wurzel der Gleichung (5.). Von den negativen Werthen der Abscisse kann ich dabei absehen, da die positiven und negativen Wurzeln der Gleichung (5.) einander gleich sind.

Die Curve y ist eine gegen die Abscissenaxe geneigt ansteigende gerade Linie. Dagegen besteht die Curve z aus unendlich vielen Zweigen, welche einander parallel im Abstande π von einander verlaufen. Von diesen Zweigen kann ich diejenigen unberücksichtigt lassen, welche auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegen, da diese nicht zum Durchschnitt mit der geraden Linie kommen. Der Verlauf eines solchen Zweiges ist aus den Differentialquotienten von z leicht zu übersehen. Man hat

$$(10.) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dm} = 4\beta \dfrac{m^2(3\alpha^4-m^4)}{(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dm^2} = 8\beta m \dfrac{(m^4+\alpha^4)(m^8-12\alpha^4m^4+3\alpha^8)-96\alpha^4\beta^2m^6}{((m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2)^2}. \end{cases}$$

Die Curve steigt also von 0, π, 2π, ... aus mit wachsendem m anfangs an, erreicht bei $m = \alpha\sqrt[4]{3}$ ein Maximum und nähert sich in der Unendlichkeit asymptotisch der Abscissenaxe. Auf beiden Seiten des Maximums findet ein Wechsel der Krümmung statt; das erste Mal bei einem Werthe von m, welcher zwischen 0 und $\alpha\sqrt[4]{0{,}3}$ liegt; das andere Mal, nachdem m grösser als $\alpha\sqrt[4]{11{,}7}$ geworden ist. Die Curve kehrt der Abscissenaxe anfangs ihre convexe, dann sehr bald ihre concave und endlich wieder ihre convexe Seite zu. Die Werthe ihrer Ordinaten liegen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, π und $\frac{3}{2}\pi$, u. s. f.

Eine Curve von dieser Beschaffenheit kann von einer geraden Linie im Allgemeinen in drei Punkten geschnitten werden. Doch lässt sich leicht beweisen, dass eine vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehende Gerade nur den ersten Curvenzweig, d. h. *den* Zweig dreimal schneiden kann, der ebenfalls durch den Coordinatenanfangspunkt geht; alle folgenden Zweige kann sie nur einmal schneiden.

Denn wenn die Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so liegen zwei der drei Durchschnittspunkte nothwendig auf verschiedenen Seiten der Stelle, an welcher die Curve am stärksten ansteigt, also der Stelle deren Abscisse die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$0 = \frac{d^2 z}{dm^2}$$

oder

$$(11.) \qquad 0 = (m^4+\alpha^4)(m^8-12\alpha^4 m^4+3\alpha^8)-96\alpha^4\beta^2 m^6$$

ist. Wenn nun bewiesen wird, dass eine vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Punkte des stärksten Ansteigens im zweiten Curvenzweige gezogene gerade Linie stärker ansteigt, als die Curve in diesem Punkte, so ist damit ebenfalls bewiesen, dass der zweite und alle folgenden Curvenzweige von einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden geraden Linie nie mehr als einmal getroffen werden können. Dasselbe ist bewiesen, wenn ich zeige, dass eine durch den Punkt des stärksten Ansteigens im ersten Curvenzweige an diesen gelegte Tangente die negative z-Axe in einem Punkte schneidet, welcher näher am Coordinaten-Anfangspunkte liegt, als der Abstand π der Curvenzweige von einander beträgt.

Dies folgt aus dem kleinen Werthe von m, welcher dem Maximum des Ansteigens entspricht. Lege ich an einen Punkt der Curve eine Tangente, so ist deren Gleichung, wenn u und v ihre laufenden Coordinaten sind,

$$(12.) \qquad v+v_0 = 4\beta\frac{m^2(3\alpha^4-m^4)}{(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2}u.$$

Hierin bezeichnet v_0 den Abstand des auf der negativen Seite der Ordinatenaxe liegenden Durchschnittspunkts derselben mit der Tangente, und es hat den Werth

$$(13.) \qquad v_0 = \frac{4\beta m^3(3\alpha^4-m^4)}{(m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2}-\operatorname{Arctg}\frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4}.$$

Berührt nun die Tangente den Punkt des stärksten Ansteigens, so genügt m der Gleichung (11.). Mittelst derselben eliminire ich die Constante β aus dem ersten Gliede der Gleichung (13.). Bringe ich zunächst die Gleichung (11.) auf die Form

$$(11'.) \qquad 0 = (m^4+\alpha^4)(3\alpha^4-m^4)^2-6\alpha^4\left((m^4+\alpha^4)^2+(4\beta m^3)^2\right),$$

so wird Gleichung (13.)

$$v_0 = \frac{24\beta m^3\alpha^4}{(m^4+\alpha^4)(3\alpha^4-m^4)}-\operatorname{Arctg}\frac{4\beta m^3}{m^4+\alpha^4}$$

und nach Gleichung (11.)

$$v_0 = \frac{\alpha^2}{3\alpha^4 - m^4} \sqrt{\frac{6(m^8 - 12\alpha^4 m^4 + 3\alpha^8)}{m^4 + \alpha^4}} - \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m^3}{m^4 + \alpha^4}.$$

Setze ich dann $m^4 = \varkappa\alpha^4$, so liegt nach dem Früheren $\varkappa$ zwischen den Grenzen 0 und 0,3; und es wird

$$v_0 = \frac{1}{3 - \varkappa} \sqrt{\frac{6(3 - 12\varkappa + \varkappa^2)}{1 + \varkappa}} - \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m^3}{m^4 + \alpha^4}.$$

Bei den angegebenen Grenzen für $\varkappa$ nimmt das erste Glied seinen grössten Werth für $\varkappa = 0$ an, und zwar erhält es den Werth $\sqrt{2}$, also einen Werth, der kleiner ist als π. Die Arctangente aber liegt, da vom ersten Curvenzweige die Rede ist, zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Demnach muss

$$v_0 < \sqrt{2} < \pi$$

sein; und damit ist nach dem Obigen die Behauptung bewiesen, dass nur der erste Zweig der Curve z von der Geraden y dreimal und alle anderen nur einmal geschnitten werden können.

Da nun die Abscissen der Durchschnittspunkte der Curven und der Geraden Wurzeln der Gleichung (5.) sind, so ergiebt sich in Bezug auf die reellen positiven Wurzeln dieser Gleichung, dass erstens $m = 0$ der Gleichung genügt, dass zweitens in dem Intervalle $0 < mc < \frac{1}{2}\pi$ entweder zwei oder keine Wurzeln liegen, und endlich, dass in jedem folgenden Intervalle $\pi < mc < \frac{3}{2}\pi$, $2\pi < mc < \frac{5}{2}\pi$ etc. je eine Wurzel der Gleichung liegt, während die zwischenliegenden Intervalle $\frac{1}{2}\pi < mc < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < mc < 2\pi$ etc. deren keine enthalten. Die negativen Wurzeln sind den positiven dem absoluten Werthe nach gleich.

Vergleichen wir dies Resultat mit dem in §. 2 gewonnenen, so zeigt sich, dass die in dem Intervalle $0 < mc < \frac{1}{2}\pi$ liegenden zwei Wurzeln, so wie die in dem entsprechenden negativen Intervalle enthaltenen zwei, welche vier nicht unter allen Umständen auftreten, identisch sind mit den vier Wurzeln, welche nach §. 2 möglicher Weise imaginär werden können.

Hiernach lassen sich leicht die Bedingungen aufstellen, unter denen diese vier Wurzeln reell sind, sowie diejenigen, unter denen sie imaginär werden. Sie sind reell, wenn die Gerade $y = mc$ mit der Abscissenaxe einen kleineren Winkel einschliesst, als die vom Anfangspunkte der Coordinaten an die Curve $z = \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m^3}{m^4 + \alpha^4}$ gezogene Tangente mit derselben Axe bildet;

sie sind dagegen imaginär, wenn der Winkel der Geraden gegen die Axe grösser ist als der der Tangente.

Die Abscisse m_1 des Punktes, an welchem diese Tangente die Curve z berührt, wird durch die Bedingung bestimmt, dass die früher mit v_0 bezeichnete Grösse verschwinde, also durch die Gleichung

$$(14.) \qquad \operatorname{Arctg} \frac{4\beta m_1^3}{m_1^4+\alpha^4} = \frac{4\beta m_1^3(3\alpha^4-m_1^4)}{(m_1^4+\alpha^4)^2+(4\beta m_1^3)^2},$$

welche mit der Bedingung nach m_1 aufzulösen ist, dass die Arctangente zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liege, und dass m_1 positiv und reell sei. Unter dieser Beschränkung hat die Gleichung, wie die Natur der Curve z beweist, ausser den Wurzeln $m_1 = 0$ und $m_1 = \infty$, welche nicht in Frage kommen, nur *eine* positive reelle Wurzel.

Hiernach ist unter Rücksicht auf die erste Gleichung (10.) *die Bedingung für das Auftreten imaginärer Wurzeln der Gleichung* (5.)

$$(15.) \qquad c > \frac{4\beta m_1^2(3\alpha^4-m_1^4)}{(m_1^4+\alpha^4)^2+(4\beta m_1^3)^2},$$

wo m_1 der Gleichung (14.) genügt. *Ist c kleiner als diese Grenze, so verwandeln sich die imaginären Wurzeln in reelle.*

Um eine angenäherte Vorstellung von dem aus Gleichung (14.) und (15.) folgenden Grenzwerthe von c zu gewinnen, führe ich die bei den angestellten Experimenten erfüllte Voraussetzung ein, dass β eine kleine Grösse sei. Durch Entwickelung der Arctangente erhalte ich aus Gleichung (14.)

$$(14^b.) \qquad 3\alpha^4-m_1^4 = (m_1^4+\alpha^4)\{1+\tfrac{2}{3}M+\frac{2.4}{3.5}M^2+\cdots\},$$

wo zur Abkürzung

$$M = \frac{(4\beta m_1^3)^2}{(m_1^4+\alpha^4)^2+(4\beta m_1^3)^2}$$

gesetzt ist. Demnach ist

$$m_1 = \alpha-\delta,$$

wenn δ eine positive Grösse von der Ordnung β^2 bezeichnet. Dadurch wird die Ungleichheit (15.)

$$(15^b.) \qquad c > \frac{2\beta}{\alpha^2}+\varepsilon,$$

wo ε eine positive Grösse von der Ordnung β^3 ist. *Bis auf Grössen von der Ordnung β^3 ist also die Bedingung für das Auftreten der vier imaginären Wurzeln der Gleichung* (5.)

$$(16.) \qquad \alpha^2 c > 2\beta;$$

findet die umgekehrte Relation

$$\alpha^2 c < 2\beta$$

statt, so verwandeln sich auch diese vier Wurzeln in reelle.

In der früheren Abhandlung habe ich die hier benutzte geometrische Methode ebenfalls auf die Curven

$$z_1 = \operatorname{ctg} mc \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{m^4 + \alpha^4}{4\beta m^3},$$

sowie auf einige allgemeinere Functionen angewandt. Ich habe dabei übersehen, dass in der Nähe des Punktes $m = 0$, in welchem die Ordinaten dieser Curven unendlich werden, ein dreifacher Durchschnitt beider Curven stattfinden kann. Es hat indess dieser Fehler keine anderen Folgen, als dass ein nicht weiter benutztes Theorem unrichtig angegeben ist. Nach demselben sollte die Anzahl der reellen Wurzeln m der Gleichung

$$0 = \frac{m^4 + \alpha^4}{4\beta m^3} - \operatorname{ctg} mc$$

plus der der Wurzeln n der Gleichung

$$0 = \sin nc$$

von den Werthen der Parameter α, β, c unabhängig sein. Dieser Satz gilt aber nur, wenn das Wort reellen gestrichen wird. Hiernach sind Seite 250 und 251, sowie Seite 287 Band 59 zu verbessern.

§. 5.

Darstellung der imaginären Wurzeln.

Zur Entwickelung der vier imaginären Wurzeln der Gleichung (5.) bietet sich von selbst der Weg, diese Gleichung in der Form

$$(17.) \qquad 0 = m^4 - 4\beta m^3 \operatorname{ctg} mc + \alpha^4$$

als algebraische Gleichung vierten Grades, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes noch zu entwickeln ist, anzusehen und durch Näherung aufzulösen.

Im Falle eines sehr grossen Werthes von c hat man für $m = a \pm bi$ angenähert $\operatorname{ctg}(a \pm bi)c = \mp i$, so dass man zunächst statt der Gleichung (17.) setzen darf:

$$(18^a.) \qquad 0 = m^4 \pm 4\beta i m^3 + \alpha^4, \qquad m = a \pm bi,$$

falls man bei der Auflösung beachtet, dass b als eine an sich positive reelle Grösse vorausgesetzt ist.

Im anderen extremen Falle eines sehr kleinen c kann man in erster Annäherung statt der Gleichung (17.) setzen:

$$(18^b.) \qquad 0 = m^4 - 4\frac{\beta}{c}m^2 + \alpha^4.$$

Endlich drittens kann man auch von der einfachen Gleichung

$$(18^c.) \qquad 0 = m^4 + \alpha^4$$

ausgehen, welche ebenfalls in der Regel gute Annäherungswerthe liefern wird, da eine Wurzel $m = a + bi$ der Gleichung (17.) die Eigenschaft hat, dass $a^2 + b^2 < \alpha^2$ ist.

Berechnet man mit einem so erhaltenen ersten angenäherten Werthe von m die Function $\operatorname{ctg} mc$ oder auch das ganze Glied $4\beta m^3 \operatorname{ctg} mc$ und setzt das Resultat in die Gleichung (17.) ein, so erhält man durch Auflösen eine zweite Annäherung, u. s. w.

§. 6.

Aehnliche transcendente Gleichungen.

Ich habe die Untersuchung der Eigenschaften einer gewissen Classe von transcendenten Gleichungen an die einfachste specielle Form derselben, wie sie in der Gleichung (5.) enthalten ist, geknüpft, um Weitläufigkeiten und unnütze Rechnungen zu vermeiden. Es ist indess das benutzte Verfahren ebenfalls anwendbar, wenn die transcendente Gleichung eine der allgemeineren Formen der Gleichungen (1.) bis (3.) oder eine ähnliche Gestalt besitzt.

Die zweite Art des Beweises (§. 3) führt nach Division der Gleichung durch $(m^4 + \alpha^4)$ auch in diesen allgemeineren Fällen sofort zu dem Resultate, dass die Gleichung höchstens vier imaginäre Wurzeln besitzen kann.

Auch das erste Verfahren (§. 2) ist selbst auf die allgemeinste Form (Gleichung (1.)) leicht direct anwendbar. Denn es lassen sich auch die Functionen

$$\frac{\cos mc}{\sin mc + m\zeta_2 \cos mc} \quad \text{und} \quad \frac{\cos mc'}{\sin mc' + m\zeta_3 \cos mc'},$$

wenn c, c', ζ_2, ζ_3 reell sind, in eine convergente Reihe von Partialbrüchen entwickeln, was ebenso wie für die speciellere Function der Cotangente bewiesen werden kann. Diese Entwickelung lässt sich dann untersuchen, indem man sie nach dem n^{ten} Gliede abbricht und darauf n beliebig wachsen lässt.

Man kann indess diese neue Entwickelung vermeiden und braucht nur die der Tangente anzuwenden, wenn man die Gleichung (1.) auf die Form

$$(19.) \qquad 0 = m^4 + c^4 - 2m^3 \left\{ \frac{\beta_2}{m\zeta_2 + \operatorname{tg} mc} + \frac{\beta_3}{m\zeta_3 + \operatorname{tg} mc'} \right\}$$

bringt und nun die Tangenten entwickelt. Das weitere Verfahren ist dann ganz dasselbe wie früher, und man gelangt zu demselben Resultate. *Es besitzen auch die allgemeineren Gleichungen* (1.) *bis* (3.) *entweder vier oder keine complex-imaginären Wurzeln, und zwar das eine oder das andere je nach dem Werthe der in ihnen enthaltenen positiven Constanten.*

§. 7.

Folgerungen für die physikalische Aufgabe.

Wir wenden uns nach dieser mathematischen Untersuchung zurück zu der physikalischen Aufgabe, welche auf dieselbe geführt hat, und untersuchen den Ausdruck für die Winkelablenkung des *Coulomb*schen Apparats, für die Winkelgeschwindigkeit desselben sowie eines Theilchens der Flüssigkeit, in welcher derselbe oscillirt (Glgg. (19.) §. 6, S. 253 und Glgg. (16.) §. 8, S. 285, Bd. 59).

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, der Fall nämlich, in welchem die transcendente Gleichung vier complexe Wurzeln besitzt, und derjenige, dass auch diese vier, wie die übrigen, reell sind. Nach der Bedingung (15.) tritt der Fall der Existenz complex-imaginärer Wurzeln ein, wenn die Scheibe des *Coulomb*schen Apparats sich in einer Entfernung von den Wänden des Gefässes befindet, welche grösser ist als eine von den übrigen in Betracht kommenden Constanten des Apparats und der flüssigen Umgebung abhängige Grenze. Denn die Grössen c und c' sind den Entfernungen der Scheibe von den Wänden proportional (Formeln (2.) §. 6, S. 248 und (7.) §. 8, S. 284, Bd. 59.). Werden die Abstände kleiner, so werden alle Wurzeln der Gleichung reell.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass diese Entfernungen sehr gross sind, so erhalten wir ein ähnliches Resultat, wie es früher für den Grenzfall unendlicher Ausdehnung der flüssigen Umgebung gefunden wurde. Wir erhalten in der Entwickelung der gesuchten Functionen zunächst zwei von den complexen m herrührende Glieder. Dieselben zeigen, mit einander vereinigt, das Gesetz regelmässig wiederkehrender und zugleich in geometrischer Progression abnehmender Oscillationen. Ausserdem erscheint aus den reellen

Werthen von m eine unendliche Reihe von Gliedern, welche nichts Periodisches enthalten, sondern nur mit wachsender Zeit in geometrischem Verhältnisse abnehmen. Als Function der Entfernung eines Flüssigkeitstheilchens von der Scheibe bilden dieselben eine trigonometrische Reihe. In dem Grenzfalle unbegrenzter Ausdehnung der flüssigen Umgebung liess sich diese Reihe zu einem bestimmten Integrale zusammenfassen, und von demselben war es nicht schwer zu beweisen, dass es mit wachsender Zeit weit rascher verschwindet, als die periodischen Glieder, so dass es sehr bald gegen dieselben vernachlässigt werden darf. Im vorliegenden allgemeineren Falle verwandelt sich die trigonometrische Reihe nicht mehr in ein *Fourier*sches Integral. Man darf sie aber unter der Voraussetzung sehr grosser c und c' angenähert durch ein solches ersetzen und kann aus diesem den Beweis führen, dass ihre Summe mit wachsender Zeit sehr rasch verschwindet.

Im anderen extremen Falle sehr kleiner Abstände der Scheibe von den Gefässwänden hat die transcendente Gleichung keine complexen Wurzeln. Man erhält daher in der Entwickelung der gesuchten Grössen von Functionen der Zeit lediglich Exponentialfunctionen mit negativen Exponenten. Von diesen verschwinden mit wachsender Zeit am langsamsten diejenigen, welche die kleinsten Exponenten enthalten, und diese sind daher nach einiger Zeit allein zu berücksichtigen. Durch die kleinen Werthe ihrer Exponenten zeichnen sich nun nach §. 3 zwei Glieder besonders aus, und diese rühren von den beiden Werthen von m her, welche gewissermassen die Stelle der complex-imaginären Werthe vertreten. Gegen diese beiden Glieder kann man nach einiger Zeit alle übrigen vernachlässigen, und man erhält desshalb die gesuchten Functionen dargestellt durch zwei Exponentialfunctionen der Zeit.

In den zwischenliegenden Fällen lässt sich keine einfache Annäherung mehr angeben. Man erhält Ausdrücke, welche aus trigonometrischen und Exponentialfunctionen zusammengesetzt sind, so dass ein Gesetz nicht mehr zu übersehen ist. Doch wird man auch wohl nicht in die Lage kommen, diese Fälle, sowie den zuletzt betrachteten sehr kleiner Abstände, der Beobachtung zu unterwerfen; denn nur in den extremsten Umständen bemerkt man eine Abweichung von dem Gesetze periodischer Oscillationen.

Göttingen, im März 1863.

Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova.

(Auctore *H. E. Schröter*, Vratislaviae.)

Problema gravissimum superficiei secundi ordinis per novem puncta data construendae primum ab ill. *Hesse* *) solutum est. Quae solutio ex proprietatibus polaribus superficierum s. o. deducta, nec genuina nec satis expedita videtur, ut auctor ipse adnotat. Quare optandum fuit, ut hujus problematis solutio ratione simpliciore ac magis genuina e definitione quadam geometrica superficiei eliceretur. Vestigia vero ill. *Steiner* persequens ill. *Seydewitz* primus generalem superficiei s. o. definitionem syntheticam in lucem protulit, nec non in commentatione **): „Konstruktion und Klassification der Flächen zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde" problema spatii supra commemoratum ad aliud reduxit plani, quod his verbis enuntiat:

> Um ein gegebenes n-Eck (wo n eine durch die Natur der Aufgabe selbst erst zu bestimmende Zahl bedeutet) ein anderes zu beschreiben, welches mit einem zweiten gegebenen n-Eck in reciproker (oder collinearer) Beziehung stehe.

Ad hoc problema, sola lineae rectae ope solvendum ill. *Seydewitz* l. c. geometros invitat nec utique solutionem indirectam, quam ipse affert, justam habuisse videtur. In hac commentatione quaestionem propositam via directa aggredi conemur et per synthesin quandam, quae sponte sese offert, absolvamus (§. 5). An solutio, quam inveniemus ea simplicitate gaudeat, ut nihil amplius desiderandum linquat, lector peritus dijudicabit.

Priusquam vero rem ipsam aggrediamur, haud ineptum videtur, illam definitionem syntheticam superficiei s. o. in conspectu ponere, quae tanquam fundamentum omnium quaestionum geometricarum circa superficies s. o. considerandarum sit; quae quidem, mutatis mutandis, haec est:

Si per punctum aliquod spatii P axes s et s' duorum fascium planorum (Ebenenbüschel) ducuntur et in altero puncto ℘ centra duorum fascium radiorum

*) Huj. Diar. t. XXIV, pag. 36.

**) *Grunerts* Archiv für Mathematik und Physik Bd. IX, pag. 158 ff.

(Strahlenbüschel) in diversis planis E et E' ponuntur, si deinde inter fasces planorum axis s et radiorum plani E relatio, quae dicitur projectiva vel homographica concipitur eodemque modo inter fasces planorum axis s' et radiorum plani E' ita, ut planum commune, quod s et s' continet, pro utrisque relationibus lineae intersectionis planorum E et E' respondeat — cuique radio a P exeunti, tanquam lineae intersectionis binorum planorum ad fasces (s) et (s') pertinentium, respondebit unum certum planum per punctum Ψ transiens, quod continebit radios illis planis respondentes; locus denique geometricus omnium punctorum intersectionis, in quibus bina membra correlativa congrediuntur, generalem efficit superficiem s. o., quae etiam centra P et Ψ continet.

Forsitan lectori gratum faciamus, si definitionem superficiei s. o. eodem ex fonte derivatam, notione projectiva vel homographica remota, sic enuntiemus:

Si omnia plani cujuslibet puncta cum duobus centris P et Ψ, extra planum positis, rectis conjunxerimus et per Ψ plana normalia in omnibus radiis, inde exeuntibus posuerimus, talem et radiorum a P proficiscentium et planorum per Ψ transeuntium relationem habemus, ut membrorum unicuique unum tantum respondeat; qua positione, ut ita dicam perspectiva, utcunque mutata, locus geometricus omnium punctorum intersectionis, in quibus membra correlativa conveniant, generalis fit superficies s. o., quae etiam centra P et Ψ continet.

Occasione data haud abs re putamus, hoc loco dua theoremata afferre, quae quidem ex fonte tradito fluunt, nec usquam, quod sciam, enuntiata videntur; quorum theorematum primum hoc est:

I. Concipiantur quatuor quilibet radii a, b, c, d proficiscentes a puncto P et quatuor plana A, B, C, D per punctum Ψ transeuntia (nec ternis radiis in eodem plano positis, nec ternis planis in eadem recta se invicem secantibus) radii et plana ejusmodi composita, ut a et A, b et B, c et C, d et D sibi respondeant, puncta efficiunt intersectionis haec:
quatuor:

$$(a, A) \quad (b, B) \quad (c, C) \quad (d, D)$$

et sex:

$$(Ab, ab) \quad (BC, bc) \quad (CA, ca) \quad (AD, ad) \quad (BD, bd) \quad (CD, cd)$$

quae decem puncta intersectionis una cum punctis P et Ψ in eadem superficie s. o. sita sunt.

alterum vero hoc:

II. Concipiantur tres quilibet radii a, b, c exeuntes a puncto P nec in eodem plano siti et tria plana A, B, C punctum Ψ transeuntia nec eandem

rectam continentes, radii et plana ejusmodi composita, ut a et A, b et B, c et C sibi respondeant, puncta efficiunt intersectionis haec;

$$(a, A) \quad (b, B) \quad (c, C),$$
$$(BC, bc) \quad (CA, ca) \quad (AB, ab)$$

quae sex puncta una cum P et $\mathfrak{P}$ talem formant figuram, ut quaeque superficies s. o. per septem eorum ducta etiam per reliquum punctum transeat *).

---

§. 1.

Si omnia puncta plani cujuslibet E ad omnes lineas rectas alterius plani $\mathfrak{E}$ ita referuntur, ut cuique puncto primi plani una certa recta alterius et vice versa respondeat, plana E et $\mathfrak{E}$ affinitate reciproca gaudere appellamus.

Quae affinitas, ut prorsus sit determinata, quatuor paria membrorum ad arbitrium respondentia ponere licet **); aliquod vero quintum membrum, quod dato quinto respondeat, hoc modo construi potest:

Concipiamus quatuor puncta $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ plani E, quorum terna non posita sint in linea recta, et quatuor rectae $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3\ \mathfrak{A}_4$ plani $\mathfrak{E}$, illis punctis respondentes; detur autem quintum punctum a_5 et quaeratur recta $\mathfrak{A}_5$.

Designemus br. c. per characterem

$$s_{ik} = s_{ki} = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k)$$

punctum intersectionis rectarum $\mathfrak{A}_i$ et $\mathfrak{A}_k$ et per

$$O\,(a\ b\ c\ d\ \ldots.)$$

fascem radiorum Oa, Ob, Oc, Od, ... vel etiam rationem anharmonicam, quam ipsi radii constituunt.

Quodsi in recta $\mathfrak{A}_1$ quartum punctum s_{15} ita eligimus, ut sit

$$(s_{12}\ s_{13}\ s_{14}\ s_{15}) = a_1\,(a_2\ a_3\ a_4\ a_5),$$

quo significetur, seriem punctorum $s_{12}\ s_{13}\ s_{14}\ s_{15}$ homographicam esse cum radiis $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_1 a_4$, $a_1 a_5$; si deinde in recta $\mathfrak{A}_2$ quartum punctum s_{25} ita definimus, ut sit

$$(s_{21}\ s_{23}\ s_{24}\ s_{25}) = a_2\,(a_1\ a_3\ a_4\ a_5),$$

recta conjugens puncta s_{15} et s_{25}

$$(s_{15}, s_{25}) = \mathfrak{A}_5$$

---

*) Conf. ***Hesse:*** de curvis et superficiebus secundi ordinis, huj. Diar. t. XX. p. 297.

) ***Moebius,* der barycentrische Kalkul. p. 433 ff.

erit quaesita; quomodo vero, datis tribus punctis, quartum istud punctum, quod datam rationem anharmonicam efficiat, construatur, satis notum est *).

§. 2.

Quum quatuor paria membrorum $\begin{Bmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4 \end{Bmatrix}$ sibi respondentium totam affinitatem reciprocam determinent, patet, si rectam $\mathfrak{A}_4$ circum punctum quoddam fixum α_4 circumagimus, aliis membris immotis manentibus, affinitatem ipsam jam jamque mutari; quomodo autem recta $\mathfrak{A}_5$ dato puncto a_5 respondens ea de re moveatur, quaeramus.

Ducamus **) ergo quatuor rectas $s_{34}(s_{12}\,s_{13}\,s_{14}\,s_{15})$, quas secundum § 1. datam rationem anharmonicam $a_1(a_2\,a_3\,a_4\,a_5)$ amplecti oportet; quarum rectarum una quidem $(s_{34}\,s_{13}) = \mathfrak{A}_3$ immota manet, duae alterae autem per puncta fixa s_{12} et α_4 transire coactae sunt; unde apparet, etiam quartam rectam $(s_{34}\,s_{15})$ per punctum fixum, quod $p_{34,15}$ appellemus, nec minus rectam $(s_{34}\,s_{25})$ per alterum punctum fixum $p_{34,25}$ esse transituram. Puncta ipsa $p_{34,15}$ et $p_{34,25}$ in recta conjungente s_{12} et α_4 sita esse, facile eruas. Quae quum ita sint, puncta s_{15} et s_{25} in rectis $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$, nec minus punctum s_{34} in recta $\mathfrak{A}_3$ series homographicas percurrere videmus; quoniam in puncto intersectionis s_{12} rectarum $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ puncta correlativa serierum, quas s_{15} et s_{25} describunt, incidant, rectam conjungentem $(s_{15}\,s_{25})$ per punctum fixum p_5 transire manifestum est; unde concludimus:

Datis in plano E quinque punctis $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ in plano $\mathfrak{E}$ autem tribus rectis $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3$ atque puncto α_4, circum quod recta $\mathfrak{A}_4$ circumagitur, affinitas reciproca quatuor paribus membrorum $\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 \end{Bmatrix}$ determinata paullatim variat; recta vero $\mathfrak{A}_5$, quae pro quaque ipsius $\mathfrak{A}_4$ positione puncto a_5 respondet, per punctum quoddam fixum p_5 transibit et fascem describet homographicam cum fasce ab $\mathfrak{A}_4$ descripto.

Jam vero punctum p_5 construamus hunc in modum:

Definiamus quartum radium $s_{23}\,x$ ita, ut habeamus

$$s_{23}(s_{12}\,s_{13}\,\alpha_4\,x) \;=\; a_1(a_2\,a_3\,a_4\,a_5)$$

---

*) *Steiner:* Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander pag. 93.

**) Lector indulgens rogatur, ut figuram, et hanc, et inferiores, si necessarias putet, ipse describat.

et radium $s_{13}y$ ita, ut sit

$$s_{13}(s_{21}s_{23}\alpha_4 y) = a_2(a_1a_3a_4a_5),$$

punctum intersectionis

$$(s_{23}x, s_{13}y) = p_5$$

erit quaesitum.

Si conditionem adjicimus, ut recta $\mathfrak{A}_5$ per punctum quoddam datum α_5 transeat, hanc rectam unam tantum positionem accipere posse videmus, eam, dico, lineae conjungentis $\alpha_5\ p_5$; hinc fluit theorema:

Datis in plano E quinque punctis $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ *et in plano* $\mathfrak{E}$ *tribus rectis* $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3$ *atque duobus punctis* $\alpha_4\ \alpha_5$, *statuere licet, id, quod uno tantum modo effici potest, ut haec plana affinitatem reciprocam habeant ita, ut membra* a_1 *et* $\mathfrak{A}_1$, a_2 *et* $\mathfrak{A}_2$, a_3 *et* $\mathfrak{A}_3$ *sibi respondeant, eae autem rectae, quae punctis* $a_4\ a_5$ *responsurae sint, per puncta* $\alpha_4\ \alpha_5$ *transeant.*

Propter ea, quae infra dicenda erunt, necesse videtur, ut constructionem ipsam exhibeamus, cujus ope, affinitate datis $\left\{\begin{matrix} a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3\ \alpha_4\ \alpha_5 \end{matrix}\right\}$ plane determinata, rectam inveniamus, quae dato sexto puncto a_6 respondeat.

Quae constructio, significatione nostra in usum vocata, sic explicari potest:

Construamus quatuor rectas $s_{23}x$, $s_{23}x'$, $s_{13}y$, $s_{13}y'$ ita, ut habeamus

$$s_{23}(s_{12}s_{13}\alpha_4 x x') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6),$$
$$s_{13}(s_{21}s_{23}\alpha_4 y y') = a_2(a_1a_3a_4a_5a_6)$$

et definiamus puncta intersectionis

$$(s_{23}x, s_{13}y) = p_5; \quad (s_{23}x', s_{13}y') = p_6; \quad (s_{23}x', s_{13}y) = p_{25,16},$$
$$(\alpha_5 p_5) = \mathfrak{A}_5; \quad (\mathfrak{A}_5\ \mathfrak{A}_2) = s_{25}; \quad ((p_{25,16}\ s_{25}), \mathfrak{A}_1) = s_{16}; \quad (s_{16}p_6) = \mathfrak{A}_6,$$

quae recta erit quaesita; demonstrationem, facile eruendam, praetermittamus. Nihil vero obstat, quin hoc modo construamus:

$$(s_{23}x, s_{13}y') = p_{15,26},$$
$$((\alpha_5 p_5), \mathfrak{A}_1) = s_{15}; \quad ((p_{15,26}s_{15}), \mathfrak{A}_2) = s_{26},$$
$$(s_{26}p_6) = \mathfrak{A}_6,$$

nam puncta $s_{16}\ s_{26}\ p_6$ in eadem recta sita esse, etiam a posteriori nullo fere negotio demonstrari potest.

§. 3.

Nunc vero figuram modo descriptam iterum moveri jubemus, rectam $\mathfrak{A}_3$ circum punctum quoddam fixum α_3 circumagentes; quaerendum ergo erit,

quomodo recta $\mathfrak{A}_6$ ea de re moveatur. Si constructionem paragraphi superioris ante oculos habemus, quatuor rectas $s_{23}x$, $s_{23}x'$, $s_{13}y$, $s_{13}y'$ per puncta fixa lineae conjungentis $\alpha_3\alpha_4$ transituras esse facile cognoscimus; nec fugit, fasces radiorum ab illis rectis descriptos homographicos esse cum fasce ab $\mathfrak{A}_3$ descripto atque positione perspectiva gaudere, quia omnia fascium centra in eadem recta, radios correlativos continente, posita sunt. Unde elucet, puncta $p_5\,p_6\,p_{25,16}$ in tribus lineis rectis moveri, quae per punctum s_{12} transeunt. Itaque series punctorum, ab p_5 p_6 $p_{25,16}$ et s_{25} descriptae eadem relatione homographica et positione perspectiva gaudent; ita, ut rectam conjungentem $(p_{25,16}\,s_{25})$ per punctum fixum transire concludamus; denique vero punctum s_{16} pari modo seriem homographicam describet et recta conjungens $(s_{16}\,p_6) = \mathfrak{A}_6$ per punctum fixum p_6 transibit; ne hoc novum punctum p_6 confundatur cum superiore, motu ipso mutato, vix moneri necesse est. Jam investigemus, quemadmodum novum punctum fixum p_6 construamus; eum in finem duos casus speciales inquiramus positionis $\mathfrak{A}_3$, qui constructionem ipsius $\mathfrak{A}_6$ quam facillimam praebeant; etenim si in recta $\mathfrak{A}_2$ punctum r_2 ita eligimus, ut sit

$$r_2(s_{12}\alpha_3\alpha_4\alpha_5) = a_1(a_2a_3a_4a_5)\ ^*)$$

eodemque modo in recta $\mathfrak{A}_1$ punctum r_1 ita, ut sit

$$r_1(s_{21}\alpha_3\alpha_4\alpha_5) = a_2(a_1a_3a_4a_5)$$

deinde, si duas rectas r_2x, r_1y construimus ita, ut habeamus

$$r_2(s_{12}\alpha_3\alpha_4x) = a_1(a_2a_3a_4a_6),$$
$$r_1(s_{21}\alpha_3\alpha_4y) = a_2(a_1a_3a_4a_6),$$

facile intelligimus, has duas rectas tanquam casus speciales ipsius $\mathfrak{A}_6$ interpretandas esse; unde punctum intersectionis

$$(r_2x, r_1y) = p_6$$

erit punctum quaesitum.

Hinc, si conditionem adjiciamus, ut recta $\mathfrak{A}_6$ per punctum quoddam datum α_6 transeat, hanc rectam unam tantum positionem accipere posse manifestum est, quae fit linea conjungens $(\alpha_6\,p_6)$; unde colligimus theorema:

---

*) id, quod facile eruas hoc modo: recta conjungens $\alpha_3\alpha_4$ secet $\mathfrak{A}_2$ in puncto σ_2; determinemus in recta $\alpha_3\alpha_4$ quartum punctum σ_5 ita, ut habeamus

$$(\sigma_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\sigma_5) = a_1\,(a_2\,a_3\,a_4\,a_5)$$

et conjungamus $\alpha_5\sigma_5$, quae cum recta $\mathfrak{A}_2$ in puncto r_2 conveniat; punctum r_2 erit quaesitum.

Datis in plano E sex punctis $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ ***et in plano*** $\mathfrak{E}$ ***duobus rectis*** $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2$ ***atque quatuor punctis*** $\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$, ***statuere licet, ut haec plana affinitatem habeant reciprocam, ita, ut*** a_1 ***et*** $\mathfrak{A}_1$, a_2 ***et*** $\mathfrak{A}_2$ ***sibi respondeant, eae autem rectae, quae punctis*** $a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ ***responsurae sint, per puncta*** $\alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$ ***transeant; quibus postulatis tota affinitas prorsus est determinata et uno tantum modo effici potest.***

Restat, ut explicemus, quomodo affinitate reciproca datis $\begin{Bmatrix} a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$ plane determinata, rectam construamus, quae dato septimo puncto a_7 respondeat; quod paucis verbis exponamus:

Punctis $r_1\ r_2$ in rectis $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2$ modo jam supra dicto determinatis, quatuor radios quaeramus $r_2 x$, $r_2 x'$, $r_1 y$, $r_1 y'$ ita, ut habeamus

$$r_2(s_{12}\alpha_3\alpha_4\alpha_5 x x') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6a_7),$$
$$r_1(s_{21}\alpha_3\alpha_4\alpha_5 y y') = a_2(a_1a_3a_4a_5a_6a_7)$$

et definiamus puncta intersectionis

$$(r_2x, r_1y) = p_6; \quad (r_2x', r_1y') = p_7; \quad (r_2x', r_1y) = p_{26,17},$$
$$(\alpha_6 p_6) = \mathfrak{A}_6; \quad (\mathfrak{A}_6\mathfrak{A}_2) = s_{26}; \quad ((p_{26,17}s_{26}), \mathfrak{A}_1) = s_{17}; \quad (s_{17}p_7) = \mathfrak{A}_7,$$

quae recta erit quaesita; demonstrationem sicut antea nullo fere negotio eruendam praetermittamus. Facile comprobatu est, eandem rectam nos inventuros fuisse, si constructionem hanc fecissemus:

$$(r_2x, r_1y') = p_{16,27},$$
$$(\mathfrak{A}_6\mathfrak{A}_1) = s_{16}; \quad ((p_{16,27}s_{16}), \mathfrak{A}_2) = s_{27}; \quad (s_{27}p_7) = \mathfrak{A}_7,$$

quia puncta $s_{17}\ s_{27}\ p_7$ in eadem recta sita sunt.

§. 4.

Denuo figuram datis $\begin{Bmatrix} a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$ formatam moveri faciamus, rectam $\mathfrak{A}_2$ circum punctum quoddam fixum α_2 circumagentes; quaerendum igitur erit, quomodo $\mathfrak{A}_7$ ea de re moveatur.

Ac primum quidem, si constructionem in extrema paragrapho superiore datam intueamur, punctum r_2 movens sectionem conicam describere videmus, quod ita movetur, ut ratio anharmonica $r_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$ valorem habeat constantem $= a_1(a_2a_3a_4a_5)$. Etenim principia *Steiner*iana suppeditant theorema, satis notum:

Datis quatuor punctis $A\ B\ C\ D$ ***in plano, punctum variabile*** P ***ita motum, ut radii*** PA, PB, PC, PD ***datam amplectantur rationem anharmonicam constantem, describet sectionem conicam, quae per puncta*** $ABCD$ ***transit.***

Quod theorema in aliud converti potest, cujus postea nobis usus erit:

Si centrum P fascis quatuor radiorum PA, PB, PC, PD in circuitu sectionis conicae ita moremus, ut tribus radiis PA, PB, PC per tria puncta data sectionis conicae A, B, C transeuntibus ratio anharmonica constans maneat, etiam quartus radius PD per punctum fixum D transibit, quod ipsud in sectione conica situm est.

Quodsi ad constructionem paragraphi superioris revertimur, theorematis modo allati ope intelligimus, punctum r_2 sectionem conicam, quam per K_2 designemus, describere atque rectas $r_2 x$, $r_2 x'$ per puncta fixa sectionis conicae K_2 transire: quae puncta x_0 et x_0' appellemus. Alterum autem punctum r_1 motu ipsius $\mathfrak{A}_2$ non mutatur; eodemque modo rectae $r_1 y$, $r_1 y'$ nequaquam moventur. Inde sequitur, puncta $p_6 p_7 p_{26,17}$ series describere homographicas in rectis $r_1 y$, $r_1 y'$, quum $\mathfrak{A}_2$ circum punctum α_2 circumagamus.

Nunc vero necesse videtur, ut lemma quoddam antemittamus, cujus in posterum usus erit frequentissimus; quod quum nesciam, an alicubi enuntiatum sit, hoc loco afferre liceat:

Lemma.

Dentur in plano sectio conica et linea recta, qualibet positione gaudentes et concipiantur in sectione conica tria puncta fixa ABC atque punctum variabile P; radii PA, PB, PC ducti rectae datae in tribus punctis α β γ occurrant; deinde si quod punctum a, uspiam in plano positum, cum α conjungamus et punctum intersectionis $(a\alpha, B\beta)$ per literam c designemus, recta variabilis $c\gamma$ per punctum quoddam fixum transire coacta est, quod in sectione conica a puncto c descripta situm est.

Cujus propositionis demonstrandi negotio supersedemus, quoniam ex theoremate *Pascalis* ratione haud difficili derivari potest.

Atque observamus, in sectione conica K_2 tria puncta fixa $\alpha_2 x_0 x_0'$ cum puncto variabili r_2 rectis conjungi, quae in tribus punctis rectae $r_1 y$ occurrant; deinde animadvertimus, puncto intersectionis p_6 vel $(r_2 x_0, r_1 y)$ cum α_6 conjuncto, rectas $(r_2 \alpha_2) = \mathfrak{A}_2$ et $(\alpha_6 p_6) = \mathfrak{A}_6$ in puncto s_{26} convenire; unde lemmatis beneficio concludimus, rectam $(s_{26} p_{26,17})$ per punctum fixum transituram et puncta s_{17}, p_7 series homographicas in rectis $\mathfrak{A}_1$, $r_1 y'$ describere; facile autem intelligimus, has series perspectiva gaudere positione, quoniam in punctum intersectionis r_1 puncta correlativa duarum serierum incidant; hinc denique colligimus, rectam $\mathfrak{A}_7$ per novum punctum quoddam fixum p_7 transituram esse atque radiorum fascem conflare homographicam cum eo, quod recta $\mathfrak{A}_2$ movens describit.

Quod novum punctum p_7 ut inveniamus, duas positiones speciales rectae $\mathfrak{A}_7$ investigemus; ac prima quidem facile sese praebet. dummodo illud punctum indagemus, quo recta conjungens $\alpha_6 x_0$ sectioni conicae K_2 iterum occurrat; quod punctum designemus O_2 ita, ut sit

$$O_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6) = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6).$$

Qua conditione punctum O_2 sine ulla ambiguitate definitur neque ignotum videtur, hujus puncti construendi problema, quod etiam ill. *Chasles* ad curvam tertii ordinis per puncta data construendam in usum vocavit *). Si vero punctum O_2 invenimus, secundum constructionem sub finem paragraphi superioris allatam facile intelligimus, rectam $\mathfrak{A}_7$, si r_2 in O_2 incidat, eam positionem accepturam esse, quam O_2x_0' conditione posita

$$O_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6x_0') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$$

habet; itaque in recta O_2x_0' punctum p_7 situm esse patet.

Alteram vero positionem specialem ipsius $\mathfrak{A}_7$ haud facile inveniri posse videtur, si constructionem eadem simplicitate gaudentem poscimus; quod mirari non possumus, quia symmetria problematis ipsius natura sublata est. Dubito, quin eo, quo contendimus, commodius perveniamus, quam si punctum r_2 in unum punctorum $\alpha_3\alpha_4\alpha_5$, ex gr. in α_3 incidere jubeamus; quare efficitur constructio haec:

$$\alpha_3(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5x_0x_0') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6a_7)\ **),$$
$$r_1(s_{12}\alpha_3\alpha_4\alpha_5yy') = a_2(a_1a_3a_4a_5a_6a_7),$$
$$(\alpha_3x_0, r_1y) = \pi_6; \quad (\alpha_3x_0', r_1y') = \pi_7; \quad (\alpha_3x_0', r_1y) = \pi_{26,17},$$
$$(\alpha_6\pi_6, \alpha_3\alpha_2) = \sigma_{26}; \quad ((\sigma_{26}\pi_{26,17}), \mathfrak{A}_1) = \sigma_{17}; \quad (\sigma_{17}\pi_7, O_2x_0') = p_7,$$

quod erit punctum quaesitum.

---

*) Hoc loco problematis solutionem expeditam afferre juvat, quae theoremate *Pascalis* nititur:

Problema. Datis in plano quinque punctis $a\ b\ c\ d\ e$ atque radiorum fasce $P(ABCDE)$, quaeritur punctum O, quod efficiat $O(abcde) = P(ABCDE)$.

Solutio. Rectae ab et cd in γ concurrant; construatur $d\delta$ et $d\varepsilon$ ita, ut sit

$$d(abc\delta\varepsilon) = P(ABCDE);$$

punctis δ et ε in recta ab significatis, puncta definiamus intersectionis:

$$(bc, d\varepsilon) = p \qquad (bc, re) = s$$
$$(cd, p\delta) = q \qquad (cd, s\varepsilon) = t$$
$$(d\varepsilon, qa) = r \qquad (re, ta) = O$$

punctum O erit quaesitum.

**) Recta $\alpha_3\alpha_3$ erit linea tangens sectionem conicam K_2 puncto α_3; ceterum necessarium non est, ut rectam ipsam describamus, quum jam tres radii noti ad reliquos definiendos sufficiant.

Si vero conditionem adjicimus, ut recta $\mathfrak{A}_7$ per punctum quoddam datum transeat, hanc rectam unam tantum positionem accipere posse elucet, eam, dico, lineae conjungentis $\alpha_7 p_7$; unde concludimus theorema;

Datis in plano E septem punctis $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$ *et in plano* $\mathfrak{E}$ *una recta* $\mathfrak{A}_1$ *atque sex punctis quibuslibet* $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$, *statuere licet, ut haec plana affinitate gaudeant reciproca ita, ut puncto* a_1 *recta* $\mathfrak{A}_1$ *respondeat, eae autem rectae, quae punctis* $a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7$ *responsurae sint, per puncta* $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$ *ex ordine transeant; quibus positis, tota affinitas prorsus est determinata et uno tantum modo effici potest.*

Restat igitur, ut explicemus, quomodo affinitate reciproca datis $\begin{Bmatrix} a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 \\ \mathfrak{A}_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7 \end{Bmatrix}$ plane determinata, rectam construamus, quae octavo puncto dato a_8 respondeat; id, quod significatione nostra adhibita, sic repraesentari potest:

Puncto O_2 et rectis $O_2 x_0'$, $O_2 x_0''$ conditione

$$O_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 x_0' x_0'') = a_1(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8)$$

definitis, construamus punctum r_1 in recta $\mathfrak{A}_1$ et radios ab r_1 et α_3 proficiscentes ita, ut habeamus

$$\alpha_3(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 x_0 x_0' x_0'') = a_1(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8),$$
$$r_1(s_{21}\alpha_3\alpha_4\alpha_5\, y\, y'\, y'') = a_2(a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8),$$

deinde designamus puncta intersectionis

$$(\alpha_3 x_0, r_1 y) = \pi\ ; \quad (\alpha_3 x', r_1 y') = \pi_7; \quad (\alpha_3 x'', r_1 y'') = \pi_8,$$
$$(\alpha_3 x_0, r_1 y') = \pi_{16,27}; \quad (\alpha_3 x_0'', r_1 y') = \pi_{27,18},$$
$$(\alpha_6 \pi_6, \mathfrak{A}_1) = \sigma_{16}; \quad (\sigma_{16}\pi_{16,27}, \alpha_3\alpha_2) = \sigma_{27}; \quad (\sigma_{27}\pi_{27,18}, \mathfrak{A}_1) = \sigma_{18},$$
$$(\sigma_{27}\pi_7, O_2 x_0') = p_7; \quad (\sigma_{27}\pi_{27,18}, O_2 x_0'') = p_{27,18}; \quad (\sigma_{18}\pi_8, O_2 x_0'') = p_8,$$

denique vero punctum s_{27} quaerimus *Pascalis* theorematis ope; etenim s_{27} id erit punctum, quo recta $\alpha_7 p_7$ sectioni conicae, quinque punctis $\alpha_2\ \sigma_{27}\ p_{27,18}\ O_2\ p_7$ determinatae iterum occurrit et sic reperitur:

Designemus

$$(\alpha_3\alpha_2, O_2 x') = q; \quad (\sigma_{27}\sigma_{18}, \alpha_7 p_7) = r; \quad (qr, O_2 x_0'') = t,$$
$$(\alpha_2 t, \alpha_7 p_7) = s_{27},$$

unde sequitur

$$((s_{27} p_{27,18}), \mathfrak{A}_1) = s_{18}; \quad (s_{18} p_8 = \mathfrak{A}_8),$$

quae recta erit quaesita.

§. 5.

Extremum est, ut reliquam rectam $\mathfrak{A}_1$ circum punctum fixum α_1 circumagentes investigemus, quomodo recta $\mathfrak{A}_8$ ea de re moveatur; quod etiamsi paullo impeditius fit, tamen difficultatem non praebet, quum constructionem ipsius $\mathfrak{A}_8$ modo allatam ante oculos habeamus.

Ac primum quidem punctum O_2 et radii O_2x_0', O_2x_0'', α_3x_0, α_3x_0', α_3x_0'' motu ipso non mutantur; punctum r_1 autem sectionem conicam K_1 describet, quae per puncta α_1 α_3 α_4 α_5 transibit et rationem anharmonicam $a_2(a_1a_3a_4a_5)$ amplectitur.

Radii r_1y, r_1y', r_1y'' per puncta fixa y_0 y_0' y_0'' sectionis conicae K_1 transibunt atque fasces homographicos describent. Quae omnia ex iis sequuntur, quae paragraphi superioris initio exposuimus. Inde apparet, puncta π_6 π_7 π_8 $\pi_{16,27}$ $\pi_{27,18}$ series describere homographicas in rectis α_3x_0, α_3x_0', α_3x_0'' et binarum serierum puncta correlativa in puncto α_3 esse conjuncta.

Deinde autem, quum $r_1\alpha_1$, r_1y, r_1y' per puncta fixa α_1 y_0 y_0' sectionis conicae K_1 transeant et rectae α_3x_0 in tribus punctis occurrant, quorum secundum π_6 cum α_6 conjunctum efficiat rectam, secantem α_1r_1 puncto σ_{16}, lemmatis (§. 4) ope cognoscimus, rectam $\sigma_{16}\pi_{16,27}$ per punctum fixum transituram esse et σ_{27} in recta $\alpha_3\alpha_2$ seriem cum superioribus homographicam describere; nec fugit, series a punctis σ_{27} et π_7 descriptas perspectiva gaudere positione, quoniam in α_3 puncta correlativa collabuntur; unde sequitur rectam conjungentem $\sigma_{27}\pi_7$ nec minus rectam $\sigma_{27}\pi_{27,18}$ per puncta fixa transituras esse; ergo punctum p_7 eodemque modo $p_{27,18}$ in rectis O_2x_0' et O_2x_0'' series homographicas percurrunt.

Si nunc animadvertimus, rectas $r_1\alpha_1$, r_1y', r_1y'' rectae α_3x_0'' in tribus punctis occurrere, quorum secundum $\pi_{27,18}$ cum σ_{27} conjunctum efficiat rectam, secantem $\mathfrak{A}_1$ puncto σ_{18}, lemmatis nostri beneficio concludimus, rectam conjungentem $\sigma_{18}\pi_8$ per punctum quoddam fixum transituram esse et punctum p_8 in recta O_2x_0'' seriem describere cum superioribus homographicam.

Denique vero punctum q immutatum manere, punctum r autem sectionem conicam describere videmus, quam designemus per R; qua in sectione conica punctum q situm esse facile intelligimus, quod puncta σ_{27} et p_7 series homographicas in rectis $\alpha_3\alpha_2$ et O_2x_0' percurrentia positione perspectiva gaudent; quare in puncto intersectionis q puncta correlativa inveniuntur et sectio conica R per q transire coacta est; recta igitur conjungens rq describet fascem homographicam et t seriem in recta O_2x_0''; unde s_{27} sectionem conicam describet et recta $s_{27}p_{27,18}$ per punctum fixum transibit; etenim quum tres radii

$r\sigma_{27}$, $r\alpha_7$, rq per tria puncta fixa sectionis conicae R transeant et rectae $O_2 x_0''$ in tribus punctis occurrant, quorum tertium t cum α_2 conjunctum efficiat rectam secantem radium $r\alpha_7$ in s_{27}, deinde quum punctum intersectionis rectarum $r\sigma_{27}$ vel $\sigma_{27}\sigma_{18}$ vel $\sigma_{27}\pi_{27,18}$ et $O_2 x_0''$ nullum aliud, nisi $p_{27,18}$ inveniatur, lemmatis nostri beneficio concludimus rectam $(s_{27}, p_{27,18})$ per punctum quoddam fixum transituram esse; unde punctum s_{18} sectionem conicam describere videmus; si vero in mentem revocemus, punctum σ_{18} sectionem conicam describere, cujus per tria puncta fixa rectae $(\sigma_{18}\sigma_{27})$ $(\sigma_{18}\pi_8)$ $(\sigma_{18}\alpha_1)$ percurrant, deinde autem has rectas rectae $O_2 x_0''$ in tribus punctis occurrere, quorum primum et secundum $p_{27,18}$ et p_8 inveniantur, denique rectam $(s_{27}\, p_{27,18})$ per punctum quoddam fixum transire et rectae $(\sigma_{18}\alpha_1) = \mathfrak{A}_1$ in puncto s_{18} occurrere, lemmatis nostri ope colligimus, rectam $(s_{18}p_8) = \mathfrak{A}_8$ per novum punctum quoddam fixum transituram esse et fascem describere homographicam cum illo, ab recta $\mathfrak{A}_1$ motu conflato; *et in universum enuntiare possumus, motu ipsius* $\mathfrak{A}_1$ *totam figuram ita moveri, ut omnes rectae* $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$ *. . . fasces homographicos describant, binarum autem rectarum puncta intersectionis* s_{ik} *sectiones conicas percurrant et rectae conjungentes bina puncta* $(s_{ik}, s_{i'k'})$ *indicibus* i *et* i' k *et* k' *inter se diversis, per puncta quaedam fixa transeant.*

Priusquam novi puncti fixi p_8 constructionem exponamus, conditionem adjiciamus, ut recta $\mathfrak{A}_8$ per datum punctum α_8 transeat; quod si fecimus, rectam $\mathfrak{A}_8$ unam tantum positionem accipere posse videmus, quae est linea conjungens $\alpha_8 p_8$; unde concludimus theorema:

Datis in plano E *octo punctis* a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 *et in plano* $\mathfrak{E}$ *octo punctis* α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 α_6 α_7 α_8, *statuere licet, ut haec plana affinitate gaudeant reciproca, ita ut rectae, quae punctis* a_1 a_2 . . . a_8 *responsurae sint, per puncta* α_1 α_2 . . . α_8 *ex ordine transeant; quibus positis tota affinitas prorsus est determinata et uno tantum modo effici potest.*

Quo theoremate quaestio illa absolvitur, quam in introductione ab ill. *Seydewitz* propositam commemoravimus; numerum quidem $n = 8$ invenimus nec quidquam restat, nisi ut re ipsa doceamus, quomodo istud 8-laterum construatur, quod 8-angulo $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_8$ circumscriptum et cum dato 8-angulo $a_1a_2a_3 \ldots a_8$ affinitate reciproca conjunctum sit; id, quod ex iis, quae supra exposuimus, facile eruitur.

Necesse videtur, ut duas positiones speciales rectae $\mathfrak{A}_8$ inquiramus, quarum punctum intersectionis erit quaesitum p_8. Jam primum vero constructio sub finem paragraphi superioris allata simplicissima fit, si punctum variabile r_1

in id punctum O_1 incidere faciamus, quo $\alpha_6 y_0$ sectioni conicae K_1 iterum occurrit.

Punctum O_1 igitur, sicut supra O_2, conditione definitur

$$O_1(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6) = a_2(a_1a_3a_4a_5a_6).$$

Quare constructio haec fit:

Definitis punctis O_2, O_1 quaerimus quatuor radios O_2x_0', O_2x_0'', O_1y_0', O_1y_0'' conditionibus:

$$O_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6x_0'x_0'') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8),$$
$$O_1(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6y_0'y_0'') = a_2(a_1a_3a_4a_5a_6a_7a_8)$$

et notamus puncta intersectionis:

$$(O_2x_0', O_1y_0') = \pi_7, \quad (O_2x_0'', O_1y_0') = \pi_{27,18}, \quad (O_2x_0'', O_1y_0'') = \pi_8,$$
$$(O_2\alpha_2, \alpha_7\pi_7) = \sigma_{27}, \quad (\sigma_{27}\pi_{27,18}, O_1\alpha_1) = \sigma_{18},$$
$$(\sigma_{18}\pi_8) = A_8,$$

qua in recta punctum quaesitum p_8 positum esse oportet.

Atqui observamus, quo alteram positionem inveniamus, nihil aliud opus esse, nisi ut indices 6 et 7 inter se permutemus; quod suppeditat constructionem hanc:

Definiamus puncta Q_2, Q_1 et quatuor radios Q_2x', Q_2x'', Q_1y', Q_1y'' conditionibus:

$$Q_2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_7x'x'') = a_1(a_2a_3a_4a_5a_7a_6a_8),$$
$$Q_1(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_7y'y'') = a_2(a_1a_3a_4a_5a_7a_6a_8)$$

et notemus puncta intersectionis:

$$(Q_2x', Q_1y') = \pi_6, \quad (Q_2x'', Q_1y') = \pi_{26,18}, \quad (Q_2x'', Q_1y'') = \pi_8',$$
$$(Q_2\alpha_2, \alpha_6\pi_6) = \sigma_{26}, \quad (\sigma_{26}\pi_{26,18}, Q_1\alpha_1) = \sigma_{18}',$$
$$(\sigma_{18}'\pi_8') = A_8'$$

punctum autem intersectionis

$$(A_8A_8') = p_8$$

erit quaesitum et recta conjungens

$$(\alpha_8p_8) = \mathfrak{A}_8$$

unum latus erit 8-lateri quaesiti; nihil obstat, quominus alia latera $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_7$ eodem modo construamus.

Cujus constructionis demonstrandi negotio, cum in promptu sit, supersedemus; nec fieri posse negamus, ut ex principiis traditis vel nostra pro-

blematis solutio simplicior reddatur, vel alia quaedam magis expedita derivetur. Cum vero jam nimis diu huic quaestioni immorari videamur, hanc investigationem ad aliam occasionem relegamus.

§. 6.

Si omnia puncta a_x plani E cum centro quodam P, extra planum posito, rectis, et omnes rectas $\mathfrak{A}_x$ alterius plani $\mathfrak{E}$ cum altero centro $\mathfrak{P}$, extra planum $\mathfrak{E}$ posito, planis conjungimus, duas nanciscimur compages duplicis infinitatis: et radiorum per P et planorum per $\mathfrak{P}$ transeuntium; si vero a_x et $\mathfrak{A}_x$ affinitate, quam supra tractavimus, reciproca gaudent, idem valet pro his compagibus et puncta intersectionis membrorum respondentium (radii cujuslibet et plani correlativi) generalem formant superficiem secundi ordinis, quae etiam per centra P et $\mathfrak{P}$ transit. Si igitur conditionem statuamus, ut superficies per data puncta $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots$ transeat, necesse est, ut centra P et $\mathfrak{P}$ cum punctis $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots$ rectis conjungamus et per rectam $\mathfrak{P}p_x$ planum radio Pp_x respondens ita ducamus, ut compages (P) et $(\mathfrak{P})$ affinitate reciproca gaudeant; id, quod ad nostrum problema, in paragrapho superiore solutum, facile revocatur, si compages (P) et $(\mathfrak{P})$ duobus planis E et $\mathfrak{E}$ transversalibus secemus et affinitatem quaerendam ad haec plana transferamus. Quum vero nostra problematis solutio octo puncta $p_1\ p_2\ \ldots\ p_8$ pro arbitrio eligi admittat, mirum videmus prodire paradoxon, superficiem secundi ordinis decem punctis esse determinatam. Attamen inter omnes constat, jam novem puncta ad superficiem construendam sufficere. Cujus paradoxi enodationem in hac paragrapho conemur.

Data aliqua superficie secundi ordinis, pro arbitrio eligimus ejus puncta quaelibet P, $\mathfrak{P}$, $p_1 p_2 p_3 \ldots$ et ducimus rectas

$$Pp_1 = s_1, \quad Pp_2 = s_2, \quad Pp_3 = s_3, \quad \ldots\ .$$

Per rectam $\mathfrak{P}p_1$ ducimus planum quodlibet E_1 (per punctum P non transiens); quum curva intersectionis plani E_1 et superficiei datae sectio conica sit, quam per K_1 designemus, plana per binos radios ducta

$$(s_1 s_2), \quad (s_1 s_3), \quad (s_1 s_4), \quad \ldots$$

sectioni conicae K_1 iterum occurrent punctis:

$$x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \ldots\ .$$

Denique si plana per terna puncta ducta

$$(\mathfrak{P}p_2 x_2) = E_2, \quad (\mathfrak{P}p_3 x_3) = E_3, \quad (\mathfrak{P}p_4 x_4) = E_4 \quad \ldots$$

designamus, radios $s_1\ s_2\ s_3\ \ldots$ et plana $E_1\ E_2\ E_3\ \ldots$ duas compages (P) et

($\mathfrak{P}$) formare contendimus, quae affinitate reciproca gaudeant et superficiem datam gignant.

Ac primum quidem plana $(s_1 s_2)$, $(s_1 s_3)$, $(s_1 s_4)$, . . . fascem planorum formant, qui secatur plano $\mathfrak{E}_1$ secundum radios $p_1 x_2$, $p_1 x_3$, $p_1 x_4$, . . .; rectae autem intersectionis $(E_1 E_2)$, $(E_1 E_3)$, $(E_1 E_4)$, . . . fascem formant radiorum in plano E_1, centro $\mathfrak{P}$ gaudentem; quum vero puncta x_2 x_3 x_4 . . . in sectione conica sita sint, hos duos fasces homographicos esse videmus.

Deinde autem planum E_2 superficiem datam secundum alteram sectionem conicam K_2 secat, quae ipsa planis

$$\begin{array}{cccc} (s_2 s_1), & (s_2 s_3), & (s_2 s_4), & \ldots \text{ in punctis} \\ x_2 & \xi_3 & \xi_4 & \ldots \end{array}$$

occurrat.

Nunc vero propositionem illam secundam in usum revocare necesse est, quam in introductione attulimus; qua posita, septem puncta habemus superficiei datae

$$P\ p_1\ p_2\ p_3\ x_2\ x_3\ \mathfrak{P}$$

quae ita sunt dispertita, ut

$$\begin{array}{l} p_1 \text{ in plano } \mathfrak{P} x_2 x_3, \\ x_2 \text{ in plano } P p_1 p_2, \\ x_3 \text{ in plano } P p_1 p_3 \end{array}$$

sita sint; propositio nostra praebet constructionem octavi puncti necessarii, quod omnes superficies secundi ordinis transire coactae sunt, quae per data septem puncta transeunt; nanciscimur punctum quaesitum tanquam punctum intersectionis trium planorum

$$P p_2 p_3, \qquad \mathfrak{P} p_2 x_2, \qquad \mathfrak{P} p_3 x_3$$

vel etiam

$$(s_2 s_3), \qquad E_2, \qquad E_3.$$

Qua re demonstravimus ξ_3 punctum intersectionis superficiei datae et planorum $(s_2 s_3)$, E_2 etiam in plano E_3 situm esse; eodemque modo sequitur, punctum ξ_4 in plano E_4, punctum ξ_5 in plano E_5 caet. esse posita; unde fasces

et planorum $(s_2 s_1)$, $(s_2 s_3)$, $(s_2 s_4)$, . . .

et radiorum $(E_2 E_1)$, $(E_2 E_3)$, $(E_2 E_4)$, . . .

homographicos esse apparet.

Quum autem duobus conditionibus

$$\begin{aligned} s_1(s_2\ s_3\ s_4 \ldots) &= E_1(E_2\ E_3\ E_4 \ldots) \\ s_2(s_1\ s_3\ s_4 \ldots) &= E_2(E_1\ E_3\ E_4 \ldots) \end{aligned}$$

satisfactum sit, compages (P) et $(\mathfrak{P})$ affinitate reciproca gaudent (§. 1) q. f. d.

Hinc videmus, eandem superficiem secundi ordinis, positis duobus ejus punctis quibuslibet P et $\mathfrak{P}$ tanquam centris duarum compagium radiorum et planorum, infinitis modis effici posse, quum unum planum E_1 radio s_1 respondens ad arbitrium statuere liceat.

Qua ex eligendi libertate paradoxi enodatio sponte fluit. Datis enim novem punctis:
$P\ \mathfrak{P}\ p_1\ p_2\ \ldots\ p_7$ et radiis ductis $Pp_x = s_x$ et $\mathfrak{P}p_x = \sigma_x$, per rectam σ_1 quodlibet planum E_1 traducimus et traductum radio s_1 respondere statuimus; alia vero plana $E_2\ E_3\ \ldots\ E_7$ duarum compagium (P) et $(\mathfrak{P})$ per radios $\sigma_2\ \sigma_3\ \ldots\ \sigma_7$ ex ordine transire jubemus, dum radiis $s_2\ s_3\ \ldots\ s_7$ secundum affinitatem reciprocam respondeant. Quibus positis tota affinitas prorsus est determinata (§. 4) et certa quaedam superficies secundi ordinis nascitur; jam si planum E_1 circum axem σ_1 circumagimus, affinitas quidem variat, superficies autem ipsa immutata manet. Radio igitur cuilibet $Pp_8 = s_8$ planum E_8 respondebit, quod per rectam $\mathfrak{P}p_8$ transire coactum est; itaque postulare quidem licet, ut planum E_8 per punctum quoddam π_8 transeat, dummodo ne π_8 in radio Pp_8 ipso positum sit; unde apparet, conditionem, ut superficies per decimum punctum datum transeat, expleri non posse.

§. 7.

Coronidis loco generaliora quaedam ad rem spectantia annotare juvat. Quatuor compages duplicis infinitatis et punctorum et rectarum et radiorum et planorum:

1. omnia puncta plani E
2. omnes radii a centro P proficiscentes
3. omnes rectae plani $\mathfrak{E}$
4. omnia plana per centrum $\mathfrak{P}$ transeuntia

fundamenta constituunt geometriae spatii; ratio autem, qua harum compagium membra ad se invicem referuntur, duplex est, prout membra ejusdem vel diversi generis considerentur; si punctis puncta, rectis rectae, radiis radii, planis plana uno tantum modo respondent, affinitatem appellamus collinearem; sin vero punctis rectae vel radiis plana cet. respondent affinitatem appellamus reciprocam; nihil vero interest inter hanc et illam affinitatem et quae exposuimus de affinitate reciproca eodem modo valent de collineari. Quibus fundamentis theoria curvarum et superficierum non solum secundi sed etiam

altioris ordinis superstrui potest. Cujus rei unum tantum exemplum afferre liceat. Definitio enim plani curvi generalis tertii ordinis sic enuntiari potest:

Si tria plana $\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3$, *rectis affecta, affinitate collineari gaudent et ita collocantur, ut in idem planum incidant, locus eorum punctorum, quibus ternae rectae correlativae conveniunt, curva erit generalis tertii ordinis.*

Hinc fluit generalis superficiei tertii ordinis definitio:

Si tres planorum compages $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ *uspiam positae affinitate collineari gaudent, puncta intersectionis, quibus terna plana correlativa congrediuntur, in superficie tertii ordinis posita sunt; quae ipsa centra* $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ *continet.*

Cujus definitionis jam cl. *Grassmann* (Huj. Diar. t. XLIX. pag. 59) principiis plane diversis innisus, mentionem fecit.

Vratislaviae, 1862.

Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Wenn man in dem System

$$(1.)\qquad \begin{cases} (a_{11}+\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}+\lambda)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn}+\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

die Grössen α eliminirt, so gelangt man bekanntlich zu einer Gleichung für λ, welche, sobald die a reell und

$$(2.)\qquad a_{ik} = a_{ki}$$

vorausgesetzt wird, die doppelte Eigenschaft besitzt, nur reelle Wurzeln zu haben, und die Gleichungen (1.) auf $(n-2)$ Gleichungen zu reduciren, sobald zwei Wurzeln λ einander gleich werden.

Ich habe an einem anderen Orte (Bd. 57, pag. 327 dieses Journals) gezeigt, dass beide Eigenschaften dem System noch erhalten bleiben, wenn die a die Form haben:

$$(3.)\qquad a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}\sqrt{-1},$$

während die b, c reelle Grössen sind, und während:

$$(4.)\qquad b_{ik} = b_{ki}, \qquad c_{ik} + c_{ki} = 0.$$

Lässt man in diesem System, welches das ersterwähnte als speciellen Fall in sich schliesst, die b verschwinden, so gelangt man zu einem System, für welches die a rein imaginär sind, und für welches $a_{ik} = -a_{ki}$; dividirt man endlich noch durch $\sqrt{-1}$, und setzt

$$\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{-1}},$$

so sind sämmtliche Werthe von μ offenbar rein imaginär, während die Coefficienten reell werden, eine Form unter welcher das obige System in gewissen mechanischen Problemen auftritt. *Man sieht also, dass die Gleichung n^{ten} Grades, welche aus dem System* (1.) *entspringt, wenn*

$$a_{ik} = -a_{ik},$$

und wenn diese Grössen reelle Zahlen bedeuten, nur rein imaginäre Wurzeln hat; und dass die Gleichungen (1.) *sich auf* $n-2$ *reduciren, wenn zwei solcher imaginären Wurzelpaare zusammenfallen.*

Es ist leicht für das letzterwähnte System diese beiden Eigenschaften direct nachzuweisen.

Was den ersten Punkt anbetrifft, so bemerkt man ohne Mühe, dass in der resultirenden Gleichung nur abwechselnde Potenzen vorkommen können, und dass die Coefficienten sämmtlich positiv sind. Denn wenn man irgend eine Anzahl k von Elementen λ aus der Diagonalreihe der Determinante

$$(5.) \qquad 0 = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix}$$

auswählt, so findet sich, dass das Product derselben mit einer überschlagenen Determinante multiplicirt ist, deren Werth Null oder ein Quadrat wird, jenachdem $n-k$ ungrade oder grade ist. Die Gleichung (5.) hat also die Form:

$$(6.) \qquad 0 = \lambda^n + A\lambda^{n-2} + B\lambda^{n-4} + \cdots,$$

wo A, B etc. Summen reeller Quadrate sind.

Bezeichnet man durch λ' eine zweite Wurzel der Gleichung, welche der Wurzel λ nicht gleich oder entgegengesetzt ist, und bedeuten α'_1, α'_2, ... die den α entsprechenden Grössen, so findet sich aus (1.) sofort:

$$\lambda \Sigma \alpha_i \alpha'_i = -\Sigma\Sigma a_{ik} \alpha'_i \alpha_k.$$

Aber auch, indem man λ mit λ', und die α mit den α' vertauscht:

$$\lambda' \Sigma \alpha_i \alpha'_i = -\Sigma\Sigma a_{ik} \alpha_i \alpha'_k;$$

daher, wenn man beide Gleichungen addirt und berücksichtigt, dass $a_{ik} = -a_{ki}$ angenommen war:

$$(7.) \qquad (\lambda+\lambda')\Sigma \alpha_i \alpha'_i = 0.$$

Hier kann der Voraussetzung nach nur der zweite Factor verschwinden, wo man denn sofort den gewöhnlichen Realitätsbeweis anschliessen kann, indem man λ, λ', also auch α, α' conjugirt imaginär annimmt, und die Unmöglichkeit der Gleichung (7.) dafür nachweist.

So wird die Realität der λ^2 nachgewiesen; denn es folgt aus der Unmöglichkeit conjugirter Wurzeln, welche nicht entgegengesetzt sind, dass ent-

weder sämmtliche λ reell sind oder paarweise rein imaginär. Die Gleichung (6.), welche nur negative Werthe für die λ^2 zulässt, zeigt, dass letzterer Fall wirklich eintritt.

Bezeichnet man ferner durch Δ die Determinante (5.) und durch Δ_{ik} ihre Unterdeterminanten, so erhält man offenbar:

$$(8.) \qquad \alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = \Delta_{i1} : \Delta_{i2} : \ldots : \Delta_{in}.$$

Die Δ_{ik} haben sämmtlich die Form

$$\Delta_{ik} = A_{ik} + \lambda B_{ik},$$

wo die A, B nur noch von dem Quadrat von λ abhängen. Betrachtet man aber die Determinante

$$D = \Sigma\Sigma \Delta_{ik}(p_i + \lambda q_i)(p_k - \lambda q_k) = \Sigma\Sigma (A_{ik} + \lambda B_{ik})(p_i + \lambda q_i)(p_k - \lambda q_k),$$

welche entsteht, indem man zu Δ eine Verticalreihe

$$p_1 + \lambda q_1, \quad p_2 + \lambda q_2, \quad \ldots, \quad \text{eine Horizontalreihe}$$
$$p_1 - \lambda q_1, \quad p_2 - \lambda q_2, \quad \ldots,$$

nebst einem Diagonalgliede 0 hinzugefügt hat, so dass

$$D = -\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots & p_1+\lambda q_1 \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots & p_2+\lambda q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1-\lambda q_1 & p_2-\lambda q_2 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

so findet sich, wenn man darin λ in $-\lambda$ übergehen lässt, wodurch sich D in

$$D' = \Sigma\Sigma (A_{ik} - \lambda B_{ik})(p_i - \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k)$$

verwandelt:

$$D' = -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & p_1-\lambda q_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & p_2-\lambda q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1+\lambda q_1 & p_2+\lambda q_2 & \ldots & 0 \end{vmatrix};$$

und wenn man die ersten n Verticalreihen mit -1 multiplicirt, sodann aber die Verticalreihen mit den Horizontalreihen vertauscht, so kommt:

$$D' = (-1)^{n+1} D.$$

Es ist also auch:

$$\Sigma\Sigma (A_{ik} - \lambda B_{ik})(p_i - \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k) = (-1)^{n+1} \Sigma\Sigma (A_{ki} + \lambda B_{ki})(p_i - \lambda q_i)(p_k + \lambda q_k),$$

oder:

$$(9.) \qquad \begin{cases} A_{ik} = (-1)^{n+1} A_{ki}, \\ B_{ik} = (-1)^{n} \ B_{ki}. \end{cases}$$

Setzt man nun der Gleichung (8.) gemäss:

$$\alpha_k = \beta_k + \lambda\gamma_k,$$

$$\Delta_{ik} = \lambda^{n+1}(\beta_i' + \lambda\gamma_i')(\beta_k + \lambda\gamma_k),$$

wo β, γ, β', γ' Functionen von λ^2 sind, so ist auch

$$\Delta_{ki} = \lambda^{n+1}(\beta_i + \lambda\gamma_i)(\beta_k' + \lambda\gamma_k'),$$

und also aus (9.):

$$(\beta_i' + \lambda\gamma_i')(\beta_k + \lambda\gamma_k) = (\beta_k' - \lambda\gamma_k')(\beta_i - \lambda\gamma_i).$$

Man darf also setzen:

$$\beta_i' + \lambda\gamma_i' = \mu(\beta_i - \lambda\gamma_i),$$

$$\beta_i' - \lambda\gamma_i' = \mu(\beta_i + \lambda\gamma_i),$$

und also auch

$$(9^a.) \qquad \Delta_{ik} = \lambda^{n+1}\mu.(\beta_i + \lambda\gamma_i)(\beta_k - \lambda\gamma_k).$$

Die Bedingung, dass die Gleichung (5.) zwei gleiche Wurzeln habe, ist offenbar:

$$0 = \frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \cdots + \Delta_{nn},$$

was nach den obigen Gleichungen übergeht in:

$$0 = \mu\cdot\{\Sigma\beta_i^2 - \lambda^2\Sigma\gamma_i^2\}.$$

Bemerkt man nun, dass die β, γ reell sind, λ aber imaginär, so zeigt sich, dass der eingeklammerte Ausdruck eine Summe positiver Glieder ist. Man hat also entweder $\mu = 0$, oder es verschwinden sämmtliche β, γ, in jedem Fall aber sämmtliche Δ_{ik}; was die Bedingung dafür ist, dass die Gleichungen (1.) sich auf nur $n-2$ verschiedene reduciren.

Da die Δ_{ii} wieder von der Form des Ausdrucks Δ sind, so schliesst man leicht weiter, dass überhaupt, wenn k Wurzeln λ einander gleich werden, jenes lineare System nur $n-k$ verschiedene Gleichungen enthält.

2.

Mit Hülfe linearer Transformationen folgt aus dem angegebenen allgemeinen Satze, *dass, wenn die Function*

$$\Sigma\Sigma c_{ik}x_i x_k,$$

in welcher

$$c_{ik} = c_{ki},$$

für reelle Werthe der x nur positive Werthe annimmt, die Endgleichung des Systemes:

$$(10.)\quad \begin{cases} (a_{11}+\lambda c_{11})\alpha_1+(a_{12}+\lambda c_{12})\alpha_2+\cdots+(a_{1n}+\lambda c_{1n})\alpha_n = 0, \\ (a_{21}+\lambda c_{21})\alpha_1+(a_{22}+\lambda c_{22})\alpha_2+\cdots+(a_{2n}+\lambda c_{2n})\alpha_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}+\lambda c_{n1})\alpha_1+(a_{n2}+\lambda c_{n2})\alpha_2+\cdots+(a_{nn}+\lambda c_{nn})\alpha_n = 0 \end{cases}$$

reelle Wurzeln hat, wenn

$$a_{ik} = a_{ki},$$

oder allgemeiner, wenn

$$a_{ik} = p_{ik}+q_{ik}\sqrt{-1},$$
$$a_{ki} = p_{ik}-q_{ik}\sqrt{-1},$$

wo die p, q reelle Grössen bedeuten;

und dass das obige System sich auf nur $n-k$ von einander unabhängige Gleichungen reducirt, wenn k Wurzeln λ einander gleich werden.

Aus der letzteren Eigenschaft schliesst man, dass die Discriminante der Endgleichung in eine Summe von Quadraten zerfallen müsse. Für den besonderen Fall, wo $a_{ik}=a_{ki}$, und wo $c_{ik}=0$, $c_{ii}=1$, ist diese Discriminante durch *Kummer* und *Borchardt* und neuerdings durch *Hesse* dargestellt worden. Ich werde die Discriminante für die Endgleichung des Systems (10.) im Allgemeinen aufstellen, indem ich dabei zum Theil die Methode von *Hesse* (Bd. 57, p. 175 dieses Journals) benutze.

Die Aufgabe, die beiden Functionen

$$(11.)\quad \begin{cases} u = \Sigma\Sigma a_{ik}x_iy_k, \\ v = \Sigma\Sigma c_{ik}x_iy_k \end{cases}$$

durch die linearen Substitutionen

$$(12.)\quad \begin{cases} x_i = \alpha_i'X'+\alpha_i''X''+\cdots+\alpha_i^{(n)}X^{(n)}, \\ y_i = \beta_i'Y'+\beta_i''Y''+\cdots+\beta_i^{(n)}Y^{(n)} \end{cases}$$

gleichzeitig in die Formen

$$(13.)\quad \begin{cases} u = \lambda'X'Y'+\lambda''X''Y''+\cdots+\lambda^{(n)}X^{(n)}Y^{(n)}, \\ v = X'Y'+X''Y''+\cdots+X^{(n)}Y^{(n)} \end{cases}$$

überzuführen, kommt bekanntlich auf das System (10.) zurück, sowie auf das verwandte System:

$$(14.)\quad \begin{cases} (a_{11}+\lambda c_{11})\beta_1+(a_{21}+\lambda c_{21})\beta_2+\cdots+(a_{n1}+\lambda c_{n1})\beta_n = 0, \\ (a_{12}+\lambda c_{12})\beta_1+(a_{22}+\lambda c_{22})\beta_2+\cdots+(a_{n2}+\lambda c_{n2})\beta_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{1n}+\lambda c_{1n})\beta_1+(a_{2n}+\lambda c_{2n})\beta_2+\cdots+(a_{nn}+\lambda c_{nn})\beta_n = 0, \end{cases}$$

dessen Endgleichung die nämliche ist.

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & p_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem Product der Determinanten

$$\alpha = \Sigma \pm \alpha_1' \alpha_2'' \ldots \alpha_n^{(n)},$$
$$\beta = \Sigma \pm \beta_1' \beta_2'' \ldots \beta_n^{(n)},$$

und bemerkt man, dass aus der Vergleichung der beiden Formen von v die Relationen folgen:

$$(14^a.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_k c_{ik} \alpha_i^{(h)} \beta_k^{(m)} = 0, \\ \Sigma_i \Sigma_k c_{ik} \alpha_i^{(h)} \beta_k^{(h)} = 1, \end{cases}$$

so erhält man:

$$\alpha\beta . R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & P' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & P'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & P^{(n)} \\ Q' & Q'' & \cdots & Q^{(n)} & 0 \end{vmatrix};$$
$$= -\{Q'P' + Q''P'' + \cdots + Q^{(n)} P^{(n)}\}.$$

Dabei ist

$$P^{(h)} = \alpha_1^{(h)} p_1 + \alpha_2^{(h)} p_2 + \cdots + \alpha_n^{(h)} p_n,$$
$$Q^{(h)} = \beta_1^{(h)} q_1 + \beta_2^{(h)} q_2 + \cdots + \beta_n^{(h)} q_n,$$

so dass man die identischen Gleichungen hat:

$$\Sigma P^{(h)} X^{(h)} = \Sigma p_k x_k,$$
$$\Sigma Q^{(h)} Y^{(h)} = \Sigma q_k x_k.$$

Man hat also auch

$$\alpha^n\beta^n . R^n = (-1)^n \{P'Q' + P''Q'' + \cdots + P^{(n)}Q^{(n)}\}^n.$$

Diese Gleichung besteht noch, wenn man die Producte der p und der q durch die entsprechenden Coefficienten zweier Functionen n^{ter} Ordnung ersetzt, sofern nur für die Producte der P und der Q die analogen Coefficienten der transformirten Functionen gesetzt werden. Wählt man statt dieser Functionen diejenigen, welche durch die linearen Transformationen in die Producte der X und der Y übergehen, und setzt also:

$$(15.) \quad \begin{cases} A . X'X'' \ldots X^{(n)} = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ B . Y'Y'' \ldots Y^{(n)} = \psi(y_1, y_2, \ldots y_n), \end{cases}$$

so verschwinden in dem Ausdruck

$$\{P'Q' + P''Q'' + \cdots + P^{(n)}Q^{(n)}\}^n$$

alle Glieder bis auf den Term

$$1 . 2 \ldots n . P' . P'' \ldots P^{(n)} . Q' . Q'' \ldots Q^{(n)};$$

zugleich muss man aber

$$1 . 2 \ldots n . P' . P'' \ldots P^{(n)}$$

durch den Coefficienten A des Products der X in φ, und

$$1 . 2 \ldots n . Q' . Q'' \ldots Q^{(n)}$$

durch den Coefficienten B des Products der Y ersetzen. Geht nun R^n durch Einführung der Coefficienten von φ, ψ in $(-1)^n\Omega$ über, so hat man demnach die Gleichung:

$$\alpha^n\beta^n . \Omega = \frac{AB}{1 . 2 \ldots n}.$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten von $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ durch C_{ik}, so ist

$$R = -\Sigma\Sigma C_{ik} p_i q_k;$$

und wenn man also, die Summen auf sämmtliche Indices bezogen,

$$\varphi = \Sigma p_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n},$$

$$\psi = \Sigma q_{i_1 i_2 \ldots i_n} y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

setzt, so ergiebt sich

$$\Omega = \Sigma\Sigma C_{i_1 k_1} C_{i_2 k_2} \ldots C_{i_n k_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} q_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Ist ferner

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

so folgt aus (14ª.)

$$C.\alpha\beta = 1;$$

und man hat also

$$(16.) \qquad \Omega = \frac{AB.C^n}{1.2\ldots n}.$$

Wenn man die Functionen φ, ψ kennt, so ist auch Ω bekannt, und man erhält aus dieser Gleichung eine Bestimmung für die Constanten A, B, mit welchen die Producte der Variabeln X oder Y multiplicirt werden müssen, wenn man sie auf Functionen φ, ψ zurückführen will, welche die Coefficienten der gegebenen Functionen nur in rationaler Weise enthalten. Es wird daher zunächst auf die Aufsuchung jener Functionen ankommen, welche in einer von der sonst angewandten abweichenden Weise ausgeführt werden soll.

3.

Ich denke mir die Determinante

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_{11}+\varrho c_{11} & a_{12}+\varrho c_{12} & \ldots & a_{1n}+\varrho c_{1n} & \mu_1 \\ a_{21}+\varrho c_{21} & a_{22}+\varrho c_{22} & \ldots & a_{2n}+\varrho c_{2n} & \mu_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+\varrho c_{n1} & a_{n2}+\varrho c_{n2} & \ldots & a_{nn}+\varrho c_{nn} & \mu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots & \nu_n & 0 \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von ϱ entwickelt, und setze einmal

$$\mu_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} + k\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

das andere Mal

$$\nu_i = \frac{\partial u}{\partial y_i} + k\frac{\partial v}{\partial y_i}.$$

Man erhält auf diese Art zwei verschiedene Entwickelungen:

$$\Theta' = \Sigma_i \nu_i [(N_i + k\mathrm{N}_i) + \varrho(N_i' + k\mathrm{N}_i') + \cdots + \varrho^{n-1}(N_i^{(n-1)} + k\mathrm{N}_i^{(n-1)})],$$

$$\Theta'' = \Sigma_i \mu_i [(M_i + k\mathrm{M}_i) + \varrho(M_i' + k\mathrm{M}_i') + \cdots + \varrho^{n-1}(M_i^{(n-1)} + k\mathrm{M}_i^{(n-1)})].$$

Hier sind die Functionen Θ', N, N, N', N' ... nur von den y abhängig, hingegen Θ'', M, M, M', M' ... nur von den x. Ich bilde jetzt die beiden folgenden Determinanten, deren erstere ebenfalls nur von den y, die zweite nur von den x abhängig ist:

$$Y = \begin{vmatrix} N_1+kN_1 & N_2+kN_2 & \dots & N_n+kN_n \\ N_1'+kN_1' & N_2'+kN_2' & \dots & N_n'+kN_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1^{(n-1)}+kN_1^{(n-1)} & N_2^{(n-1)}+kN_2^{(n-1)} & \dots & N_n^{(n-1)}+kN_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\Xi = \begin{vmatrix} M_1+kM_1 & M_2+kM_2 & \dots & M_n+kM_n \\ M_1'+kM_1' & M_2'+kM_2' & \dots & M_n'+kM_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1^{(n-1)}+kM_1^{(n-1)} & M_2^{(n-1)}+kM_2^{(n-1)} & \dots & M_n^{(n-1)}+kM_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Functionen N, N sind von einander nicht unabhängig, sondern es bestehen zwischen denselben einige sehr einfache Relationen, ebenso zwischen den M, M. Setzt man nämlich in der Determinantenform von Θ' und Θ'' $k=\varrho$, so findet man, indem man jedesmal die äusserste Reihe durch Abziehen der anderen zerstört:

$$\Theta' = -\Delta(\varrho)(\nu_1 y_1+\nu_2 y_2+\dots+\nu_n y_n),$$
$$\Theta'' = -\Delta(\varrho)(\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\dots+\mu_n x_n),$$

wo

$$\Delta(\varrho) = D+\varrho D'+\varrho^2 D''+\dots+\varrho^n D^{(n)}$$

die Eliminationsdeterminante der Gleichungen (10.) oder (14.) bedeutet, statt λ darin ϱ gesetzt. Durch Vergleichung mit der obigen Form von Θ', Θ'', wenn darin $k=\varrho$ gesetzt wird, erhält man also die Relationen:

$$(17.)\quad \begin{cases} N_i = -Dy_i, & M_i = -Dx_i, \\ N_i+N_i' = -D'y_i, & M_i+M_i' = -D'x_i, \\ N_i'+N_i'' = -D''y_i, & M_i'+M_i'' = -D''x_i, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ N_i^{(n-1)} = -D^{(n)}y_i, & M_i^{(n-1)} = -D^{(n)}x_i. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen kann man die Ausdrücke von Y, Ξ mannigfach transformiren; immer aber findet man, dass jene Ausdrücke den Factor $\Delta(k)$ enthalten. Multiplicirt man z. B. die zweite, dritte etc. Horizontalreihe beziehungsweise mit k, k^2, ... und addirt sie zur ersten, so geht diese in

$$\Delta(k).y_1, \quad \Delta(k).y_2, \quad \dots$$

über; lässt man nun $\Delta(k)$ hervortreten, und vereinfacht die übrigen Reihen mit Hülfe der ersten und der Gleichungen (17.), so bleibt:

$$Y = \Delta(k).\psi(y_1, y_2, \dots y_n),$$
$$\Xi = \Delta(k).\varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

wo

$$(18.)\quad \begin{cases} \psi = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ N_1' & N_2' & N_3' & \dots & N_n' \\ N_1'' & N_2'' & N_3'' & \dots & N_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_1^{(n-1)} & N_2^{(n-1)} & N_3^{(n-1)} & \dots & N_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \\ \varphi = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ M_1' & M_2' & M_3' & \dots & M_n' \\ M_1'' & M_2'' & M_3'' & \dots & M_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1^{(n-1)} & M_2^{(n-1)} & M_3^{(n-1)} & \dots & M_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Dieses sind die Functionen φ, ψ, die man in die Gleichungen (15.) einführen kann; Ausdrücke, welche mit Hülfe der Gleichungen (17.) mannigfache Gestalten annehmen.

In der That liefern diese Ausdrücke eine Darstellung der Producte

$$X'X''\dots X^{(n)}, \qquad Y'Y''\dots Y^{(n)}.$$

Zu diesem Ende betrachte ich den Ausdruck Θ von Neuem. Aus der Vergleichung der Formen von u, v, welche in den Gleichungen (11.), (13.) enthalten sind, ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von $X^{(m)}.Y^{(n)}$:

$$\Sigma_i \Sigma_k (a_{ik} + \varrho c_{ik})\, \alpha_i^{(m)} \beta_k^{(n)} = 0,$$

wenn m von n verschieden ist, und

$$\Sigma_i \Sigma_k (a_{ik} + \varrho c_{ik})\, \alpha_i^{(m)} \beta_k^{(m)} = \lambda^{(m)} + \varrho.$$

Multiplicirt man also Θ mit $\alpha.\beta$, und setzt

$$(19.)\quad \begin{cases} \mu_1 \alpha_1^{(h)} + \mu_2 \alpha_2^{(h)} + \dots = m^{(h)}, \\ \nu_1 \beta_1^{(h)} + \nu_2 \beta_2^{(h)} + \dots = n^{(h)}, \end{cases}$$

so erhält man

$$\Theta = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \begin{vmatrix} \lambda' + \varrho & 0 & \dots & 0 & m' \\ 0 & \lambda' + \varrho & \dots & 0 & m'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{(n)} + \varrho & m^{(n)} \\ n' & n'' & \dots & n^{(n)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man hier, um Θ' zu bilden, μ_i durch

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + k\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

so hat man nach (19.)

$$m^{(h)} = \frac{\partial u}{\partial X^{(h)}} + k\frac{\partial v}{\partial X^{(h)}} = (\lambda^{(h)} + k)\, Y^{(h)};$$

ersetzt man hingegen, um Θ'' zu bilden, ν_i durch $\frac{\partial u}{\partial y_i} + k\frac{\partial v}{\partial y_i}$, so wird

$$n^{(h)} = \frac{\partial u}{\partial Y^{(h)}} + k\frac{\partial v}{\partial Y^{(h)}} = (\lambda^{(h)} + k)\, X^{(h)}.$$

Nun ist Y die Functionaldeterminante der Coefficienten von Θ', nach den ν als Variabeln gebildet; und ebenso Ξ die der Coefficienten von Θ'', nach den μ genommen. Daher ist auch

$$Y = \beta . Y^{(0)},$$
$$\Xi = \alpha . \Xi^{(0)},$$

wo $Y^{(0)}$, $\Xi^{(0)}$ die Functionaldeterminanten von Θ', Θ'' sind in Bezug auf die m und n. Statt aber die Functionaldeterminante eines Systems von Functionen zu nehmen, kann man die Functionaldeterminante eines Systems linearer Verbindungen jener Functionen nehmen, dividirt durch die Determinante der Coefficienten, welche in diesen linearen Verbindungen auftreten. Ein solches System von Coefficienten sei:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \ldots & \lambda'^{n-1}, \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \ldots & \lambda''^{n-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda^{(n)} & \lambda^{(n)2} & \ldots & \lambda^{(n)n-1}. \end{array}$$

Jene linearen Verbindungen sind dann nichts Anderes als die Werthe von Θ', Θ'', welche entstehen, indem man ϱ der Reihe nach durch eine der Grössen λ ersetzt. Aus Θ' entstehen dann die Functionen

$$-n' Y' . \lambda' + k . \lambda'' - \lambda' . \lambda''' - \lambda' \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$-n'' Y'' . \lambda' - \lambda'' . \lambda'' + k . \lambda''' - \lambda'' \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$-n''' Y''' . \lambda' - \lambda''' . \lambda'' - \lambda''' . \lambda''' + k \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

aus Θ'':

$$-m' X' . \lambda' + k . \lambda'' - \lambda' . \lambda''' - \lambda' \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$-m'' X'' . \lambda' - \lambda'' . \lambda'' + k . \lambda''' - \lambda'' \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$-m''' X''' . \lambda' - \lambda''' . \lambda'' - \lambda''' . \lambda''' + k \ldots (\alpha\beta)^{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} \Delta = \lambda'' - \lambda' . \lambda''' - \lambda' . \lambda'''' - \lambda' \ldots \\ . \lambda''' - \lambda'' . \lambda'''' - \lambda'' \ldots \\ . \lambda'''' - \lambda''' \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so ist die Determinante der obigen Coefficienten gleich Δ, und also

$$Y^{(0)} = (\alpha\beta)^{-n} . \lambda' + k . \lambda'' + k \ldots Y' Y'' \ldots (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} . \Delta,$$
$$\Xi^{(0)} = (\alpha\beta)^{-n} . \lambda' + k . \lambda'' + k \ldots X' X'' \ldots (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} . \Delta.$$

Multiplicirt man ferner $\Delta(k)$ mit $\alpha\beta$, so wird nach den oben angeführten Formeln:

$$\alpha\beta\Delta(k) = \lambda' + k . \lambda'' + k \ldots \lambda^{(n)} + k.$$

Und somit wird endlich

$$Y = \beta Y^{(0)} = \Delta(k) . Y' Y'' \ldots Y^{(n)} . (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \Delta . \alpha^{-(n-1)} \beta^{-(n-2)},$$
$$\Xi = \alpha \Xi^{(0)} = \Delta(k) . X' X'' \ldots X^{(n)} . (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \Delta . \alpha^{-(n-2)} \beta^{-(n-1)}.$$

Vergleicht man dies mit der früher gefundenen Form, so ergiebt sich die gesuchte Darstellung für die Producte der X und der Y:

$$(-1)^{\frac{n.n+1}{2}} . \alpha^{-(n-2)} \beta^{-(n-1)} . \Delta . X' X'' \ldots X^{(n)} = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n),$$
$$(-1)^{\frac{n.n+1}{2}} . \alpha^{-(n-1)} \beta^{-(n-2)} . \Delta . Y' Y'' \ldots Y^{(n)} = \psi(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

eine Darstellung, welche den Vorzug hat, zur Bestimmung der Functionen φ, ψ keiner successiven Bildungen zu bedürfen; während sonst zu der Bildung solcher Producte die Determinante von n Functionen gewählt wird, deren jede nur mit Hülfe sämmtlicher vorangehenden gebildet werden kann.

4.

Vergleicht man die letzten Gleichungen mit (16.), so findet sich

$$A = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \beta^{-(n-1)} \alpha^{-(n-2)} \Delta,$$

$$B = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \alpha^{-(n-1)} \beta^{-(n-2)} \Delta.$$

Setzt man dies endlich in die Gleichung (16.) und bemerkt, dass

$$\frac{1}{\alpha\beta} = C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

so geht diese Formel in die folgende Gestalt über, welche die Discriminante Δ^2 der gegebenen Gleichung ausdrückt:

$$(20.) \quad \begin{cases} \Delta^2 = 1.2 \ldots n . \Omega . C^{-3(n-1)} \\ \quad = 1.2 \ldots n . \Sigma\Sigma C_{i_1 k_1} C_{i_2 k_2} \ldots C_{i_n k_n} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} q_{k_1 k_2 \ldots k_n} . C^{-3(n-1)}. \end{cases}$$

Man sieht nun leicht ein, dass, wenn

$$c_{ik} = c_{ki},$$

wenn ferner die Function

$$\Sigma\Sigma c_{ik} x_i x_k$$

die Eigenschaft hat, für reelle Werthe der x stets positiv zu sein, wenn endlich

$$\alpha_{ik} = \beta_{ik} + \gamma_{ik}\sqrt{-1}, \qquad \alpha_{ki} = \beta_{ik} - \gamma_{ik}\sqrt{-1},$$

wo β_{ik}, γ_{ik} reelle Zahlen bedeuten, auch Δ^2 stets positiv sein muss. Denn in diesem Fall unterscheiden sich die Coefficienten der Functionen φ, ψ offenbar nur durch das Vorzeichen ihrer imaginären Theile, indem die Coefficienten von φ aus denen von ψ durch Vertauschung von a_{ik}, c_{ik} mit a_{ki}, c_{ki} hervorgehen. Man hat also:

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \tau_{i_1 i_2 \ldots i_n}\sqrt{-1},$$

$$q_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n} - \tau_{k_1 k_2 \ldots k_n}\sqrt{-1},$$

wo die σ, τ reelle Zahlen bedeuten. Also ist

$$(21.) \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^2}{1.2 \ldots n} = C^{-3(n-1)} \Sigma\Sigma C_{i_1 k_1} C_{i_2 k_2} \ldots C_{i_n k_n} \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} \sigma_{k_1 k_2 \ldots k_n} \\ \qquad\qquad + C^{-3(n-1)} \Sigma\Sigma C_{i_1 k_1} C_{i_2 k_2} \ldots C_{i_n k_n} \tau_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tau_{k_1 k_2 \ldots k_n}, \end{cases}$$

während die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Terme, welche zwei ähnliche Summen ergeben, sich aufheben, da

$$C_{ik} = C_{ki},$$

also auch

$$\Sigma\Sigma C_{i_1k_1}C_{i_2k_2}\dots\sigma_{i_1i_2\dots}\tau_{k_1k_2\dots} = \Sigma\Sigma C_{k_1i_1}C_{k_2i_2}\dots\sigma_{k_1k_2\dots}\tau_{i_1i_2\dots}$$
$$= \Sigma\Sigma C_{i_1k_1}C_{i_2k_2\dots}\sigma_{k_1k_2\dots}\tau_{i_1i_2\dots}.$$

Da ferner $\Sigma\Sigma c_{ik}x_ix_k$ immer positiv sein sollte, so kann man dieser Function, und zwar auf unendlich viel Arten, die Form geben:

$$\Sigma\Sigma c_{ik}x_ix_k = \sum_{h=1}^{h=\infty}(\xi_1^{(h)}x_1+\xi_2^{(h)}x_2+\dots+\xi_n^{(h)}x_n)^2.$$

Dann wird auch

$$\Sigma\Sigma C_{ik}u_iu_k = \sum_{h=1}^{h=\infty}(u_1\eta_1^{(h)}+u_2\eta_2^{(h)}+\dots+u_n\eta_n^{(h)})^2,$$
$$C = \xi^2,$$

wo ξ die Determinante der ξ, und $\eta_k^{(h)}$ den Differentialquotienten von ξ nach $\xi_k^{(h)}$ bedeutet. So ist C positiv, und ferner wird, wenn die Summe nach h eine $n$fache Summation über sämmtliche Indices $h_1, h_2, \dots h_n$, die Summe nach i eine ebensolche für $i_1, i_2, \dots i_n$ ausdrückt:

$$(22.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta^2}{1.2\dots n} = \xi^{-6(n-1)}.\Sigma_h\left\{\Sigma_i\eta_{i_1}^{(h_1)}\eta_{i_2}^{(h_2)}\dots\eta_{i_n}^{(h_n)}\sigma_{i_1i_2\dots in}\right\}^2 \\ \qquad\qquad +\xi^{-6(n-1)}.\Sigma_h\left\{\Sigma_i\eta_{i_1}^{(h_1)}\eta_{i_2}^{(h_2)}\dots\eta_{i_n}^{(h_n)}\tau_{i_1i_2\dots in}\right\}^2. \end{cases}$$

Dies ist eine Darstellung der Discriminante als Summe von Quadraten, welche übrigens den Darstellungen (20.), (21.) gegenüber nur von secundärem Interesse ist. Wenn aber insbesondere die Function $\Sigma\Sigma c_{ik}x_ix_k$ von vorn herein schon als Summe von Quadraten gegeben ist, so werden die $\xi_i^{(i)}$, $\eta_i^{(i)}$ gleich 1, während alle anderen ξ, η verschwinden. Dann also ergiebt sich, ohne dass es der Einführung fremder Grössen bedarf:

$$\frac{\Delta^2}{1.2\dots n} = \Sigma(\sigma^2_{i_1i_2\dots i_n}+\tau^2_{i_1i_2\dots i_n});$$

ein Resultat, welches eine der von *Borchardt* im 30sten Bande dieses Journals gegebenen ähnliche Darstellung auf die vorliegende Classe von Problemen ausdehnt.

Carlsruhe, den 23sten November 1861.

Sur les volumes des surfaces podaires.

(Extrait du mémoire lu dans la séance du 20 novembre 1862 de la société royale de Londres et imprimé dans les Philosophical Transactions of the Royal Society Vol. 153.)

(Par M. *T. A. Hirst* à Londres.)

1. Il y a vingt quatre ans M. *Steiner*, dans un des remarquables mémoires sur la Géométrie pure qu'il présenta à l'académie de Berlin, établit des rapports très généraux et fort intéressants entre les aires des courbes podaires dérivées de la même courbe primitive en changeant le point (origine de la podaire) d'où l'on abaisse les perpendiculaires sur les tangentes de la courbe primitive. Il n'est pas venu à ma connaissance que l'on ait essayé, jusqu'ici, d'étendre ses résultats au cas des surfaces podaires. C'est l'objet que je me suis proposé dans ce mémoire.

2. Avant d'entrer en matière il ne sera pas, je crois, sans utilité, pour faciliter la comparaison, de rappeler quelques uns des résultats obtenus par *Steiner* *):

„La courbe primitive étant fermée, quelle que soit d'ailleurs sa nature, le lieu des origines des podaires d'aire constante est une circonférence; et les diverses circonférences qui correspondent à différentes aires sont concentriques; le centre commun étant l'origine de la podaire d'aire minimum."

Steiner donna à ce centre commun le nom de *Krümmungs-Schwerpunkt*, par suite d'une propriété mécanique remarquable qu'il possède. En effet si, dans chacun des points de la courbe primitive, on conçoit qu'une quantité de matière reciproquement proportionelle au rayon de courbure se trouve concentrée, le *Krümmungs-Schwerpunkt*, c'est-à-dire le centre de gravité de la courbe ainsi chargée, sera précisement le centre commun des circonférences dont nous nous occupons.

En 1854, seize ans après l'apparition du mémoire de *Steiner*, M. *Raabe* de Zurich **) étendit le théorème de *Steiner* aux courbes non fermées. La définition générale de l'aire d'une podaire étant l'aire de l'espace décrit par la perpendiculaire tandis que le point de contact de la tangente décrit l'arc

*) ce Journal t. 21, p. 57.

**) ce Journal t. 50, p. 193.

primitif, *Raabe* trouva que les origines de toutes les podaires de même aire sont situées sur une conique. Les diverses coniques qui correspondent à différentes aires sont semblables, semblablement placées et concentriques, le centre commun de toutes étant encore l'origine de la podaire d'aire minimum, et bien qu'il ne coïncide plus avec le *Krümmungs-Schwerpunkt* de l'arc primitif, il s'y relie intimement, comme l'a fait voir plus récemment M. *Wetzig* de Leipsick*).

3. Par rapport aux surfaces il faut entendre par volume de la podaire celui du cône dont le sommet est l'origine et dont la base est la partie de la surface podaire qui correspond à la partie donnée de la surface primitive. Cela posé la suite fera voir que *quelle que soit la nature de la surface primitive, les origines des podaires de volume constant sont situées sur une surface du troisième ordre* et plus loin on verra que *quand la surface primitive est fermée, mais d'ailleurs tout à fait arbitraire, la surface, lieu des origines des podaires de volume constant, est du second ordre et que l'ensemble de ces lieux forme un système de surfaces semblables, semblablement placées et concentriques dont le centre commun est l'origine de la podaire de volume minimum.*

4. Prenons x, y, z pour coordonnées de l'origine A d'une podaire (P) d'une surface primitive (S) et indiquons par (P_0) la podaire de la même surface (S) prise par rapport à l'origine O des axes des coordonnées.

Soient α, β, γ les angles positifs et moindres que π, que la normale *externe* tirée d'un point quelconque M de la surface (S) forme avec les axes, et représentons par p et p_0 les perpendiculaires abaissées respectivement de A et de O sur le plan tangent de (S) en M, les pieds m et m_0 de ces perpendiculaires seront évidemment les points des podaires (P) et (P_0) qui correspondent au point M de la surface primitive. Les angles de direction de l'une ou de l'autre de ces perpendiculaires seront α, β, γ ou $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ selon qu'elle est tirée dans le même sens ou dans un sens contraire par rapport à la normale externe en question et, si l'on regarde une telle perpendiculaire comme positive ou négative selon que l'une ou l'autre de ces circonstances se présente, la relation générale entre p et p_0 sera

$$p = p_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma.$$

Concevons de plus une sphère de rayon égal à l'unité et soit $d\sigma$ l'élément de sa surface interceptée par des rayons ayant les mêmes directions que les nor-

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik; Vol. 5, 1860; p. 81.

males externes aux points du contour de l'élément *ds* de la surface primitive, au point *M* que l'on considère.

D'après la définition de *Gauss* $d\sigma$ sera aussi la *courbure totale* de l'élément *ds*, et aura la valeur $k\,ds$, où k est la *mesure de la courbure* en *M*, en d'autres termes la valeur réciproque du produit des deux rayons de courbure en *M*. L'élément de volume de la podaire (P) aura évidemment la valeur

$$dP = \frac{p^3}{3}\,d\sigma$$

qui changera de signe avec p aussi bien qu'avec $d\sigma$. Au moyen de l'équation précédente nous aurons donc

$$dP = \tfrac{1}{3}(p_0 - x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma)^3\,d\sigma$$

expression qui, développée et intégrée, prend la forme

$$P = P_0 - (A_1, A_2, A_3)\widehat{(x, y, z)} + (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12})\widehat{(x, y, z)}^2$$
$$- \tfrac{1}{3}(A_{111}, A_{222}, A_{333}, A_{112}, A_{113}, A_{223}, A_{221}, A_{331}, A_{332}, A_{123})\widehat{(x, y, z)}^3,$$

où les dix-neuf coefficients sont indépendants de la position de l'origine *A* de la podaire (P) et représentent des intégrales doubles qui doivent s'étendre à tous les points de la surface primitive (S). De ces coefficients il suffira d'écrire les valeurs des six suivants, les treize autres pouvant s'en déduire par les permutations de α, β, γ conformément à celles des indices 1, 2, 3;

$$A_1 = \int p_0^2\,d\sigma\cos\alpha, \quad A_{11} = \int p_0\,d\sigma\cos^2\alpha, \quad A_{111} = \int d\sigma\cos^3\alpha,$$

$$A_{12} = \int p_0\,d\sigma\cos\alpha\cos\beta, \quad A_{112} = \int d\sigma\cos^2\alpha\cos\beta, \quad A_{123} = \int d\sigma\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

La formule donnée ci-dessus pour le volume de la podaire (P) prise par rapport à un point quelconque (x, y, z) montre tout de suite, comme on l'a déjà fait remarquer au n°. 3, que *les origines des podaires de volume constant sont situées sur une surface de troisième ordre.*

5. L'analogie entre les cas des courbes et des surfaces podaires est parfaite, quand on se souvient que l'ordre de la surface trouvée ci-dessus provient essentiellement des trois dimensions de l'espace, précisément de la même manière que l'ordre de la courbe plane, sur laquelle se trouvent les origines des podaires de même aire (n°. 2), dérive des deux dimensions d'un plan. Cependant il n'est pas sans intérêt d'observer que tandis que l'hypothèse d'une *courbe* primitive fermée ne fait que changer *l'espèce* du lieu en question,

l'hypothèse d'une *surface* primitive fermée conduit à une réduction *d'ordre* du lieu dont il s'agit. La première circonstance est produite par l'égalité entre les coefficients de x^2 et y^2 et l'évanouissement de celui de xy; la dernière est due à l'évanouissement de chacune des dix intégrales A_{111}, A_{112}, etc., intégrales qui, ne contenant pas p_0, ont des valeurs qui dépendent uniquement de la courbure de la surface primitive.

6. Sans entreprendre la discussion de toutes les singularités de courbure que peuvent présenter les surfaces, je me contente d'observer que la dite propriété des dix intégrales est facilement démontrée quand la surface primitive est non seulement fermée, mais partout convexe. En effet, dans ce cas, le seul qui nous offre de l'intérêt pour les applications subséquentes, les normales d'une telle surface représentent, sans répétition, toutes les directions possibles, et comme $d\sigma$ ne change pas de signe on voit sans peine, que chaque intégrale se compose de couples d'éléments égaux et de signes opposés.

Dans le cas plus général où certaines directions sont représentées plus d'une fois par les normales d'une surface primitive fermée, on partagerait cette surface en parties distinctes de deux espèces de manière que les normales appartenant à chaque partie de la première espèce représentent, comme auparavant et sans répétition, toutes les directions possibles, pendant que les normales aux divers points de chaque partie de la seconde espèce, se composent de couples de normales de même direction. Puis on ferait voir que chacune des intégrales dont il s'agit, étendue à tous les points d'une partie de la première ou de la seconde espèce, s'évanouit.

Ainsi pour une surface primitive fermée, les termes de troisième ordre n'entrent plus dans l'expression de P au n°. 4; et par la seule forme de l'équation qui reste, on voit non seulement que la surface (A), lieu des origines de podaires (P) de volume constant, est de second ordre mais qu'en même temps, la suite de ces surfaces (A), qui répondent aux volumes divers, forme une série de surfaces de second ordre, concentriques, semblables et semblablement placées; leur centre commun étant le point pour lequel chacune des intégrales A_1, A_2, A_3 s'évanouit. En effet, si ce point était pris pour origine des coordonnées, l'équation en question prendrait la forme

$$P = P_0 + (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12})\widehat{(}x, y, z)^2,$$

ou si l'on veut

$$P = P_0 + \int p_0 (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \, d\sigma,$$

d'où l'on peut aussi conclure, comme on l'a déjà dit au n°. 3, que le centre commun de toutes les surfaces (A) est l'origine de la podaire de volume minimum.

Quand la surface primitive fermée a elle-même un centre, ce centre sera aussi le centre commun des surfaces (A); car en prenant ce point pour origine des coordonnées, chacune des intégrales A_1, A_2, A_3 se composera de couples d'éléments égaux et de signes opposés.

7. Pour éclaircir les principes précédents et, en même temps, pour faciliter les applications subséquentes, nous considérerons un moment le plus simple de tous les cas, celui où la primitive est une sphère avec le rayon a. En prenant son centre pour origine des coordonnées, seize des intégrales du n°. 4 s'évanouiront et les intégrales restantes A_{11}, A_{22}, A_{33} acquerront la valeur commune $\frac{4}{3}\pi a$; de manière que le volume d'une podaire quelconque (P) devient

$$P = \tfrac{4}{3}\pi a(a^2+x^2+y^2+z^2) = \tfrac{4}{3}\pi a(a^2+r^2).$$

Quand l'origine de (P) est en dehors de la sphère, la podaire se compose évidemment de deux feuilles passant par l'origine et touchant à la primitive, et il est facile de prouver directement que le volume de la podaire, comme le donne cette formule, est la différence des volumes enfermés par ces feuilles. Quand la sphère se réduit à un point, les volumes de toutes les podaires s'évanouissent, d'après la formule; de sorte que nous devons considérer la podaire d'un point comme se composant de *deux* feuilles sphériques qui coïncident.

De la même manière la podaire d'une surface tubulaire se composerait, en général, de feuilles distinctes qui coïncideraient quand la primitive se réduirait à une simple ligne courbe. Bien que la surface podaire existe, par conséquent, aussi quand deux dimensions de la primitive sont supposées s'évanouir, étant encore, par définition, l'enveloppe de sphères dont les diamètres sont les rayons vecteurs de la courbe, son volume doit être regardé comme ayant une valeur nulle.

Toutefois le cas est différent lorsqu'une seule des trois dimensions de la primitive est supposée s'évanouir. La podaire d'une pareille surface (S_1) se composerait de *deux* feuilles qui coïncideraient avec la podaire ordinaire (P_1) de (S_1) et de la podaire (P) de la courbe (C) qui forment le contour de la primitive (S_1). Le volume de la podaire composée serait pourtant simplement celui de la podaire (P) du contour (C); ce dernier volume, par conséquent, doit, si on l'évalue convenablement, pouvoir être déduit de nos

formules générales. Lorsque la surface (S_1) coïncide avec la développable osculatrice de la courbe (C) les intégrales doubles du n°. 4 se réduisent très facilement en intégrales simples et donnent lieu à plusieurs questions intéressantes par rapport aux volumes des surfaces podaires d'une courbe à double courbure. Mais pour ne pas interrompre trop la suite des idées, il faut ici reprendre le cas général des podaires d'une surface.

8. Nous nous proposons de considérer à présent les podaires de l'ellipsoïde qui, depuis la publication des recherches de *Fresnel* sur la lumière, offrent un intérêt particulier. En y appliquant les résultats précédents nous arriverons à plusieurs résultats nouveaux.

En vue de cette application et pour faire suite au sujet du n°. 6 ajoutons que, quand la surface primitive est symétrique par rapport à trois plans rectangulaires, les intégrales

$$A_{12}, \quad A_{23}, \quad A_{31}$$

s'évanouissent en prenant ces plans de symétrie pour plans des coordonnées. Par suite de cette propriété, qui est évidente à la seule inspection des intégrales données au n°. 4, l'expression du volume d'une podaire quelconque prend la forme très simple

$$P = P_0 + A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2.$$

Si, de plus, la surface primitive est partout convexe les coefficients

$$A_{11} = \int p_0 d\sigma \cos^2\alpha, \qquad A_{22} = \int p_0 d\sigma \cos^2\beta, \qquad A_{33} = \int p_0 d\sigma \cos^2\gamma,$$

seront manifestement des sommes d'éléments de même signe, de sorte que le lieu (A) des origines de podaires d'égal volume sera un ellipsoïde dont les axes coïncideront avec les axes de symétrie de la surface primitive.

9. Pour l'ellipsoïde primitif

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1,$$

les carrés de ses demi-axes écrits dans l'ordre descendant de grandeur étant désignés par a_1, a_2, a_3, nous avons les formules bien connues:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a_1}p_0, \qquad \cos\beta = \frac{y}{a_2}p_0, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{a_3}p_0,$$

$$\frac{1}{p_0^2} = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = \frac{1}{a_1\cos^2\alpha + a_2\cos^2\beta + a_3\cos^2\gamma},$$

$$3P_0 = \int p_0^3 d\sigma = \frac{1}{a_1 a_2 a_3}\int p_0^7 ds.$$

Ces deux expressions équivalentes pour le volume de la podaire centrale, ou podaire minimum, ont leurs avantages. Dans la seconde on suppose que l'intégrale s'étend à tous les points de l'ellipsoïde primitif; dans la première, après avoir exprimé α, β, γ, puis p_0, au moyen de deux variables indépendantes convenables, l'intégration s'étendra à tous les points de la sphère de rayon égal à l'unité.

L'élément sphérique $d\sigma$ étant ainsi exprimé, les limites de l'intégration seront indépendantes de a_1, a_2, a_3, et par voie de différentiation, on aura évidemment

$$\frac{\partial P_0}{\partial a_1} = \int p_0^2 \frac{\partial p_0}{\partial a_1} d\sigma = \tfrac{1}{2} \int d\sigma\, p_0 \cos^2 \alpha = \frac{A_{11}}{2},$$

et des formules semblables pour A_{22} et A_{33}; de sorte que le volume d'une podaire quelconque se trouve donnée par la formule

$$P = P_0 + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_1} x^2 + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_2} y^2 + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_3} z^2;$$

volume qu'on obtiendra conséquemment par simple différentiation de l'expression de P_0 *); on observera en même temps que P_0 comme fonction homogène de a_1, a_2, a_3 de l'ordre $\frac{3}{2}$, satisfait d'une manière identique à la relation

$$3P_0 = 2a_1\frac{\partial P_0}{\partial a_1} + 2a_2\frac{\partial P_0}{\partial a_2} + 2a_3\frac{\partial P_0}{\partial a_3},$$

ou retenant les symboles plus commodes A_{11}, A_{22}, A_{33},

$$3P_0 = a_1 A_{11} + a_2 A_{22} + a_3 A_{33}.$$

10. De cette formule et de la formule générale relative à P (n°. 8) on peut tout de suite établir une relation très simple entre les volumes de la podaire centrale et celui de toute autre dont l'origine se trouve sur l'une des diagonales du parallélepipède rectangulaire circonscrit à l'ellipsoïde primitif. Car les coordonnées d'un point quelconque sur une pareille diagonale se trouvent données par les équations

$$\frac{x^2}{a_1} = \frac{y^2}{a_2} = \frac{z^2}{a_3} = \frac{r^2}{a},$$

où r est le rayon vecteur du point en question et $a = a_1 + a_2 + a_3$ le carré

*) La valeur de P_0 exprimée en intégrales elliptiques fut obtenue pour la première fois par *Tortolini* en 1844. L'expression équivalente à laquelle nous allons arriver possède, du reste, tous les avantages de symétrie que fait nécessairement perdre l'introduction des intégrales elliptiques.

de la demi-diagonale dont il s'agit. En substituant ces valeurs les deux formules relatives à P et à P_0 donnent:

$$P = \frac{a+3r^2}{a} P_0.$$

Quand $r^2 = a$, l'origine de (P) coïncide avec un des sommets du parallélepipède et, lorsque $3r^2 = a$, le point de la diagonale se trouve sur l'ellipsoïde, de sorte que l'on peut dire: *le volume de la podaire dont l'origine se trouve à un quelconque des sommets du parallélepipède rectangulaire circonscrit à l'ellipsoïde primitif est quatre fois celui de la podaire centrale et le double de celui de la podaire à l'un quelconque des huit points où l'ellipsoïde se trouve percée par les diagonales du parallélepipède.*

11. Afin d'établir d'autres relations nous représenterons généralement par x_i, y_i, z_i, et r_i les coordonnées et le rayon vecteur d'un point quelconque (i) dans l'espace et nous considérerons, d'abord, les podaires (P_1), (P_2), (P_3) prises par rapport aux extrémités (1), (2), (3) de trois diamètres conjugués quelconques d'une surface (S') de second ordre concentrique à (S) et semblablement placée. Les demi-axes carrés de (S') étant a_1^1, a_2^1, a_3^1 on sait que

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= a_1^1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= a_2^1, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= a_3^1; \end{aligned}$$

de sorte qu'en substituant successivement dans la formule générale de P (n°. 8) les coordonnées des trois points que nous considérons et en ajoutant ensemble les équations résultantes nous aurons

$$P_1 + P_2 + P_3 = 3P_0 + A_{11}a_1^1 + A_{22}a_2^1 + A_{33}a_3^1 = 3\overline{P}.$$

La podaire $(\overline{P})$ dont le volume est mis ici égal à la somme *constante* des trois autres volumes est, comme on le voit tout de suite, d'après la même formule générale relative à P, celle dont l'origine se trouve au point $\left(\sqrt{\frac{a_1^1}{3}}, \sqrt{\frac{a_2^1}{3}}, \sqrt{\frac{a_3^1}{3}}\right)$ où la surface (S') est percée par la diagonale de son parallélepipède circonscrit. Puis si l'on convient de prendre le volume d'une podaire positivement ou négativement selon que le diamètre, sur lequel se trouve son origine, rencontre la surface (S') en des points réels ou en des points imaginaires, on pourra dire que *la somme algébrique des volumes de trois podaires de l'ellipsoïde dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques d'une surface* (S') *de second ordre con-*

centrique à l'ellipsoïde et semblablement placée, est constante et égale à trois fois le volume de la podaire au point où cette surface (S') *est rencontrée par une des diagonales de son parallélepipède rectangulaire circonscrit.*

On peut aussi ajouter que cette somme des volumes des trois podaires correspondantes aux extrémités de trois diamètres conjugués est non seulement invariable pour une même surface (S'), mais pour toutes les surfaces de second ordre concentriques et semblablement placées qui sont inscrites dans des parallélepipèdes rectangulaires inscrits eux-mêmes dans une des surfaces (A) lieu des origines de podaires de même volume. Car les axes de toutes les surfaces pareilles (S') satisfont évidemment à la condition

$$A_{11}a_1^1+A_{22}a_2^1+A_{33}a_3^1 = \text{const.}$$

12. Quand la surface (S') est non seulement concentrique à l'ellipsoïde primitif et semblablement placée, mais lui est encore semblable, les diagonales de leurs parallélepipèdes rectangulaires circonscrits coïncident en direction; de sorte que conformément au n°. 10 et posant

$$3r^2 = a_1^1+a_2^1+a_3^1 = a^1$$

la relation du n°. 11 devient

$$P_1+P_2+P_3 = 3\overline{P} = 3\frac{a+a^1}{a}P_0.$$

Quand $a^1 = a$, c'est-à-dire quand la surface (S') coïncide avec l'ellipsoïde primitif, on voit que *la somme des volumes de trois podaires dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde primitif, est constante et égale à six fois le volume de la podaire centrale.*

Les trois podaires dont les origines se trouvent aux extrémités des axes de l'ellipsoïde primitif, sont comprises dans ce théorème, comme cas particulier.

13. Quand la surface (S') est une sphère, les diamètres conjugués sont à angles droits les uns par rapport aux autres et les diagonales du parallélepipède (cube) circonscrit sont également inclinées vers les axes de l'ellipsoïde, d'où il suit que *la somme des volumes des podaires de l'ellipsoïde dont les origines sont les trois sommets d'un triangle tri-rectangulaire quelconque sur une sphère concentrique, est constante et égale à trois fois le volume de la podaire dont l'origine sur la sphère est également éloignée des axes de l'ellipsoïde.* La valeur de cette somme constante est:

$$3P_0+r^2(A_{11}+A_{22}+A_{33}).$$

14. En dernier lieu quand la surface (S') est un ellipsoïde confocal à la surface primitive on peut mettre:

$$a_1^1 - a_1 = a_2^1 - a_2 = a_3^1 - a_3 = k^2,$$

et substituer les valeurs de a_1^1, a_2^1, a_3^1 dans la dernière équation du n°. 11. De cette manière on trouve

$$P_1 + P_2 + P_3 = 6P_0 + k^2(A_{11} + A_{22} + A_{33}).$$

En comparant cette expression avec celle qui se trouve à la fin du n°. 13 on conclut que *la somme des volumes des trois podaires dont les origines sont aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde confocal à la surface primitive, est égale au double de la somme des volumes des trois podaires prises par rapport aux extrémités de trois diamètres orthogonaux quelconques d'une sphère concentrique, dont le rayon carré est la moitié de la différence des carrés des demi-axes des surfaces confocales.* Ce théorème général comprend comme cas particulier $(k = 0)$ celui déjà donné au n°. 12.

15. De la formule fondamentale ainsi écrite

$$H = \frac{P - P_0}{r^2} = A_{11}\cos^2\lambda + A_{22}\cos^2\mu + A_{33}\cos^2\nu.$$

On peut en outre déduire d'autres théorèmes et, de plus, une construction pour le volume de la podaire par rapport à un point quelconque. En premier lieu nous voyons que la grandeur linéaire H est constante pour tous les points d'une même droite qui passe par le centre de l'ellipsoïde; et, en second lieu, que H est la limite vers laquelle $\frac{P}{r^2} = h$ s'approche à mesure que l'origine de la podaire s'écarte du centre. Cette quantité linéaire h étant la hauteur d'un parallélepipède de même volume que la podaire et qui a pour base le carré construit sur le rayon vecteur, nous nous proposons, pour faciliter l'énonciation, de lui donner le nom *d'élévation podaire* au point que nous considérons. Ainsi H sera l'élévation podaire à l'infini sur la droite (λ, μ, ν); A_{11}, A_{22}, A_{33} respectivement les élévations podaires à l'infini sur les trois axes et $A_{11} + A_{22} + A_{33}$ celle sur la droite également inclinée vers les trois axes de l'ellipsoïde.

Concevez maintenant une podaire centrale $(\dot{P}_0)$ d'un ellipsoïde $(\dot{S})$ concentrique à l'ellipsoïde primitif (S) semblablement placée et telle que ses demi-axes carrés soient respectivement proportionnels aux élvéations A_{11}, A_{22}, A_{33}.

Il est clair, d'après la dernière équation, que les carrés construits sur les rayons vecteurs de $(\dot{P}_0)$ seront proportionnels aux *élévations podaires* à l'infini sur ces rayons. L'élévation podaire à l'infini étant ainsi déterminée par la podaire auxiliaire $(\dot{P}_0)$. On construira d'abord le parallélepipède égal en volume à l'excès $P-P_0$ du volume de la podaire (P) sur celui de la podaire (P_0); cela fait, la construction de P n'offre plus de difficulté, pourvu que P_0 soit donné.

16. Entre les élévations podaires aux divers points de l'espace on pourrait établir de nombreux rapports; nous ne nous arrêterons qu'à un ou deux. Indiquons par (1), (2), (3) les extrémités de trois diamètres quelconques, à angles droits l'un par rapport à l'autre, de la surface (S') considérée plus haut au n°. 11. L'addition des trois formules semblables à celles du n°. 15, qui se rapportent à ces extrémités, donne:

$$h_1+h_2+h_3=P_0\left(\frac{1}{a_1'}+\frac{1}{a_2'}+\frac{1}{a_3'}\right)+A_{11}+A_{22}+A_{33}=3\bar{h},$$

puisque, d'après un théorème bien connu,

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a_1'}+\frac{1}{a_2'}+\frac{1}{a_3'}.$$

L'élévation podaire $\bar{h}$ que l'on a posée égale à la moyenne arithmétique des trois autres, correspond au point sur la surface (S') qui est également éloignée de ses trois axes, comme on peut aisément s'en convaincre en posant dans la formule du n°. 15

$$\cos^2\lambda=\cos^2\mu=\cos^2\nu=\tfrac{1}{3},$$

et en observant que pour un tel point

$$\frac{3}{r^2}=\frac{1}{a_1'}+\frac{1}{a_2'}+\frac{1}{a_3'}.$$

Delà résulte que *la somme algébrique des trois élévations podaires aux extrémités de trois diamètres orthogonaux quelconques d'une surface (S') de second ordre concentrique à l'ellipsoïde et semblablement placée est constante et égale à trois fois l'élévation podaire à l'extrémité d'un diamètre de cette surface (S') également inclinée sur ses axes.*

On peut aussi ajouter que *cette somme n'est pas seulement invariable pour une seule et même surface (S'), mais encore pour toutes les surfaces concentriques et semblablement placées qui passent par un même point également éloigné des axes de l'ellipsoïde primitif.*

Quand la surface (S') est une sphère, les élévations podaires à ses divers points sont évidemment proportionelles aux volumes des podaires ayant ces points pour origines; de sorte que l'on obtient de nouveau le théorème du n°. 13.

17. Avant de passer au calcul du volume d'une podaire quelconque de l'ellipsoïde nous pouvons remarquer, en dernier lieu, que pour quatre origines quelconques, situées sur une surface (S') concentrique à l'ellipsoïde et semblablement placées, les volumes des podaires correspondantes satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} P_1, & x_1^2, & y_1^2, & z_1^2 \\ P_2, & x_2^2, & y_2^2, & z_2^2 \\ P_3, & x_3^2, & y_3^2, & z_3^2 \\ P_4, & x_4^2, & y_4^2, & z_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dont nous ne nous proposons pas, cependant, d'étudier en détail la signification géométrique.

18. Nous allons maintenant faire voir comment le volume P d'une podaire quelconque de l'ellipsoïde peut s'exprimer au moyen des différences partielles de l'intégrale définie

$$V = \int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(v+a_1)(v+a_2)(v+a_3)}}.$$

On sait bien que quand les coordonnées x, y, z, d'un point quelconque d'une surface donnée sont regardées comme fonctions de deux variables indépendantes φ et v, on a les expressions équivalentes suivantes pour trois fois le volume du tétraèdre dont le sommet se trouve à l'origine des coordonnées et la base est l'élément de surface ds enfermé entre les courbes $\varphi = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ et celles qui leur sont respectivement consécutives

$$p_0 ds = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi}, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dv\, d\varphi.$$

19. Maintenant l'équation de l'ellipsoïde primitif sera évidemment satisfaite identiquement par les valeurs

$$x^2 = a_1 \frac{v}{v+a_3} \cos^2\varphi,$$

$$y^2 = a_2 \frac{v}{v+a_3} \sin^2\varphi,$$

$$z^2 = a_3 \frac{a_3}{v+a_3},$$

qui, lorsqu'elles seront substituées dans le déterminant ci-dessus et dans l'expression pour p_0 donnée au n°. 9, conduisent tout de suite aux expressions

$$p_0 ds = -\frac{a_3\sqrt{a_1 a_2}}{2} \cdot \frac{dv\,d\varphi}{(v+a_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{1}{p_0^2} = \left\{ \frac{v+a_1}{a_1} \cos^2\varphi + \frac{v+a_2}{a_2} \sin^2\varphi \right\} \frac{1}{v+a_3}.$$

En substituant ces valeurs dans la seconde expression de P_0 du n°. 9, en étendant l'intégration à tous les points de l'octante ellipsoïdale et en prenant huit fois le résultat nous trouvons

$$3P_0 = -\frac{4}{\sqrt{a_1 a_2}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(v+a_3)^{\frac{3}{2}}\,dv\,d\varphi}{\left\{ \frac{v+a_1}{a_1} \cos^2\varphi + \frac{v+a_2}{a_2} \sin^2\varphi \right\}^3};$$

par différentiation on en déduit

$$A_{33} = 2\frac{\partial P_0}{\partial a_3} = -\frac{4}{\sqrt{a_1 a_2}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(v+a_3)^{\frac{1}{2}}\,dv\,d\varphi}{\left\{ \frac{v+a_1}{a_1} \cos^2\varphi + \frac{v+a_2}{a_2} \sin^2\varphi \right\}^3}.$$

L'intégration par rapport à φ ne présente pas de difficulté et elle donne, une fois effectuée, le résultat

$$A_{33} = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \left\{ \frac{3a_1^2}{(v+a_1)^2} + \frac{2a_1 a_2}{(v+a_1)(v+a_2)} + \frac{3a_2^2}{(v+a_2)^2} \right\} \frac{(v+a_3)\,dv}{\sqrt{R}},$$

où nous avons mis, pour abréger,

$$R = (v+a_1)(v+a_2)(v+a_3).$$

20. On peut donner une forme plus commode à l'expression précédente de A_{33} en introduisant les différences partielles des deux intégrales définies symétriques

$$V = \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{R}}, \qquad W = \int_0^\infty \frac{v\,dv}{\sqrt{R}}.$$

En effet si, pour abréger, nous indiquons les résultats des opérations $\frac{\partial}{\partial a_1}$, $\frac{\partial}{\partial a_2}$, ... $\frac{\partial^2}{\partial a_1^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2}$ ... exécutées sur une quantité quelconque, en ajoutant au symbole

de cette quantité les indices 1, 2, . . . 11, 12 . . ., respectivement, nous aurons

$$\frac{1}{\pi} A_{33} = a_3(a_1^2 V_{11} + 2a_1 a_2 V_{12} + a_2^2 V_{22}) + a_1^2 W_{11} + 2a_1 a_2 W_{12} + a_2^2 W_{22},$$

ce qui est aisément vérifié.

21. Toutefois on peut réduire cette expression à une autre plus simple, contenant V_1, V_2, V_3 seulement. Pour effectuer cette réduction, j'observe qu'au moyen de l'identité

$$\frac{dR}{dv} = R_1 + R_2 + R_3,$$

on a:

$$W_1 + W_2 + W_3 = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (R_1 + R_2 + R_3)\frac{v\,dv}{\sqrt{R^3}} = \int_0^\infty v d\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

d'où, par une intégration partielle, on déduit

$$W_1 + W_2 + W_3 = -V,$$

puisque $\frac{v}{\sqrt{R}}$ s'évanouit évidemment aux deux limites. De cette expression on obtient encore, par différentiation, les relations

$$W_{11} + W_{12} + W_{13} = -V_1,$$
$$W_{12} + W_{22} + W_{23} = -V_2,$$
$$W_{13} + W_{23} + W_{33} = -V_3.$$

En traitant de même l'intégrale V_1, on trouve

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= -\frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 a_3}}, \\ &= -2a_1(V_{11} + V_{12} + V_{13}), \\ &= -2a_2(V_{12} + V_{22} + V_{23}), \\ &= -2a_3(V_{13} + V_{23} + V_{33}). \end{aligned}$$

De plus, en comparant les valeurs

$$V_1 = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{v + a_1}\frac{dv}{\sqrt{R}}, \quad \text{etc.}$$

$$V_{12} = \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{(v + a_1)(v + a_2)}\frac{dv}{\sqrt{R}}, \quad \text{etc.}$$

après avoir décomposé en fractions simples les coefficients de $\frac{dv}{\sqrt{R}}$ en V_{12}, V_{23}, V_{31}, on obtient

$$2(a_1-a_2)V_{12} = V_1-V_2,$$
$$2(a_2-a_3)V_{23} = V_2-V_3,$$
$$2(a_3-a_1)V_{31} = V_3-V_1;$$

et de la même manière on trouve

$$2(a_1-a_2)W_{12} = a_2V_2-a_1V_1,$$
$$2(a_2-a_3)W_{23} = a_3V_3-a_2V_2,$$
$$2(a_3-a_1)W_{31} = a_1V_1-a_3V_3.$$

22. Maintenant les quatre derniers groupes d'équations suffisent évidemment pour exprimer A_{33} (n°. 20) au moyen de V_1, V_2, V_3, et pour obtenir de là par simple permutation des indices les valeurs de A_{11}, A_{22}. En y faisant les simplifications convenables les résultats peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$A_{11} = -\frac{\pi}{2}[(a_2+a_3)a_1V_1+(a_3+2a_1)a_2V_2+(2a_1+a_2)a_3V_3],$$

$$A_{22} = -\frac{\pi}{2}[(2a_2+a_3)a_1V_1+(a_3+a_1)a_2V_2+(a_1+2a_2)a_3V_3],$$

$$A_{33} = -\frac{\pi}{2}[(a_2+2a_3)a_1V_1+(2a_3+a_1)a_2V_2+(a_1+a_2)a_3V_3].$$

De ces valeurs des élévations podaires à l'infini sur chacun des axes (n°. 15) on obtient par addition la valeur suivante de l'élévation podaire à l'infini sur une droite également inclinée sur ces axes:

$$(A_{11}+A_{22}+A_{33}) = -2\pi[(a_2+a_3)a_1V_1+(a_3+a_1)a_2V_2+(a_1+a_2)a_3V_3].$$

Puis, de la relation donnée à la fin du n°. 9, on déduit l'expression suivante du volume de la podaire centrale de l'ellipsoïde:

$$P_0 = -\frac{\pi}{2}[m_1a_1V_1+m_2a_2V_2+m_3a_3V_3],$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$3m_1 = (a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3)+a_2^2+a_3^2,$$
$$3m_2 = (a_1+a_2+a_3)(a_3+a_1)+a_3^2+a_1^2,$$
$$3m_3 = (a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2)+a_1^2+a_2^2.$$

En dernier lieu pour le volume d'une podaire quelconque (P) dont l'origine A est au point (x, y, z) on trouve la valeur

$$P = -\frac{\pi}{2}[M_1a_1V_1+M_2a_2V_2+M_3a_3V_3],$$

où, posant pour abréger $r^2=x^2+y^2+z^2$ et $a=a_1+a_2+a_3$ les quantités M_1, M_2, M_3 sont données par les équations:

$$3M_1 = (a_2+a_3)(3r^2+a)+3(a_2y^2+a_3z^2)+a_2^2+a_3^2,$$
$$3M_2 = (a_3+a_1)(3r^2+a)+3(a_3z^2+a_1x^2)+a_3^2+a_1^2,$$
$$3M_3 = (a_1+a_2)(3r^2+a)+3(a_1x^2+a_2y^2)+a_1^2+a_2^2.$$

Le volume de l'ellipsoïde primitif exprimé en V_1, V_2, V_3 est

$$S = -\tfrac{4}{3}\pi[a_2a_3.a_1V_1+a_3a_1.a_2V_2+a_1a_2.a_3V_3],$$

comme cela résulte évidemment de l'une des relations du n°. 21. L'intégrale V elle-même ainsi exprimée a la valeur

$$V = -2[a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3],$$

parceque V est une fonction homogène de a_1, a_2, a_3 du degré $-\frac{1}{2}$.

Nous supprimons plusieurs expressions intéressantes de V et de S au moyen des volumes de certaines podaires, pour passer immédiatement à l'introduction des intégrales elliptiques dans les résultats précédents.

23. L'intégrale V, au moyen des différences partielles de laquelle on a exprimé les volumes de toutes les podaires, est convertie en une intégrale elliptique de la première espèce par la substitution

$$\sin^2\varphi = \frac{a_1-a_2}{v+a_1};$$

en même temps les limites de φ, auxquelles correspondent les limites ∞ et 0 de v, seront évidemment 0 et θ pourvu que

$$\theta = \text{arc. cos}\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \text{arc. sin}\sqrt{\frac{a_1-a_3}{a_1}}.$$

Cela posé, on trouve facilement comme résultat de cette substitution l'expression

$$V = \frac{2}{\sqrt{a_1-a_3}}\int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2\frac{F(\theta,k)}{\sqrt{a_1-a_3}},$$

où

$$k^2 = \frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}$$

est évidemment positif et moindre que l'unité.

Représentant aussi, avec *Legendre*, par E l'intégrale elliptique de la seconde espèce de sorte que

$$E(\theta,k) = \int_0^\theta d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

la différentiation de la valeur précédente de V nous donne

$$V_1 = \frac{1}{a_1-a_3}\frac{E}{\sqrt{a_1-a_3}} - \frac{1}{a_1-a_2}\frac{F}{\sqrt{a_1-a_3}},$$

$$V_2 = \frac{a_3}{a_2-a_3}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2a_3}} - \frac{a_1-a_3}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}\frac{E}{\sqrt{a_1-a_3}} + \frac{1}{a_1-a_2}\frac{F}{\sqrt{a_1-a_3}},$$

$$V_3 = -\frac{a_2}{a_2-a_3}\frac{1}{\sqrt{a_1a_2a_3}} + \frac{1}{a_2-a_3}\frac{E}{\sqrt{a_1-a_3}},$$

valeurs qui, substituées dans les formules du n°. 22, donnent celles de A_{11}, A_{22}, A_{33}, P_0, P exprimées en intégrales elliptiques. Pour le volume de la podaire centrale (P_0) par exemple, d'où l'on peut déduire, par différentiation partielle, celui de toute autre podaire (P), nous trouvons l'expression:

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\left\{(2a-a_1)\sqrt{\frac{a_2a_3}{a_1}} + (aa_3+a_3^2-a_1a_2)\frac{F}{\sqrt{a_1-a_3}} + 2(a_1-a_3)a\frac{E}{\sqrt{a_1-a_3}}\right\},$$

où nous avons mis, pour abréger, comme ci-dessus, $a = a_1+a_2+a_3$.

Cette expression s'accorde parfaitement avec celle trouvée pour la première fois en 1844 par M. *Tortolini* *).

24. En faisant diminuer indéfiniment a_3, l'amplitude θ se rapproche de la limite $\frac{\pi}{2}$ et le module k acquiert la valeur

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1-a_2}}{a_1}$$

Les intégrales elliptiques E et F deviennent alors des intégrales complètes, c'est-à-dire $E\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right)$, $F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right)$ ou plus simplement E_1 et F_1.

Si l'on représente par $[U]$ la limite vers laquelle converge une grandeur quelconque U, quand a_3 diminue indéfiniment, on déduit des expressions du n°. précédent les valeurs particulières:

$$[V_1] = \frac{1}{a_1-a_2}\frac{E_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{1}{a_1-a_2}\frac{F_1}{\sqrt{a_1}},$$

$$[V_2] = -\frac{a_1}{a_2}\frac{1}{a_1-a_2}\frac{E_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{a_1-a_2}\frac{F_1}{\sqrt{a_1}},$$

$$[V_3] = \infty, \quad [V_3\sqrt{a_3}] = -\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}, \quad [a_3V_3] = 0,$$

$$[P_0] = \frac{\pi\sqrt{a_1}}{6}\{2(a_1+a_2)E_1 - a_2F_1\}.$$

Cette dernière est l'expression du volume de la ***surface podaire d'une ellipse***

*) ce Journal t. 31, pag. 28.

par rapport à son centre (n°. **7**); à l'aide des formules du n°. **22** on trouve que celui d'une podaire quelconque de cette courbe est donnée par la formule

$$[P] = [P_0] + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{a_1}}{a_1 - a_2}\{[(2a_1 - a_2)E_1 - a_2F_1]x^2 + [(a_1 - 2a_2)E_1 + a_2F_1]y^2 + (a_1 - a_2)E_1 z^2\}.$$

La surface podaire, dont le volume se trouve ainsi exprimé, sera évidemment engendrée par une circonférence qui se meut de manière à passer constamment par le point (x, y, z), par sa projection (ξ, η, ζ) sur le plan de l'ellipse (a_1, a_2), et par la courbe podaire de cette ellipse prise par rapport au point (ξ, η, ζ).

25. Nous donnons, en dernier lieu, les modifications des formules précédentes qui correspondent aux cas particuliers des ellipsoïdes de rotation.

Pour le sphéroïde allongé, $a_2 = a_3$, nous trouvons

$$V = \frac{2}{\sqrt{a_1 - a_3}} \log\left[\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}\right],$$

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\left\{(2a_1 + 3a_3)\sqrt{a_1} + \frac{3a_3^2}{\sqrt{a_1 - a_3}} \log\left[\sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}\right]\right\},$$

$$P = P_0 + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_1}x^2 + \frac{\partial P_0}{\partial a_3}(y^2 + z^2).$$

Pour $x^2 = a_1 - a_3$, $y = z = 0$, le volume de la podaire par rapport à un foyer devient

$$P = P_0 + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_1}(a_1 - a_3) = \tfrac{4}{3}\pi a_1\sqrt{a_1},$$

c'est-à-dire égal au volume de la sphère construite sur l'axe majeur de l'ellipse génératrice, résultat qui est exact.

Pour le sphéroïde aplati, $a_1 = a_2$, nous avons

$$V = \frac{2}{\sqrt{a_1 - a_3}} \arccos\sqrt{\frac{a_3}{a_1}},$$

$$P_0 = \frac{\pi}{6}\left[(3a_1 + 2a_3)\sqrt{a_3} + \frac{3a_1^2}{\sqrt{a_1 - a_3}} \arccos\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\right],$$

$$P = P_0 + \frac{\partial P_0}{\partial a_1}(x^2 + y^2) + 2\frac{\partial P_0}{\partial a_3}z^2.$$

La dernière formule se réduit, pour $a_3 = 0$, à

$$[P] = \frac{\pi^2}{8}a(3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2a^2).$$

Ainsi se trouve exprimé le volume de la surface podaire d'un cercle de rayon a, prise par rapport à un point (x, y, z) quelconque de l'espace.

Londres, Septembre 1862.

Note additionelle.

Lorsque j'avais envoyé à la rédaction du Journal de mathématiques le travail qu'on vient de lire, M. *Borchardt* a eu l'obligeance d'appeler mon attention sur deux mémoires antérieurs de l'existence desquels je n'avais pas eu connaissance, et qui traitent aussi les volumes des surfaces podaires.

Le premier de ces mémoires a paru dans les *Archives de Mathématiques et de Physique*, de M. *Grunert*, t. 32, 1860, sous le titre de „Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides". L'auteur, M. *Magener* de Posen, y exprime le volume d'une surface podaire quelconque d'un ellipsoïde primitif, au moyen d'intégrales elliptiques de la première et de la seconde espèce. Il ne donne pas, il est vrai, d'une manière explicite, la relation fondamentale du n°. 9, au moyen de laquelle le volume P d'une podaire quelconque se déduit immédiatement du volume P_0 de la podaire centrale (déjà calculé par *Tortolini*) et des dérivées partielles de P_0 par rapport aux axes. Toutefois, il arrive à une expression symétrique fort intéressante de P en fonction des dérivées partielles de l'intégrale double

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi}{\left\{ \frac{\cos^2\vartheta}{a_1} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{a_2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{a_3} \right\}^2},$$

à laquelle *Jacobi*, dans le vol. X. de ce journal, a réduit la quadrature de la surface de l'ellipsoïde à axes réciproques de l'ellipsoïde primitif. — Grâce à cette expression de P, M. *Magener* a également été conduit à la découverte de la série des ellipsoïdes, lieux des origines des podaires de même volume.

Le second de ces mémoires, qui a un caractère plus général, ne paraît pas avoir été porté à la connaissance du public. Il a été publié à *Berlin* en 1859, sous forme de Thèse inaugurale et porte pour titre: „*De superficierum pedalium theorematibus quibusdam*". L'auteur, M. *Fischer* de Berlin, y traite d'abord de quelques unes des propriétés générales des surfaces podaires. Il examine ensuite les volumes des surfaces podaires et établit d'une manière parfaitement générale les deux théorèmes fondamentaux énoncés dans le n°. 3.

Londres, 27. avril 1863.

Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.

(Von Herrn *H. Schröter* zu Breslau.)

Unter den verschiedenen Erzeugungsarten der Flächen dritten Grades, welche *Steiner* *) angegeben und aus denen er eine Reihe der wesentlichsten Eigenschaften dieser Flächen hergeleitet hat, ist *eine* nicht angeführt, welche als ursprünglicher gelten kann und für manche Untersuchungen vortheilhafter ist; diese, wie es scheint, zuerst von *Grassmann* **) ausgesprochene Erzeugungsart lautet dort:

Der Durchschnitt dreier einander projektivischen Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine Oberfläche dritter Ordnung.

Der Nachweis, dass die auf diese Art durch Punkte in linearer Weise construirte Fläche jene 27 Geraden enthält, welche auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung liegen, bietet sich bei dieser Erzeugungsart nicht so unmittelbar dar, wie bei den anderen, weil in letzteren meist schon eine Gerade als der Oberfläche angehörig in die Definition eingeht; zugleich führt die Auffindung der 27 Geraden hier direkt auf jenes anschauliche Arrangement dieser Linien, auf welches *Schläffli* ***) zuerst aufmerksam gemacht hat und endlich sind die Erzeugungsarten von *Steiner* wie auch die von *F. August* ****) angegebene in der obigen enthalten. Die Auffindung der 27 Geraden auf der Oberfläche dritter Ordnung, als Erzeugniss dreier collinearen Ebenenbündel aufgefasst, ist der Gegenstand dieses Aufsatzes und dürfte aus den angegebenen Gründen nicht ohne Interesse sein, obschon die Frage von anderen Gesichtspunkten aus sowohl durch rein geometrische Betrachtungen als auch durch die analytischen Untersuchungen von *Cayley, Salmon* und *Clebsch* als erledigt angesehen werden darf. Aus der obigen Definition ergiebt sich auch eine

*) Dieses Journal Bd. 53, Seite 133.

**) Dieses Journal Bd. 49, Seite 64.

***) The quarterly Journal vol. II, pag. 116.

****) Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis. Inaug. Diss. 1862.

lineare Construction der Oberfläche dritter Ordnung durch 19 im Raume beliebig gegebene Punkte, auf welche ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

---

1. Alle durch einen Punkt gehenden Ebenen sollen ein *Ebenenbündel* heissen zur Unterscheidung von *Ebenenbüschel*, welches nur die durch eine Gerade gehenden Ebenen enthält. Die Ebenen zweier Ebenenbündel können eindeutig auf einander bezogen werden, so dass jeder Ebene des einen Bündels eine einzige bestimmte des anderen entspricht und umgekehrt. Diese bekannte Beziehung (Collinearität) ist die Ausdehnung der projectivischen Beziehung auf Gebilde von doppelt unendlicher Mächtigkeit und kann nach *Seidewitz**) folgendermaassen hergestellt werden: Sei M der Mittelpunkt des einen, M' der des anderen Bündels, seien durch M zwei beliebige Ebenen a, b angenommen und durch M' zwei beliebige Ebenen a', b', ferner in der Ebene a ein gewöhnliches Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt M, in der Ebene a' aber ein mit diesem projectivisches Strahlbüschel um den Mittelpunkt M', in gleicher Weise in b ein beliebiges Strahlbüschel um M und in b' ein projectivisches Strahlbüschel um M'; endlich sei noch bei dieser zwiefachen sonst willkürlich festgestellten projectivischen Beziehung die eine Bedingung erfüllt, dass der als Schnittlinie der Ebenen a, b in beiden Strahlbüscheln auftretende Strahl zu seinem entsprechenden für beide Beziehungen denselben als Schnittlinie von $a'b'$ auftretenden Strahl habe; alsdann ist die collineare Beziehung der beiden Ebenenbündel M und M' vollständig bestimmt, denn irgend eine durch M gelegte Ebene x schneidet die Ebenen a und b längs zwei Strahlen, deren entsprechende in den Ebenen $a'b'$ die entsprechende Ebene x' bestimmen.

Es ergiebt sich hieraus unmittelbar, dass irgend vier als entsprechend willkürlich festgesetzte Paare von Ebenen (von denen sich nicht je drei in derselben Geraden schneiden) zur Bestimmung der collinearen Beziehung beider Bündel ausreichen und erforderlich sind, dass aus ihnen zu jeder fünften Ebene des einen Bündels die entsprechende des anderen auf lineare Weise zu construiren ist, dass, wenn die Ebene x ein gewöhnliches Ebenenbüschel beschreibt, die entsprechende x' ein projectivisches Ebenenbüschel beschreibt

---

*) *F. Seidewitz,* Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projectivischer Gebilde, *Grunerts* Archiv für Math. u. Phys. Bd. VII, Seite 113 und Bd. VIII, Seite 1 ff.

u. s. f., wie dies denn aus der collinearen Beziehung überhaupt hinlänglich bekannt ist *). Gleichzeitig stecken in den beiden collinearen Ebenenbündeln zwei collineare Strahlenbündel (Raumbüschel), denn jedem durch M gehenden Strahle, als Schnittlinie zweier beliebigen Ebenen aufgefasst, entspricht ein bestimmter durch M' gehender Strahl des anderen Bündels, die Schnittlinie der beiden jenen entsprechenden Ebenen, und es treten also bei dieser collinearen Beziehung die beiden Gebilde eines Strahlenbündels und Ebenenbündels gleichzeitig auf. Fügt man ihnen noch die nach dem Prinzip der Polarität zugehörigen beiden Gebilde doppelter Unendlichkeit hinzu: Die Ebene erfüllt einerseits mit Punkten, andererseits mit Geraden, und überträgt auch auf sie das oben angedeutete Prinzip der eindeutigen Beziehung der Elemente verschiedener Gebilde auf einander, so hat man die Grundelemente für die Untersuchung räumlicher Gestalten von grosser Mannigfaltigkeit und eine reiche Quelle zur Auffindung geometrischer Wahrheiten, welche zuerst aufgedeckt zu haben *Steiners* Verdienst ist. Wir beschränken uns hier auf die Oberfläche dritter Ordnung.

2. *Drei beliebig im Raume liegende collineare Ebenenbündel erzeugen eine allgemeine Oberfläche dritter Ordnung*, d. h. der Ort des Schnittpunktes dreier entsprechenden Ebenen der drei Bündel ist diese Oberfläche dritter Ordnung; sie geht, wie ersichtlich ist, selbst durch die Mittelpunkte der Bündel hindurch. Um den Grad der Oberfläche zu ermitteln, wollen wir die Durchschnittscurve des eben definirten Ortes mit einer beliebigen Transversalebene aufsuchen und zeigen, dass dies eine allgemeine Curve dritten Grades ist. Enthält nämlich die Transversalebene E einen Punkt des Ortes, so müssen drei entsprechende Ebenen der drei collinearen Bündel die Ebene E längs dreier Geraden schneiden, welche in diesen Punkt zusammenlaufen. Ziehen wir nun durch den Mittelpunkt M_1 des ersten Bündels einen beliebigen Strahl s_1, so entspricht demselben ein bestimmter Strahl s_2 des zweiten Bündels M_2 und ein bestimmter Strahl s_3 des dritten Bündels M_3; mögen s_1 s_2 s_3 der Ebene E in p_1 p_2 p_3 begegnen. Drehen wir um s_1 eine Ebene, so drehen sich die entsprechenden Ebenen in den beiden anderen Bündeln um s_2 und s_3 und beschreiben mit dem ersteren projectivische Ebenenbüschel, ihre Durchschnitte also projectivische Strahlbüschel; die beiden Strahlbüschel um p_1 und p_2 haben

*) Vergl. *Möbius* barycentrischer Kalkul Seite 301 ff. und *Magnus* Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie II^{ter} Theil Seite 31 ff.

als Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt K und die Strahlbüschel um p_1 und p_3 erzeugen in gleicher Weise einen Kegelschnitt K'; diese beiden Kegelschnitte K und K', welche den Punkt p_1 gemein haben, schneiden sich ausserdem im Allgemeinen noch in drei Punkten, die der Construction zufolge die Eigenschaft besitzen müssen, dass durch jeden derselben drei entsprechende Ebenen der drei collinearen Bündel gehen; es sind also Punkte des gesuchten Ortes, die in der Ebene E liegen. Von jedem der beiden Kegelschnitte K und K' lassen sich ausserdem drei Punkte angeben, die von Wichtigkeit sind; die beiden collinearen Bündel M_1 und M_2 als Strahlenbündel aufgefasst treffen nämlich die doppelt gedachte Transversalebene E in zwei auf einander liegenden collinearen Punktgebilden, die im Allgemeinen drei Doppelpunkte $P\ Q\ R$ besitzen d. h. drei solche Punkte, in deren jedem zwei entsprechende Punkte der beiden collinearen Ebenen vereinigt sind *). Es ist klar, dass der Kegelschnitt K durch die Punkte P, Q, R hindurchgehen muss, weil $(M_1 p_1 P)$ und $(M_2 p_2 P)$ entsprechende Ebenen sind u. s. f. Ebenso treffen die collinearen Bündel M_1 und M_3 die doppelt gedachte Ebene E in zwei collinearen auf einander liegenden ebenen Punktgebilden, welche drei Doppelpunkte $P' Q' R'$ besitzen, und der Kegelschnitt K' muss durch dieselben hindurchgehen. Denken wir uns jetzt den Strahl s_1 in einer beliebigen aber festen durch M_1 gehenden Ebene E_1 um den Mittelpunkt M_1 gedreht, dann wird der Strahl s_2 sich in der entsprechenden durch M_2 gehenden Ebene E_2 um M_2 drehen, und ebenso s_3 in der entsprechenden Ebene E_3 um M_3 herumbewegen, und alle drei werden projectivische Strahlbüschel beschreiben; werde die Transversalebene E von den drei entsprechenden Ebenen $E_1\ E_2\ E_3$ längs dreier Geraden $l_1\ l_2\ l_3$ geschnitten, dann geht offenbar der Kegelschnitt K durch den Schnittpunkt S von l_1 und l_2 und ebenso K' durch den Schnittpunkt S' von l_1 und l_3. Mit dem Strahle s_1 verändern sich nun auch gleichzeitig die beiden Kegelschnitte K und K', aber der erstere läuft beständig durch die vier unveränderlichen Punkte $P\ Q\ R\ S$ und der letztere durch $P'\ Q'\ R'\ S'$; wir erhalten also zwei Kegelschnittbüschel von je vier Punkten und es müssen dieselben projectivisch sein, weil die Verbindungslinie SS' (oder l_1) von je zwei zusammengehörigen in derselben Punktreihe p_1 getroffen wird. Folglich ist der Ort der Schnittpunkte je zweier entsprechenden Kegelschnitte dieser beiden projectivischen Kegelschnittbüschel eine

*) Siehe *Seidewitz* a. a. O.

allgemeine Curve dritten Grades, welche durch die sechs Punkte $P\ Q\ R\ P'\ Q'\ R'$ (aber nicht durch S und S') hindurchgeht *). Diese allgemeine Curve dritten Grades ist also der Ort solcher Punkte der Ebene E, in welchen sich drei entsprechende Ebenen der drei collinearen Bündel treffen d. h. die Schnittcurve der Ebene E mit dem von den drei Bündeln erzeugten räumlichen Orte; dieser selbst ist also eine Oberfläche dritter Ordnung, w. z. b. w. Es ist zugleich für das Folgende von Wichtigkeit, zu wissen, welchen Ort diejenigen besonderen Ebenen je eines Bündels umhüllen, deren entsprechende in den beiden anderen sie längs den Punkten der eben gefundenen Curve dritten Grades in der Transversalebene E schneiden. Um dies zu ermitteln haben wir nur die drei übrigen Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte K und K', welche $x\ y\ z$ heissen mögen, mit p_1 zu verbinden und aufzusuchen, von der wievielsten Classe der gesammte Ort der drei Verbindungslinien p_1x, p_1y, p_1z wird. Denken wir uns hierzu einen beliebigen Punkt Π der Ebene E mit dem veränderlichen Punkte p_1 verbunden und suchen den zweiten Schnittpunkt dieses Strahls und des Kegelschnitts K auf, so ist der Ort desselben, wie leicht zu sehen ist, ein neuer Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch Π geht; ebenso erhalten wir als Ort des Schnittpunktes von Πp_1 mit dem Kegelschnitt K' einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher gleichfalls durch Π geht. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben im Allgemeinen noch drei gemeinsame Punkte, die mit Π verbunden drei Strahlen von der gewünschten Eigenschaft liefern; folglich ist der gesuchte Ort von der dritten Classe. Wir schliessen also Folgendes: *Von den Schnittpunkten entsprechender Ebenen dreier collinearen Ebenenbündel liegen in einer beliebig gegebenen Transversalebene unendlich viele auf einer allgemeinen Curve dritten Grades und diejenigen je drei Ebenen, welche diese Punkte bestimmen, umhüllen in jedem der drei Bündel einen Kegel dritter Classe.*

3. Drei entsprechende Ebenen der drei collinearen Bündel schneiden sich immer in einem Punkte, der ihrem Erzeugnisse, der Oberfläche dritter Ordnung, angehört; es kann aber insbesondere vorkommen, dass sie sich in derselben Geraden schneiden, in welchem Falle diese ganz der Oberfläche angehören muss. Um zu untersuchen, wie oft dies vorkommt, denken wir uns zwei verchiedene Transversalebenen E und E' beliebig angenommen, dann

---

*) Siehe *Chasles*, Comptes rendus de l'Académie des sciences, tome XXXVII, 16 août 1853.

müsste ein solches besonderes Tripel von entsprechenden Ebenen einen Schnittpunkt sowohl in E als auch in E' haben und umgekehrt. Nun umhüllen nach 2. diejenigen Ebenen des ersten Bündels, welche Punkte der Ebene E liefern, einen Kegel dritter Classe und ebenso diejenigen Ebenen des ersten Bündels, welche Punkte der Ebene E' liefern. Diese beiden Kegel mit demselben Mittelpunkte M_1 haben im Allgemeinen neun gemeinschaftliche Berührungsebenen, von denen drei sofort anzugeben sind. In die Schnittlinie von E und E' fällt nämlich dreimal ein Schnittpunkt dreier entsprechenden Ebenen hinein und dieser liegt dann zwar in beiden Transversalebenen, ist aber derselbe. Die übrigen sechs gemeinschaftlichen Berührungsebenen müssen dagegen solche Ebenen des ersten Bündels sein, dass jede mit ihren beiden entsprechenden im zweiten und dritten Bündel durch dieselbe Gerade geht. Wir schliessen also: *Bei drei beliebig gegebenen collinearen Ebenenbündeln kommt es im Allgemeinen sechs Mal vor, dass drei entsprechende Ebenen sich in derselben Geraden schneiden.*

4. Die sechs geraden Linien, welche wir als vollständig der Oberfläche dritter Ordnung angehörig gefunden haben, geben zu neuen Geraden Veranlassung, die ebenfalls gänzlich auf der Oberfläche liegen. Jene ursprünglichen sechs Geraden sind aber selbst gewissen Bedingungen unterworfen, die sich unmittelbar herausstellen. Es ist einleuchtend, dass sich im Allgemeinen keine zwei von ihnen treffen werden, denn sonst müssten sich drei entsprechende Strahlen der drei collinearen Bündel in einem Punkte treffen; dies würde aber eine Bedingung für die drei ganz willkürlich gegebenen collinearen Bündel sein, die nicht angenommen ist. Es können auch keine vier von jenen sechs Geraden die Generatrices derselben Art eines Hyperboloids sein, d. h. von drei Geraden gleichzeitig getroffen werden, denn sonst würde die ganze Schaar von Geraden, welche jene vier schnitten, der Oberfläche dritter Ordnung angehören müssen, diese würden also zerfallen in ein Hyperboloid und eine Ebene. Dagegen werden vier beliebige Gerade im Raume, von denen keine zwei sich begegnen und die auch nicht auf einem Hyperboloid liegen, bekanntlich immer im Allgemeinen von zwei bestimmten Geraden gleichzeitig getroffen, die auf bekannte Weise zu construiren sind; solche Gerade müssen der Oberfläche dritter Ordnung ganz angehören, weil sie vier Punkte mit ihr gemein haben.

Mögen die sechs ursprünglichen Geraden mit

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$$

und die Fläche dritten Grades zur Abkürzung mit $F^{(3)}$ bezeichnet werden: nehmen wir dann irgend vier $a\ b\ c\ d$ von ihnen und construiren die beiden Geraden α und β, welche ihnen gleichzeitig begegnen, so wird das durch die drei Geraden $a\ b\ c$ bestimmte Hyperboloid $H^{(2)}$ auch α und β enthalten und also mit $F^{(3)}$ fünf gerade Linien gemein haben, folglich nothwendig noch eine sechste Gerade, die wir mit γ bezeichnen wollen, und welche nach dem Obigen nicht mit $a\ b\ c$ zu derselben Schaar Generatrices gehören kann, sondern zu der anderen Schaar gehören, also $a\ b\ c$ gleichzeitig schneiden muss. Mehr als diese sechs Geraden $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$ kann aber das Hyperboloid $H^{(2)}$ mit $F^{(3)}$ nicht gemein haben. Denken wir uns daher die beiden Geraden $\alpha'\ \beta'$ construirt, welche $a\ b\ c\ e$ gleichzeitig treffen und endlich noch die beiden Geraden $\alpha''\ \beta''$, welche $a\ b\ c\ f$ gleichzeitig treffen, so müssen diese vier Geraden $\alpha'\ \beta'\ \alpha''\ \beta''$, weil sie nothwendig sowohl dem Hyperboloid $H^{(2)}$ wie der Fläche $F^{(3)}$ angehören, in irgend einer Weise mit den dreien $\alpha\ \beta\ \gamma$ coincidiren. Von den beiden Geraden $\alpha'\ \beta'$ muss hiernach mindestens eine mit α oder β coincidiren, denn fielen sie selbst zusammen und coincidirten mit γ, so hätten $H^{(2)}$ und $F^{(3)}$ diese doppelte Gerade und ausserdem noch fünf Gerade gemein, was unmöglich ist. Wir können also annehmen, dass α' mit α zusammenfällt, d. h. mindestens eine der beiden Geraden, welche $a\ b\ c\ d$ treffen, muss auch e treffen und da wir vier ganz beliebige aus den anfänglichen sechs Geraden herausgenommen haben, so gilt dies für jede vier: es stellt sich also folgende Bedingung, welcher die sechs anfänglichen Geraden unterworfen sind, heraus: Die sechs Geraden $a\ b\ c\ d\ e\ f$ liegen derart, dass eine von solchen zwei Geraden, welche irgend vier von jenen treffen, zugleich einer der beiden übrigen begegnet. Wir können aber weiter einsehen, dass nicht gleichzeitig α' mit α und β' mit β coincidiren kann, dass also β' mit γ zusammenfallen muss; denn fielen α' und α, β' und β zusammen, so müsste von den beiden letzten Geraden $\alpha''\ \beta''$ eine, etwa α'', mit γ und die andere β'' mit α oder β zusammenfallen, d. h. die Geraden $\alpha\ \beta\ \gamma$ träfen in folgender Weise die anfänglichen sechs Geraden

$$\begin{aligned} \alpha &\ldots a\ b\ c\ d\ e \\ \beta &\ldots a\ b\ c\ d\ e\ f \\ \gamma &\ldots a\ b\ c\ f. \end{aligned}$$

Dies ist aber unmöglich, denn das durch die drei Geraden $a\ b\ c$ bestimmte Hyperboloid $H^{(2)}$ begegnet nothwendig ausserdem der Fläche $F^{(3)}$ in drei unveränderlichen Geraden $\alpha\ \beta\ \gamma$; dieselben drei Geraden müssten also auch

resultiren, wenn f mit d vertauscht würde oder überhaupt irgend eine Vertauschung der Geraden $d\ e\ f$ einträte, d. h. $\alpha\ \beta\ \gamma$ müssten auch in irgend einer Reihenfolge derart den anfänglichen sechs Geraden begegnen

eine $a\ b\ c\ e\ f$
die andere $a\ b\ c\ d\ e\ f$
die dritte $a\ b\ c\ d.$

Bei der Identificirung dieses Arrangements mit dem vorigen würde aber immer folgen, dass vier von den Geraden $a\ b\ c\ d\ e\ f$ durch dieselben drei $\alpha\ \beta\ \gamma$ getroffen werden, was gegen die Annahme ist. Es bleibt also nur noch übrig, dass α' mit α coincidirt, β' dagegen mit γ und ebenso von den beiden letzten α'' und β'' eine, etwa β'', mit γ und die andere α'' mit α oder β: ersteres, dass nämlich α'' mit α coincidirt, kann wiederum nicht der Fall sein, denn sonst hätten wir ein Arrangement, wie folgt

α träfe $a\ b\ c\ d\ e\ f$
β – $a\ b\ c\ d$
γ – $a\ b\ c\ e\ f,$

was nicht möglich ist aus dem vorhin angegebenen Grunde; es muss also α' mit α, β' mit γ, α'' mit β und β'' mit γ zusammenfallen, d. h.

α trifft $a\ b\ c\ d\ e$
β – $a\ b\ c\ d\ f$
γ – $a\ b\ c\ e\ f,$ also:

Die sechs Geraden $a\ b\ c\ d\ e\ f$ liegen nothwendig so, dass, wenn irgend vier von ihnen herausgenommen werden, die eine derjenigen beiden Geraden, welche diesen vieren gleichzeitig begegnen, zugleich einer der beiden übrig gebliebenen und die andere der anderen begegnen muss oder so, dass irgend fünf von den Geraden $a\ b\ c\ d\ e\ f$ von einer und nur einer einzigen getroffen werden.

5. Da sich die sechs anfänglichen Geraden nur auf sechs Arten zu je fünf combiniren lassen, so erhalten wir also nur sechs neue Gerade, von denen drei die obigen $\alpha\ \beta\ \gamma$ waren. Wir bezeichnen jetzt diese sechs neuen Geraden der Fläche $F^{(3)}$ durch $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1$ und zwar so, dass

a_1 trifft $b\ c\ d\ e\ f$
b_1 – $a\ c\ d\ e\ f$
c_1 – $a\ b\ d\ e\ f$
d_1 – $a\ b\ c\ e\ f$
e_1 – $a\ b\ c\ d\ f$
f_1 – $a\ b\ c\ d\ e,$

woraus denn zugleich ein reciprokes Verhalten hervorgeht, dass nämlich

$$\begin{array}{lll} a & \text{trifft} & b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1 \\ b & - & a_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1 \\ c & - & a_1\ b_1\ d_1\ e_1\ f_1 \\ d & - & a_1\ b_1\ c_1\ e_1\ f_1 \\ e & - & a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ f_1 \\ f & - & a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1. \end{array}$$

Aus diesen 12 Geraden ergeben sich nun sofort die funfzehn übrigen, denn die beiden Ebenen

$$(a\,b_1) \quad \text{und} \quad (b\,a_1)$$

schneiden sich in einer Geraden g_{12}, welche ganz der Fläche $F^{(3)}$ angehören muss, weil sie gleichzeitig den vier Geraden $a\ b\ a_1\ b_1$ begegnet; es kommen also zu den früheren 12 noch $\frac{6.5}{1.2} = 15$ neue Gerade g_{ik}; zusammen giebt es also 27 *Gerade auf der Oberfläche dritter Ordnung.*

Die letzteren funfzehn Geraden liegen mit den ersteren zwölf in $2.15 = 30$ solchen Ebenen Δ, deren jede drei der Oberfläche angehörige Gerade enthält, nämlich in einer Ebene liegen immer

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l|l} a\ b_1\ g_{12} & a_1\ b\ g_{12} \\ a\ c_1\ g_{13} & a_1\ c\ g_{13} \\ a\ d_1\ g_{14} & a_1\ d\ g_{14} \\ a\ e_1\ g_{15} & a_1\ e\ g_{15} \\ a\ f_1\ g_{16} & a_1\ f\ g_{16} \\ b\ c_1\ g_{23} & b_1\ c\ g_{23} \\ b\ d_1\ g_{24} & b_1\ d\ g_{24} \\ b\ e_1\ g_{25} & b_1\ e\ g_{25} \\ b\ f_1\ g_{26} & b_1\ f\ g_{26} \\ c\ d_1\ g_{34} & c_1\ d\ g_{34} \\ c\ e_1\ g_{35} & c_1\ e\ g_{35} \\ c\ f_1\ g_{36} & c_1\ f\ g_{36} \\ d\ e_1\ g_{45} & d_1\ e\ g_{45} \\ d\ f_1\ g_{46} & d_1\ f\ g_{46} \\ e\ f_1\ g_{56} & e_1\ f\ g_{56}. \end{array}\right.$$

Dass aus der Gruppe der 12 Geraden $a\ b \ldots f,\ a_1\ b_1 \ldots f_1$ sich keine neuen Geraden herleiten lassen, welche ganz der Oberfläche $F^{(3)}$ angehören könnten, ist ersichtlich; die funfzehn Geraden g_{ik} sind aber selbst Bedingungen unter-

worfen, aus denen hervorgeht, dass auch sie auf keine weiteren Geraden führen können, so dass dann erwiesen ist, dass die Fläche $F^{(3)}$ im Allgemeinen nur jene 27 Geraden haben kann.

Nehmen wir nämlich zwei Ebenen, z. B.

$$a\ b_1\ g_{12} \quad \text{und} \quad c\ d_1\ g_{34},$$

aus dem obigen Schema (I) heraus, so wird ihre Schnittlinie der Fläche $F^{(3)}$ im Allgemeinen in drei Punkten begegnen, von denen zwei offenbar der Schnittpunkt von $a\ d_1$ und der Schnittpunkt von $b_1\ c$ sind; der dritte Schnittpunkt muss daher sowohl in g_{12} als auch in g_{34} liegen, d. h. die beiden Geraden g_{12} und g_{34} müssen sich schneiden und im Allgemeinen müssen immer g_{ik} und $g_{i'k'}$ in einer Ebene liegen, sobald ik, $i'k'$ von einander verschieden sind. Dass die Schnittlinie der betrachteten beiden Ebenen nicht ganz auf der Oberfläche $F^{(3)}$ liegen kann, ist kaum zu erwähnen nöthig, weil sonst eine Ebene mit der Fläche $F^{(3)}$ vier gerade Linien gemein hätte, was unmöglich ist.

Da g_{12} und g_{34} in einer Ebene liegen, so muss diese der Fläche $F^{(3)}$ nothwendig noch in einer dritten geraden Linie begegnen, die leicht anzugeben ist, nämlich g_{56}; denn letztere schneidet nach dem Vorigen sowohl g_{12} wie g_{34}, liegt folglich mit diesen beiden sich selbst schneidenden Geraden in einer Ebene, und im Allgemeinen liegen immer drei Gerade $g_{ik}\ g_{i'k'}\ g_{i''k''}$ in derselben Ebene, bei welchen ik, $i'k'$, $i''k''$ von einander verschieden sind. Hieraus ergeben sich 15 neue Ebenen Δ, in welche sich die Geraden g_{ik} folgendermaassen vertheilen:

(II.)

g_{12}	g_{34}	g_{56}
g_{12}	g_{35}	g_{46}
g_{12}	g_{36}	g_{45}
g_{13}	g_{24}	g_{56}
g_{13}	g_{25}	g_{46}
g_{13}	g_{26}	g_{45}
g_{14}	g_{23}	g_{56}
g_{14}	g_{25}	g_{36}
g_{14}	g_{26}	g_{35}
g_{15}	g_{23}	g_{46}
g_{15}	g_{24}	g_{36}
g_{15}	g_{26}	g_{34}
g_{16}	g_{23}	g_{45}
g_{16}	g_{24}	g_{35}
g_{16}	g_{25}	g_{34}.

Es giebt also, wenn wir die früheren 30 Ebenen hinzurechnen, im Ganzen $30+15=45$ *solche Ebenen* Δ, *deren jede drei von den* 27 *Geraden enthält.* Aus diesen Beziehungen der Geraden g_{ik} unter einander oder mit den anfänglichen 12 Geraden geht hervor, dass sich keine anderen Geraden weiter auf der Fläche $F^{(3)}$ ziehen lassen.

6. Wählen wir von den eben erhaltenen 45 Ebenen Δ zwei aus, welche sich nicht in einer der 27 Geraden schneiden, z. B.

$$\begin{matrix} g_{12} & g_{34} & g_{56} \\ g_{46} & g_{25} & g_{13}\,; \end{matrix}$$

so liegen die so unter einander gestellten Geraden selbst paarweise in einer Ebene, welche der Fläche $F^{(3)}$ in je einer dritten Geraden begegnet; diese hinzugefügt erhalten wir folgendes Schema

g_{12}	g_{34}	g_{56}
g_{46}	g_{25}	g_{13}
g_{35}	g_{16}	g_{24} ;

bei welchem immer drei in einer Horizontal- und gleichzeitig drei in einer Vertical-Reihe stehende Gerade in je einer Ebene liegen; die drei ersten Ebenen sind die Flächen eines *Steiner*schen Trieders und die drei anderen des conjugirten Trieders; die 9 Geraden, in welchen die Flächen der beiden conjugirten Trieder einander schneiden, gehören sämmtlich der Fläche $F^{(3)}$ an. Man kann ein solches Triederpaar auch aus dem Schema (I.) bilden und zwar in zweifacher Weise, wofür folgende Beispiele Prototypen sind:

1)
a	b_1	g_{12}
c_1	d	g_{34}
g_{13}	g_{24}	g_{56}

2)
a	b_1	g_{12}
c_1	g_{23}	b
g_{13}	c	a_1

Fragen wir, wie viel Triederpaare sich überhaupt bilden lassen, so ergiebt sich zunächst aus dem Schema (I.) der 30 Ebenen Δ nach dem Modell 1), dass wir so viel demselben analoge bilden können, als sich sechs Elemente zu je vier combiniren lassen, also $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=15$, und aus jeder solchen Ver-

bindung von je vier Elementen immer 12 Triederpaare hervorgehen, z. B.

aus $a\ b\ c\ d$	$a\,b_1$	$a\,b_1$	$a\,c_1$	$a\,c_1$	$a\,d_1$	$a\,d_1'$
	$c_1\,d$	$d_1\,c$	$b_1\,d$	$d_1\,b$	$b_1\,c$	$c_1\,b$
	$a_1\,b$	$a_1\,b$	$a_1\,c$	$a_1\,c$	$a_1\,d$	$a_1\,d$
	$c\,d_1$	$d\,c_1$	$b\,d_1$	$d\,b_1$	$b\,c_1$	$c\,b_1$,

wo die zugehörigen g_{ik} der neun, das Triederpaar constituirenden Terme leicht zu ergänzen sind. Von diesen $15.12 = 180$ Triederpaaren sind aber die Hälfte fortzulassen, weil immer zwei auftreten, die nur dadurch verschieden sind, dass Horizontal- und Verticalreihen mit einander vertauscht sind, wobei natürlich das Triederpaar dasselbe ist, z. B.

$$\begin{matrix} a & b_1 \\ c_1 & d \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a & c_1 \\ b_1 & d. \end{matrix}$$

Zu diesen 90 Triederpaaren kommen nun diejenigen, welche aus dem Modell 2) hervorgehen, und deren es offenbar so viel giebt, als sich sechs Elemente zu je drei combiniren lassen, d. h. $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$; endlich noch diejenigen, welche sich aus der Gruppe (II.) der 15 Ebenen Δ bilden lassen. Hier ist jede Ebene nur mit 8 anderen so zu verbinden, dass sich diese beiden nicht in einer der 27 Geraden schneiden, und dies giebt $\frac{15.8}{2} = 60$ Combinationen, welche auf Triederpaare führen; hiervon ist aber nur der sechste Theil zu nehmen, weil sich sowohl Horizontal- und Vertical-Reihen mit einander vertauschen lassen, als auch jede dieser drei Reihen auf drei Arten zu je zweien mit einander verbunden werden können; wir erhalten mithin nur 10 neue Triederpaare, die aus je neun g_{ik} zu bilden sind und hiernach im Ganzen $90+20+10 = 120$ *Triederpaare*. Verschiedene Ebenen aus den Gruppen (I.) und (II.) mit einander in Verbindung gebracht, führen natürlich wieder zu Triedern, die zu den ersten 90 gehören.

7. Aus sämmtlichen 27 Geraden der Fläche $F^{(3)}$ lassen sich noch auf mehrfache Weise solche 6 Paare auswählen, wie diejenigen waren, auf welche wir zuerst geführt wurden, nämlich:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} a & b & c & d & e & f \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1, \end{cases}$$

wo zwei unter einander stehende sich nicht schneiden, dagegen jede der einen Reihe die fünf anderen mit Ausnahme der mit ihr in derselben Colonne stehenden trifft.

In der That ergiebt sich aus der Anschauung der obigen Beziehungen zwischen den 27 Geraden, dass die 12 Geraden

$$(\text{II.}) \quad \begin{cases} a & a_1 & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ b & b_1 & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \end{cases}$$

eine ganz ähnliche Gruppe von 12 Geraden bilden wie die anfängliche: derartiger Gruppen giebt es offenbar $\frac{6.5}{1.2} = 15$; ferner erhalten wir noch ein drittes System von 12 Geraden in folgender Weise:

$$(\text{III.}) \quad \begin{cases} a & b & c & g_{56} & g_{46} & g_{45} \\ g_{23} & g_{13} & g_{12} & d_1 & e_1 & f_1, \end{cases}$$

und solcher Gruppen giebt es $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$, mithin im Ganzen $1+15+20=36$ Gruppen von solchen 12 Geraden, wie die anfänglichen $a\ b \ldots f$, $a_1\ b_1 \ldots f_1$. Dass es aber nicht mehr derartiger Gruppen geben kann, ist leicht erkennbar.

Hieraus geht hervor, wie viel Hyperboloide $H^{(2)}$ es im Allgemeinen giebt, welche der Oberfläche $F^{(3)}$ in je 6 Geraden begegnen; denn nehmen wir bei einer beliebigen der erhaltenen 36 Gruppen aus der ersten Reihe drei Gerade heraus, so muss das durch dieselben gelegte Hyperboloid $H^{(2)}$ die drei anderen Geraden der zweiten Reihe, welche nicht unter ihnen stehen, mit der Fläche $F^{(3)}$ gemein haben, und da sich 6 Elemente zu je dreien auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ Arten combiniren lassen, so müsste es $20.36 = 720$ Hyperboloide $H^{(2)}$ geben, deren jedes der Fläche $F^{(3)}$ in 6 Geraden begegnet; diese treten aber doppelt auf, so dass es nur 360 wirklich von einander verschiedene Hyperboloide $H^{(2)}$ giebt. Hiervon überzeugt man sich leicht aus der Anschauung der 3 Schemata (I.), (II.), (III.), ohne nöthig zu haben, dieselben vollständig auszuführen, denn es lassen sich immer aus den ersten Reihen jener drei Schemata je drei das Hyperboloid $H^{(2)}$ bestimmende Generatrices derselben Art, wie sie auch immer gewählt seien, entweder in demselben Schema noch einmal oder in einem der anderen Schemata wiederfinden, nämlich

$a\ b\ c$ in (I.) und (III.)
$a\ a_1\ g_{23}$ in (II.) und (II.)
$a\ g_{23}\ g_{24}$ in (II.) und (III.)
$a\ b\ g_{56}$ in (III.) und (III.)
$g_{56}\ g_{46}\ g_{45}$ in (III.) und (III.).

In eine dieser 5 Kategorien ist aber jedes Hyperboloid $H^{(2)}$, wie die Generatrices auch immer ausgewählt seien, welche es bestimmen, unterzubringen; es kommt daher jedes doppelt vor und die Anzahl der von einander wirklich verschiedenen beträgt 360.

8. Aus den beiden Gruppen (I.) und (II.) in n°. 5, worin die 27 Geraden in 30 und 15 Ebenen vertheilt sind, geht hervor, dass jede dieser Geraden von 10 anderen getroffen wird, z. B.

$$a \quad \text{von} \quad b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_{12}\ g_{13}\ g_{14}\ g_{15}\ g_{16}$$

und

$$g_{12} \quad \text{von} \quad a\ a_1\ b\ b_1\ g_{34}\ g_{35}\ g_{36}\ g_{45}\ g_{46}\ g_{56},$$

aber von weiter keiner; diese 10 Schnittpunkte rühren von 5 Paaren Gerader her, deren jedes in einer Ebene enthalten ist und die als 5 Paare aufgefassten Schnittpunkte bilden ein Punktsystem (Involution) wie aus folgender Betrachtung hervorgeht.

Ein durch $e\ f\ g_{12}$ gelegtes Hyperboloid $H^{(2)}$ begegnet der Fläche $F^{(3)}$ in $a_1\ b_1\ g_{56}$; ein Hyperboloid $H^{(2)}$, gelegt durch die Geraden $e\ f\ g_{13}$, begegnet der Fläche $F^{(3)}$ in den Geraden $a_1\ c_1\ g_{56}$; und ein Hyperboloid $H^{(2)}$, durch die Geraden $e\ f\ g_{14}$ gelegt, begegnet der Fläche $F^{(3)}$ in $a_1\ d_1\ g_{56}$.

Diese drei Hyperboloide haben vier Generatrices gemein $e\ f\ a_1\ g_{56}$ und schneiden die Fläche $F^{(3)}$ ausserdem in den Linienpaaren $b_1\ g_{12}$, $c_1\ g_{13}$, $d_1\ g_{14}$, welche selbst der Geraden a in drei Punktenpaaren begegnen. Ausserdem gehen durch die vier Geraden $e\ f\ a_1\ g_{56}$ zwei Ebenenpaare, nämlich einmal ea_1 und fg_{56} und zweitens eg_{56} und fa_1, und das erste Ebenenpaar begegnet der Geraden a in denjenigen beiden Punkten, in welchen sie von e_1 und g_{15} getroffen wird, das andere Ebenenpaar aber in denjenigen beiden Punkten, in welchen sie von f_1 und g_{16} getroffen wird; betrachten wir die beiden Ebenenpaare als besondere Flächen zweiten Grades, so haben wir durch die vier Geraden $e\ f\ a_1\ g_{56}$ (besonderer Fall einer Raumcurve vierten Grades) fünf Flächen zweiten Grades, welche bekanntlich einer Geraden (a) in fünf Punktenpaaren eines Punktsystems begegnen; folglich *bilden die fünf Paar Schnittpunkte, in welchen eine jede der* 27 *Geraden von fünf Paaren der übrigen, die immer paarweise in einer Ebene liegen, getroffen werden, ein Punktsystem.* In ganz ähnlicher Weise, wie hier der Beweis für die Gerade a geführt ist, lässt er sich auch für eine der Geraden g_{ik} führen, worauf einzugehen unnöthig ist. Durch die vier Geraden $e\ f\ a_1\ g_{56}$, welche ein schiefes Viereck bilden, gehen ausser den beiden Ebenenpaaren und den drei angeführten Hyperboloiden $H^{(2)}$ noch eine unendliche Zahl anderer Hyperboloide $h^{(2)}$, die ein einfaches Flächenbüschel bilden. Jedes Hyperboloid dieses Büschels begegnet

der Geraden a in zwei Punkten p, π eines Punktsystems, welches schon durch die beiden Ebenenpaare fixirt wird; ein solches Hyperboloid $h^{(2)}$ kann aber mit der Fläche $F^{(3)}$ im Allgemeinen nur noch einen Kegelschnitt $C^{(2)}$ gemein haben, welcher daher durch die Punkte p, π hindurchgehen, folglich mit der Geraden a in derselben Ebene liegen muss. Die Ebenen aller Kegelschnitte $C^{(2)}$ bilden also ein Ebenenbüschel $B(a)$. Wir schliessen hieraus umgekehrt: *Alle Ebenen durch eine der 27 Geraden gelegt, schneiden die Fläche $F^{(3)}$ längs Kegelschnitten $C^{(2)}$, welche selbst wieder der ersten Geraden in Punktenpaaren eines Punktsystems begegnen.* Insbesondere zerfällt der Kegelschnitt $C^{(2)}$, wie wir gesehen haben, fünfmal in Linienpaare, die 5 Punktenpaare jenes Punktsystems auf der Geraden fixiren. Das Ebenenbüschel $B(a)$ steht mit dem Flächenbüschel $B(h^{(2)})$ in projectivischer Beziehung, denn es gehört sowohl zu jedem Hyperboloid $h^{(2)}$ eine einzige und bestimmte Ebene des Ebenenbüschels als auch umgekehrt zu jeder Ebene des Ebenenbüschels ein einziges und bestimmtes Hyperboloid $h^{(2)}$; letzteres folgt nämlich daraus, dass eine durch a gelegte Ebene der Fläche $F^{(3)}$ noch in einem bestimmten Kegelschnitte $C^{(2)}$ begegnet, welcher die Gerade a selbst in einem bestimmten Punktenpaare p, π des obigen Punktsystems trifft; durch dies Punktenpaar und die vier Geraden e f a_1 g_{56} ist aber nur ein einziges Hyperboloid $h^{(2)}$ möglich, welches eben das der Ebene entsprechende ist; da diese Beziehung eine beiderseitig eindeutige ist, so muss sie bekanntlich projectivisch sein.

Hieraus geht ein besonderer Fall der von *Steiner* (a. a. O. II) angegebenen Entstehungsart der Oberfläche dritter Ordnung hervor mittelst eines Ebenenbüschels und eines mit ihm projectivischen Büschels von Flächen zweiter Ordnung, welche durch dieselbe Raumcurve $R^{(4)}$ hindurchgehen, indem nämlich an Stelle dieser Raumcurve $R^{(4)}$ die Seiten eines schiefen Vierecks treten und das Flächenbüschel aus sämmtlichen durch dasselbe gehenden Hyperboloiden besteht. Dieser Besonderheit wegen wird die Construction der Oberfläche dritter Ordnung von elementarer Einfachheit und lässt sich so aussprechen: *Durch zwei einander nicht schneidende Gerade a b und zwei andere einander ebenfalls nicht schneidende Gerade α β, die aber jede der beiden ersten treffen, durch eine fünfte Gerade c, welche keiner der vier begegnet, und drei beliebige Punkte im Raume ist eine Oberfläche dritter Ordnung vollständig bestimmt* und kann folgendermaassen construirt werden: Man lege durch a b α β und je einen der drei gegebenen Punkte drei Hyperboloide und lasse sie den drei Ebenen, welche durch c und dieselben drei Punkte

gehen, projectivisch entsprechen; durch diese drei entsprechenden Paare ist die projectivische Beziehung des Ebenenbüschels und Hyperboloidenbüschels vollständig bestimmt; jede vierte durch c gelegte Ebene wird das bestimmte ihr entsprechende Hyperboloid längs eines Kegelschnittes schneiden, dessen gesammter Ort die Oberfläche dritter Ordnung ist. Oder auch: Durch das Hyperboloidenbüschel $(a\,b\,\alpha\,\beta)$ ist auf der Geraden c ein bestimmtes Punktsystem $p.\ \pi$ gegeben; man lege durch c ein Ebenenbüschel, welches mit dem Punktsystem $p,\ \pi$ in projectivische Beziehung gesetzt wird durch drei Paar als entsprechend festgesetzte Elemente; das durch ein Punktenpaar $p,\ \pi$ gelegte Hyperboloid des Flächenbüschels $(a\,b\,\alpha\,\beta)$ und die entsprechende Ebene des Ebenenbüschels schneiden sich längs einem Kegelschnitte, dessen gesammter Ort die Oberfläche dritter Ordnung ist.

Diese Construction kommt gleichzeitig mit der von *F. August* a. a. O. gegebenen Definition der Oberfläche dritter Ordnung überein; denn jedes Hyperboloid unseres Flächenbüschels lässt sich als das Erzeugniss zweier projectivischen Ebenenbüschel auffassen, deren Axen a und b sind; einer bestimmten durch c gehenden Ebene entsprechen also zwei bestimmte projectivische Ebenenbüschel, deren Axen a und b sind (a. a. O. § 4) und bewegen wir die Ebene um die dritte Axe c herum, so lassen sich $a\ b\ c$ als die Axen dreier sogenannter „doppelt-projectivischer" Ebenenbüschel auffassen, wie sie *August* seiner Betrachtung zu Grunde gelegt hat.

Die Oberfläche dritter Ordnung als Erzeugniss dreier collinearen Ebenenbündel aufgefasst kann unmittelbar *durch drei beliebige Punkte* (als Mittelpunkte der drei Bündel) *und vier beliebige Gerade im Raume,* von denen sich nicht zwei begegnen und die auch nicht die vier Generatrices derselben Art eines Hyperboloids sind, gelegt werden, weil die collineare Beziehung zweier Bündel durch vier Paar entsprechende Elemente bestimmt ist. Aus derselben Entstehungsart der Oberfläche dritter Ordnung geht auch ein von *Salmon* aufgestellter Satz unmittelbar hervor (Nouvelles annales de mathématiques par M. M. *Gerono* et *Prouhet* IIme série, tome II, pag. 24), der einem bekannten Satze der Ebene analog ist:

Wenn die vier Flächen eines Tetraeders durch feste Punkte laufen und die drei Kanten einer Seitenfläche auf festen Ebenen sich bewegen, so beschreibt die dieser Seitenfläche gegenüberliegende Ecke des Tetraeders eine Oberfläche dritten Grades.

Breslau, den 28sten März 1863.

Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.

(Von Herrn *Aronhold*.)

Schon im Jahre 1851 hatte ich in einer der philosophischen Facultät zu Königsberg überreichten Abhandlung die Prinzipien entwickelt, welche die Grundlage der hier vorliegenden Invariantentheorie bilden, zu einer Zeit, als die gegenwärtige Theorie und Terminologie noch gar nicht vorhanden war. Wiewohl nun seitdem auf diesem Gebiete umfangreiche und schätzbare Untersuchungen veröffentlicht worden sind, auch viele Resultate, in deren Besitz ich mich bereits befand, so ist doch auf eine feste Begründung der Theorie im Allgemeinen bisher nicht Rücksicht genommen worden. Nur in speciellen Fällen sind erschöpfende Darstellungen gegeben, während im Allgemeinen bei einer grossen Mannigfaltigkeit von Methoden zur Bildung von Invarianten und analogen algebraischen Grössen von einer Definition ausgegangen werden muss, welche die allgemeine Existenz derselben unbewiesen lässt. In den folgenden Entwickelungen gebe ich eine feste Begründung der Theorie, so wie die Vereinigung verschiedener scheinbar auseinander gehender Grundgesetze zu einem organischen Ganzen. Das Prinzip, welches ich hier benutze, muss nothwendig zu solchen Functionen führen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, und zum Beweise derjenigen Grundeigenschaft, welche gewöhnlich als Definition dient. Ich glaube aber hervorheben zu müssen, dass die Anwendung desselben Prinzipes ebenso gut diejenigen Functionen liefern muss, welche durch Substitutionen *höherer* Ordnung unverändert bleiben, doch geht eine Anwendung desselben in dieser Weise über die hier gesteckten Grenzen. In Bezug auf die Terminologie habe ich die von dem Herrn *Sylvester* eingeführten Benennungen Invariante, Covariante und Discriminante, welche im Laufe der Untersuchung erklärt werden, beibehalten. Es war mir jedoch nicht möglich, den in vorhandenen Arbeiten enthaltenen umfangreichen und sehr zerstreuten Stoff zu ordnen und mit der gegenwärtigen Darstellung überall in Zusammenhang zu bringen, was bei einer vollständigen Bearbeitung der Invariantentheorie sehr wünschenswerth wäre. Indessen lege ich einigen Werth nur darauf, die Theorie im grossen Ganzen auf eine con-

sequente Weise entwickelt und auf einige wenige Grundprinzipien zurückgeführt zu haben, so dass der Leser, welcher die ausgezeichneten Untersuchungen anderer Autoren auf diesem Gebiete, wie der Herren *Betti, Boole, Brioschi, Cayley, Clebsch, Hermite, Hesse, Salmon, Sylvester, etc.*, oder meine eigenen Arbeiten in dieser Richtung benutzen will, sich ohne Weiteres zurecht finden wird.

§. 1.

Ueber ein allgemeines Transformationsproblem mit linearen Substitutionen.

Eine bekannte, charakteristische Eigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung jeder Anzahl von Variabeln besteht darin, dass sie sich durch lineare Substitutionen in specielle Formen transformiren lassen, über deren sämmtliche Coefficienten von vorne hinein verfügt worden ist. Diese Eigenthümlichkeit findet, mit Ausnahme der binären Formen dritter Ordnung, für Functionen höherer Ordnung nicht mehr Statt. Man überzeugt sich hiervon sehr leicht, wenn man die Anzahl der zur Ausführung der Transformation aufzustellenden Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Substitutions-Coefficienten vergleicht. In der That, wenn p die Ordnung der homogenen Function, n die Anzahl der Variabeln bezeichnet, so ist die Anzahl dieser Gleichungen, übereinstimmend mit der Anzahl der Coefficienten:

$$(1.) \qquad (n, p) = \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{1\,.\,2\dots p},$$

während die Anzahl der Substitutionscoefficienten n^2 beträgt, und es ist nur für $n = 2,\ p = 3,\ (n,p) = n^2$, sonst aber

$$(n, p) > n^2,$$

sobald p grösser als 2 ist.

Es geht hieraus hervor, dass die sogenannten canonischen Formen, sobald man den zweiten Grad überschritten hat, immer nur die Theorie einer speciellen Klasse von Functionen liefern können, und dass man, um zur Ausführung aller verschiedenen Transformationen durch lineare Substitutionen zu gelangen, zunächst die transformirte Form gar nicht specialisiren darf.

In Rücksicht hierauf entsteht daher das folgende Problem:

„Es seien

$$(1^a.) \qquad \begin{cases} F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots, \\ F'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \Sigma a'_{\alpha\beta\gamma\dots} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \dots \end{cases}$$

zwei beliebige und beide ganz allgemeine homogene Functionen der p^{ten} Ord-

nung, respective von den n Variabeln x_1 bis x_n und ξ_1 bis ξ_n, man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ finden, unter welchen beide Functionen durch lineare Substitutionen in einander transformirt werden können.“

Diese Bedingungen werde ich in der Folge die Transformationsrelationen nennen.

Bezeichnet man die Substitutionen durch

$$(2.)\qquad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)}\xi_1 + x_1^{(2)}\xi_2 + \cdots + x_1^{(n)}\xi_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_n^{(1)}\xi_1 + x_n^{(2)}\xi_2 + \cdots + x_n^{(n)}\xi_n, \end{cases}$$

so soll die einzige Beschränkung, welcher dieselben unterworfen werden, darin bestehen, dass sie von einander unabhängig sind, d. h. dass ihre Determinante

$$(3.)\qquad r = \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)}$$

nicht verschwindet. Denkt man sich alsdann die Substitution (2.) in die erste der Functionen (1^a.) eingesetzt, und nimmt an, dass dadurch

$$(4.)\qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma F_{\alpha\beta\gamma\ldots}\, \xi_1^{\alpha}\, \xi_2^{\beta}\, \xi_3^{\gamma} \ldots$$

entsteht, so erhält man zur Ausführung der Transformation die Gleichungen

$$(5.)\qquad F_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a'_{\alpha\beta\gamma\ldots},$$

deren Anzahl durch (n, p) unter (1.) gegeben ist.

Die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind in Bezug auf die Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F linear und homogen, und betrachtet man dieselben in den Gleichungen (5.) als Unbekannte, so lässt sich leicht zeigen, dass die Determinante dieser Gleichungen eine Potenz der Determinante der Substitutionscoefficienten ist. Hieraus folgt, dass diese Determinante nicht verschwinden darf, wenn die Gleichungen (5.) von einander unabhängig d. h. wenn die Coefficienten beider Functionen F und F' ganz allgemein sein sollen.

Man könnte nun zur Lösung des Problemes gelangen, wenn man aus den Gleichungen (5.) die Substitutionscoefficienten eliminirte, allein man überzeugt sich leicht davon, dass diese Elimination zu verwickelt ist, um auf diesem Wege die Transformationsrelationen ableiten zu können. Ich werde daher die Gleichungen (5.) in der Folge nur als Beweismittel gebrauchen und nicht allein die Transformationsrelationen aus einer anderen Quelle ableiten, sondern auch andere Gleichungen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten

aufstellen und zwar solche, welche die für die Ausführung der Transformation wichtige Form haben, dass sie sämmtlich die Coefficienten jeder Verticalreihe der Substitution separirt enthalten.

§. 2.

Grundeigenschaften der Transformationsrelationen.

Wenn man die Gleichungen §. 1 (5.) sämmtlich durch eine derselben dividirt, so erhält man ein System von $(n, p)-1$ Gleichungen, welche nur noch die (n^2-1) Verhältnisse der unbekannten Substitutionscoefficienten enthalten. Dieses folgt aus dem Umstand, dass die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ homogene Functionen der p^{ten} Ordnung in Bezug auf erstere sind. Bezeichnet man daher durch $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ constante Indices, so vertreten bei der Elimination der Substitutionscoefficienten die $(n, p)-1$ Gleichungen:

$$(1.) \qquad \frac{F_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{F_{\varkappa\lambda\mu\ldots}} = \frac{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{a'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}$$

vollständig die Gleichungen §. 1 (5.). Die rechten Seiten der Gleichungen (1.) enthalten aber nur die Verhältnisse der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unter sich und die linken Seiten sind Functionen der Verhältnisse $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unter sich, weil die Functionen $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ homogen in Bezug auf letztere sind. Erwägt man daher, dass jedes Eliminationsresultat aus algebraischen Gleichungen sich unter der Form

$$R = 0$$

darstellen lässt, wo R eine ganze Function der Constanten ist, so folgt, *dass in dem vorliegenden Falle R eine ganze Function der Systeme $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ werden muss, welche in Bezug auf jedes System einzeln homogen ist.*

Man kann daher die sämmtlichen Transformationsrelationen in der Form:

$$(2.) \qquad R = PQ' + P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots = 0$$

darstellen, wo P, P_1, P_2, ... Terme bedeuten, welche nur Functionen der Constanten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, Q', Q'_1, Q'_2, ... Terme, welche nur Functionen der Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind, und in welchen sämmtliche P, P_1, P_2, ... homogen und von ein und derselben Ordnung in Bezug auf die Constanten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und sämmtliche Q', Q'_1, Q'_2, ... homogen und von ein und derselben Ordnung in Bezug auf die Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind.

Man denke sich nun die Gleichung (2.) nach einer der Functionen P aufgelöst, so dass aus (2.) z. B.

$$(3.) \qquad P = \Pi'$$

folgt, wo der Kürze halber

$$\Pi' = -\frac{P_1 Q_1' + P_2 Q_2' + \cdots}{Q'}$$

gesetzt worden ist, dann bedeutet Π' eine gebrochene rationale Function der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, deren Zähler und Nenner in Bezug auf letztere von gleicher Ordnung sind, oder kürzer ausgedrückt eine homogene rationale Function der 0ten Ordnung in Bezug auf diese Grössen, *welche die Eigenschaft hat von den Substitutionscoefficienten unabhängig zu werden, sobald man für die Argumente* $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *ihre Werthe in Functionen der Substitutionscoefficienten und der Grössen* $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *substituirt,* denn sie wird alsdann wegen (3.) identisch gleich P, welches nur noch die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ enthält. Offenbar lassen sich aus den Transformationsrelationen unendlich viele solcher von den Substitutionscoefficienten unabhängigen Functionen Π' der $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ableiten, *es wird aber die Anzahl der von einander unabhängigen eine beschränkte sein, da sich rückwärts aus jeder Function* Π' *ein Eliminationsresultat* (2.) *ableiten lässt.* Um dieses einzusehen, bemerke man, dass Π', als von den Substitutionscoefficienten unabhängig, ungeändert bleiben muss, wenn man irgend eine specielle Substitution anwendet, deren Determinante nicht verschwindet, eine solche ist aber die evidente Substitution:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad \ldots \quad x_n = \xi_n,$$

in welcher alle Coefficienten in der Diagonale 1, die anderen 0 sind. Durch diese Substitution gehen aber alle $F_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ §. 1 (5.) in die Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F über. *Bezeichnet man daher durch* Π *die Function, in welche* Π' *durch Substitution der* $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *für die entsprechenden* $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *übergeht, so folgt, dass der constante Werth* P *in* (3.), *welchen* Π' *annimmt, gleich* Π *ist, oder dass*

$$(4.) \qquad \Pi' - \Pi = 0$$

die entsprechende Transformationsrelation ist.

Es ist daher unser Problem auf das folgende zurückgeführt:

Die sämmtlichen von Null verschiedenen Functionen der Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *zu finden, welche von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind.*

Es ist selbstverständlich, dass auch die Functionen R (2.) selbst, welche die linken Seiten der Transformationsrelationen

$$R = 0$$

darstellen, von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind, weil sie identisch gleich 0 werden, aber diese Functionen sind auszuschliessen, weil sie mit jedem

beliebigen Factor multiplicirt die angegebene Eigenschaft beibehalten, während andererseits aus (3.) und (4.) folgt, dass man sämmtliche Transformationsrelationen vermittelst der oben definirten von Null verschiedenen Functionen Π' darstellen kann.

§. 3.

Grundgleichungen, welchen alle von den Substitutionscoefficienten unabhängigen Functionen genügen.

Wenn eine Function verschiedener Grössen von mehreren derselben unabhängig wird, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung, welche sie erfüllen muss, darin, dass ihre ersten partiellen Ableitungen nach den genannten Grössen verschwinden. Es folgt daher, dass die vorliegenden Functionen Π' den folgenden n^2 Bedingungen

$$(1.) \qquad \frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = 0$$

genügen müssen, wenn sie von den n^2 Substitutionscoefficienten $x_k^{(\varrho)}$ (§. 1 (2.)) unabhängig sein sollen. Nach Ausführung der in (1.) angezeigten Differentiationen treten die Substitutionscoefficienten sowohl explicite in den Gleichungen auf, als auch implicite, insofern die Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ Functionen der $x_k^{(\varrho)}$ sind. Ich werde nun zeigen, dass sich die Gleichungen (1.) in solche verwandeln lassen, welche die Substitutionscoefficienten nicht enthalten.

Da

$$(2.) \qquad \frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}} \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_k^{(\varrho)}}$$

ist, so wäre hierzu erforderlich die Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ in Functionen der Substitutionscoefficienten wirklich auszudrücken. Diese etwas beschwerliche Rechnung lässt sich auf folgende elegante Weise vermeiden.

Man bemerke, dass die Gleichung

$$(3.) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = F'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

identisch stattfindet, sobald man links statt der Variabeln x_k ihre Werthe aus den Substitutionsgleichungen in Functionen der ξ_k, und rechts statt der $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ihre Werthe in Functionen der Substitutionscoefficienten einsetzt. Differentiirt man daher die Gleichung (3.) unter dieser Voraussetzung nach irgend einem der Substitutionscoefficienten $x_k^{(\varrho)}$, so erhält man

$$\frac{dF}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{d(x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots)}{dx_k^{(\varrho)}} = \Sigma \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_k^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots,$$

aber es ist

$$\frac{dF}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dx_k^{(\varrho)}} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dx_k^{(\varrho)}} + \cdots + \frac{dF}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{dF}{dx_k}\xi_\varrho,$$

weil $x_k^{(\varrho)}$ nur in x_k vorkommt, daher folgt, wenn man k allmälig die Werthe 1 bis n beilegt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_1} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_1^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots, \\ \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_2} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_2^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \xi_\varrho \dfrac{dF}{dx_n} = \Sigma \dfrac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_n^{(\varrho)}} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots. \end{cases}$$

Nun ist wegen (3.)

$$\frac{dF'}{d\xi_\sigma} = \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{d\xi_\sigma} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{d\xi_\sigma} + \cdots + \frac{dF}{dx_n}\frac{dx_n}{d\xi_\sigma}$$
$$= \frac{dF}{dx_1}x_1^{(\sigma)} + \frac{dF}{dx_2}x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dF}{dx_n}x_n^{(\sigma)},$$

multiplicirt man daher die Gleichungen (4.) der Reihe nach mit $x_1^{(\sigma)}$ bis $x_n^{(\sigma)}$ und addirt sie, so erhält man

$$(5.)\quad \xi_\varrho \frac{dF'}{d\xi_\sigma} = \Sigma\left(\frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)} + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}\right)\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots,$$

woraus man n^2 Gleichungen ableitet, wenn man allmälig für ϱ und σ alle ganzen Zahlen von 1 bis n setzt. Die Gleichungen (5.) stellen aber identische Umformungen dar, d. h. man kann aus denselben ebenso viel Relationen entnehmen als sich von einander verschiedene Potenzen und Producte $\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots$ der p^{ten} Ordnung auf beiden Seiten befinden, indem man die Coefficienten gleicher Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt. Man kann daher auch statt dieser Potenzen und Producte auf beiden Seiten der Gleichungen ganz beliebige Grössen setzen. Es sollen nun statt $\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma \ldots$ die Ableitungen von Π' nämlich $\dfrac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ nach den entsprechenden Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ auf beiden Seiten substituirt werden, dann entsteht, wenn man das Resultat dieser Substitution auf der linken Seite vorläufig durch

$$(6.)\quad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \xi_\varrho \frac{dF'}{d\xi_\sigma}$$

bezeichnet:

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \Sigma \left\{ \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)} \right\} \frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}},$$

oder wegen (2.):

$$(7.) \qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = \frac{d\Pi'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{d\Pi'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{d\Pi'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)}.$$

Man beachte hierbei, dass $D_{\varrho\sigma}(\Pi')$ nicht gleich $D_{\sigma\varrho}(\Pi')$ ist.

Die Gleichung (7.) giebt eine ***vollständige*** Umformung der Gleichungen (1.), denn setzt man einerseits $\frac{d\Pi'}{dx_k^{(\varrho)}} = 0$, so entstehen die Gleichungen

$$(8.) \qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi') = 0,$$

deren Anzahl ebenfalls gleich n^2 ist, und nimmt man an, dass die Gleichungen (8.) erfüllt sind, so folgen aus (7.) die Gleichungen (1.) oder es müsste die Determinante der Substitutionscoefficienten verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist.

Die Gleichungen (8.), welche jetzt zur Definition der Functionen Π' gewonnen sind, werden demnach wegen (6.) auf folgende Weise erhalten:

Man bilde die Differentialquotienten von F' nach den Variabeln

$$\frac{dF'}{d\xi_1}, \quad \frac{dF'}{d\xi_2}, \quad \ldots \quad \frac{dF'}{d\xi_n},$$

multiplicire sie sämmtlich mit jeder der Variabeln ξ_k einzeln, substituire in die so entstehenden n^2 homogenen Functionen der p^{ten} Ordnung statt der Potenzen und Producte $\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}\xi_3^{\gamma}\ldots$ die entsprechenden partiellen Ableitungen $\frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ und setze die Resultate gleich Null.

Die Gleichungen (8.) sind daher lineare partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung und auch linear in ihren Coefficienten, indem jede derselben von der Form

$$(9.) \qquad \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}} a'_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

ist, wenn man die Indices $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ auf eine sofort aus der Definition hervorgehende und später noch näher anzugebende Weise passend wählt. Die Form (9.) der Gleichungen (1.) zeigt, dass sie, wie verlangt wurde, von den explicite stehenden Substitutionscoefficienten befreit sind.

§. 4.

Ueber die Form der Transformationsrelationen.

Es ist hervorzuheben, dass mit der Elimination der Substitutionscoefficienten aus den partiellen Differentialgleichungen auch die explicite stehenden Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der ursprünglichen homogenen Function F entfernt sind, indem in den Gleichungen §. 3 (9.) nur die Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F' vorkommen. Dieses führt zu einer merkwürdigen Form, welche die Transformationsrelationen annehmen können.

Geht man nämlich von einer derselben §. 2 (2.)

$$R = PQ' + P_1 Q'_1 + P_2 Q'_2 + \cdots = 0$$

aus und entwickelt, wie dort angegeben, aus derselben eine der Functionen:

$$\Pi' = -\left(P_1 \frac{Q'_1}{Q'} + P_2 \frac{Q'_2}{Q'} + \cdots\right),$$

nachdem man jedoch in R die Anzahl der Terme auf die geringstmögliche zurückgeführt hat, so dass zwischen den P, P_1, P_2, ... keine linearen Relationen mehr stattfinden, dann muss nicht allein Π' den Gleichungen

$$(1.) \qquad \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{\alpha\beta\gamma\ldots}} a'_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

Genüge leisten, sondern auch die Coefficienten von P_1, P_2, ... in Π', nämlich $\frac{Q'_1}{Q'}$, $\frac{Q'_2}{Q'}$, ... *einzeln* genommen, weil die Grössen P_1, P_2, ... nur Functionen der $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sind, und letztere in den partiellen Differentialgleichungen nicht vorkommen, also als willkürliche Constanten ihrer Integrale zu betrachten sind.

Bildet man daher die *analogen* Functionen

$$\frac{Q_1}{Q}, \quad \frac{Q_2}{Q}, \quad \ldots$$

aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F und bezeichnet irgend eine derselben durch Π (was immer durch Fortlassung des Accentes angedeutet werden soll), so müssen dieselben nicht allein den Gleichungen

$$(2.) \qquad \Sigma \frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}} a_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} = 0$$

genügen, sondern es müssen auch, nach dem der Gleichung §. 2 (4.) zu Grunde liegenden Prinzip,

$$\frac{Q'_1}{Q'} - \frac{Q_1}{Q} = 0, \quad \frac{Q'_2}{Q'} - \frac{Q_2}{Q} = 0, \quad \ldots$$

Transformationsrelationen sein. Es folgt daher zunächst, wenn man eine *vollständige* specielle Transformation eine solche nennt, in welcher genau über so viele Coefficienten der transformirten Form auf eine erlaubte Weise verfügt ist, als die Anzahl der Substitutionscoefficienten beträgt:

Theorem I.

Wenn man irgend eine vollständige specielle Transformation einer homogenen Function beliebiger Ordnung vermittelst linearer Substitutionen ausführen kann, und man ordnet die Gleichungen, welche zur Bestimmung der zu ermittelnden Coefficienten der transformirten Form dienen, nach den Potenzen und Producten dieser Coefficienten, so dass Gleichungen von der Form

$$(3.) \qquad \Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0$$

entstehen, in welcher G_1, G_2, ... die zu ermittelnden Coefficienten der transformirten Form, und $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Form bedeuten, so sind die sämmtlichen Transformationsrelationen für jede andere lineare Transformation derselben Function in den Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{Q'_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q'_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}} - \frac{Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}} = 0$$

enthalten, wofern man die Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ und $Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}$ ein und derselben Gleichung (3.) entnimmt und durch Accente die zu denselben analogen Functionen einer beliebigen transformirten Form bezeichnet.

Nach der bisherigen Annahme war p die Ordnung der homogenen Function, n die Anzahl der Variabeln, also n^2 die Anzahl der Substitutionscoefficienten und (n, p) §. 1 (1.) die Anzahl der Coefficienten von F. Setzt man daher die Anzahl der oben eingeführten G_1, G_2, ... $= \omega$, so ist

$$(5.) \qquad \omega = (n, p) - n^2,$$

und die Anzahl der Gleichungen (3.) muss, soweit sie von einander unabhängig sind, ebenso gross sein. Wenn man nun nach dem Theorem I. die Transformationsrelationen (4.) ableitet, so kann die Gesammtzahl derselben zwar grösser werden, man sieht aber leicht, dass einerseits die Anzahl der *von einander unabhängigen* nicht grösser als ω sein kann, und dass andererseits auch wirklich ω von einander unabhängige Functionen $\frac{Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}{Q_{\varkappa_1\lambda_1\mu_1\ldots}}$ existiren müssen, welche aus den Coefficienten der Gleichungen (3.) gebildet sind, widrigenfalls die letzteren von einander abhängig wären, was gegen die Voraussetzung ist. Aus diesen Entwickelungen geht ferner hervor:

Theorem II.

a) Alle von einander unabhängigen Transformationsrelationen lassen sich in ihrer einfachsten Gestalt durch Gleichungen von der Form

$$\Pi' - \Pi = 0$$

darstellen, in welchen Π' eine Function der Constanten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der transformirten Form allein und Π eine Function der Constanten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der ursprünglichen Form allein ist, und beide auf analoge Weise aus ihren Argumenten zusammengesetzt sind.

b) Diese Gleichungen sind, obwohl sie die Coefficienten der ursprünglichen und transformirten Form separirt enthalten, dennoch rational und zwar ist jede der Functionen Π' oder Π eine homogene gebrochene Function ihrer Argumente mit Zähler und Nenner von gleicher Ordnung in Bezug auf dieselben.

c) Die Anzahl der von einander unabhängigen Transformationsrelationen oder der von einander unabhängigen Functionen Π oder Π' ist gleich der Anzahl der Coefficienten der homogenen Function weniger der Anzahl der Substitutionscoefficienten.

d) Die Functionen Π' oder Π sind vollständig definirt durch ein System von n^2 simultanen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und zwar für die Functionen Π durch die Gleichungen:

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = x_\varrho \frac{dF}{dx_\sigma} = 0,$$

in welchen die Potenzen und Producte $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots$ der p^{ten} Ordnung symbolisch durch die entsprechenden $\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ ersetzt und statt ϱ und σ allmälig alle Zahlen von 1 bis n substituirt werden müssen.

Das Theorem I. wird im Allgemeinen zur Ermittelung der Functionen Π nicht verwendet werden. Wenn man aber auf eine aus dem Theorem II. hervorgehende Weise zu irgend einem System von Functionen Π gelangt ist, und man bildet aus den entsprechenden Gleichungen $\Pi' - \Pi = 0$ die Relationen Theorem I. (3.):

$$\Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0,$$

so haben die Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ in dieser Form offenbar die Eigenschaft, sich aus dem System der angegebenen Π unter blosser Vermittelung von numerischen Coefficienten zusammensetzen zu lassen. Dieses hat eine andere sehr wichtige Verwendung der *speciellen* transformirten Formen zur Folge. Man kann nämlich in Folge dessen entscheiden, ob ein solches System von Functionen Π von einander abhängige enthält oder nicht, und für den ersteren Fall

die Zusammensetzung der abhängigen aus den unabhängigen kennen lernen, es gilt nämlich

Theorem III.

Wenn man ein System von Functionen Π in Bezug auf ihre Abhängigkeit von einander untersuchen soll, so bilde man aus den entsprechenden Gleichungen $\Pi' - \Pi = 0$, für eine passend gewählte specielle transformirte Form, die Relationen:

$$\Sigma Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots} G_\varkappa G_\lambda G_\mu \ldots = 0,$$

deren Coefficienten $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ reine Functionen der angegebenen Π sind, und untersuche die Abhängigkeit dieser Gleichungen von einander in Bezug auf die Constanten $G_\varkappa$, G_λ, G_μ, ... Findet eine solche nicht statt, so sind auch die Functionen Π von einander unabhängig, sind hingegen die Gleichungen in Bezug auf die Constanten $G_\varkappa$, G_λ, G_μ, ... von einander abhängig, so findet man durch Elimination derselben aus den vorstehenden Gleichungen das Abhängigkeitsgesetz der Functionen $Q_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ und somit auch der Functionen Π von einander.

Mit Hülfe dieser Principien sind die in §. 1 (5.) angegebenen Gleichungen, welche zur Transformation gewöhnlich benutzt werden, überflüssig gemacht, und es ist die weitere Untersuchung von der Behandlung der partiellen Differentialgleichungen abhängig.

§. 5.

Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen.

Um die entwickelten partiellen Differentialgleichungen

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = x_\varrho \frac{dF}{dx_\sigma} = 0$$

aus ihrer symbolischen Form in die explicite zu übertragen, ist es zweckmässig, die Bezeichnung der gegebenen homogenen Function dahin abzuändern, dass man

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots,$$

wo Σ eine einfache Summation über alle von einander verschiedenen Glieder anzeigt, auf folgende Weise:

$$(1.) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{\varkappa\lambda\mu\ldots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

schreibt, wo $\Sigma\Sigma$ eine mehrfache Summation über alle möglichen Zahlenwerthe 1 bis n für $\varkappa$, λ, μ, ... andeutet. Wenn man beachtet, dass bei dieser Bezeichnungsweise durch die Substitution $a_\varkappa a_\lambda a_{\mu\ldots}$ für $a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ die Gleichung (1.) in

$$(2.) \qquad (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^p = \Sigma a_\varkappa a_\lambda a_\mu \ldots x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

übergeht, so folgt ohne Weiteres, dass nach der Ausführung der mehrfachen Summation die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ die entsprechenden Polynomialcoefficienten als numerische Factoren enthalten. Man kann auch bei anderen Operationen die Gleichung (2.) als symbolische Form von (1.) benutzen und ersieht dann zunächst durch Differentiation derselben nach einer der Variabeln x_σ, dass

$$(3.) \qquad \frac{dF}{dx_\sigma} = p.\Sigma\Sigma a_{\sigma\lambda\mu\ldots}x_\lambda x_\mu\ldots$$

wird, wo die mehrfache Summation sich nur über alle Werthe 1 bis n für $\lambda, \mu\ldots$ erstreckt, während der Index σ constant bleibt. Multiplicirt man alsdann die Gleichung (3.) mit x_ϱ, und betrachtet ϱ ebenfalls als constanten Index, so wird

$$x_\varrho\frac{dF}{dx_\sigma} = p\Sigma\Sigma a_{\sigma\lambda\mu\ldots}x_\varrho x_\lambda x_\mu\ldots,$$

und hierin ist für $x_\varrho x_\lambda x_\mu\ldots$ der entsprechende Differentialquotient von Π zu setzen, welcher gleich $\frac{d\Pi}{(\varrho\lambda\mu\ldots)da_{\varrho\lambda\mu\ldots}}$ ist, wenn man der Kürze halber durch $(\varrho\sigma\mu\ldots)$ den zugehörigen Polynomialcoefficienten bezeichnet und beachtet, dass $(\varrho\lambda\mu\ldots)a_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ der vollständige Coefficient von $x_\varrho x_\lambda x_\mu\ldots$ in F ist. Es folgt daher

$$(4.) \qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = p\Sigma\Sigma\frac{1}{(\varrho\lambda\mu\ldots)}\frac{d\Pi}{da_{\varrho\lambda\mu\ldots}}a_{\sigma\lambda\mu\ldots}.$$

Ich werde noch

$$(5.) \qquad \frac{1}{(\varrho\lambda\mu\ldots)}\frac{d\Pi}{da_{\varrho\lambda\mu\ldots}} = \Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$$

schreiben, dann ist das System von partiellen Differentialgleichungen das folgende:

$$(6.) \quad \begin{cases} \Sigma\Sigma\Pi_{1\lambda\mu\ldots}a_{1\lambda\mu\ldots} = 0, & \Sigma\Sigma\Pi_{2\lambda\mu\ldots}a_{1\lambda\mu\ldots} = 0, & \ldots & \Sigma\Sigma\Pi_{n\lambda\mu\ldots}a_{1\lambda\mu\ldots} = 0, \\ \Sigma\Sigma\Pi_{1\lambda\mu\ldots}a_{2\lambda\mu\ldots} = 0, & \Sigma\Sigma\Pi_{2\lambda\mu\ldots}a_{2\lambda\mu\ldots} = 0, & \ldots & \Sigma\Sigma\Pi_{n\lambda\mu\ldots}a_{2\lambda\mu\ldots} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

einzuführen und dadurch das System auf ein anderes zurückzuführen, welches eine Gleichung weniger und eine Variable weniger hat, und man muss diesen Process so lange fortsetzen können, bis man nur eine Gleichung mit einer Variabeln mehr übrig behält, als die Anzahl der Variabeln des Systemes weniger der Anzahl der Gleichungen beträgt, so dass dann im günstigsten Falle die Anzahl der gemeinschaftlichen particularen Integrale gleich dieser Differenz wird. Bei einem beliebigen System simultaner partieller Differentialgleichungen wird die angegebene Reduction der Variabeln nicht zu erreichen sein. Für das vorstehende folgt aber aus seinem Zusammenhang mit dem algebraischen Problem:

1. *Dass die Bedingungen der Coexistenz wirklich erfüllt sind und dass also das angegebene Verfahren anwendbar ist.*
2. *Dass die grösstmögliche Zahl von Lösungen in demselben erreicht ist, nämlich die Anzahl der Variabeln, weniger der Anzahl der Gleichungen, übereinstimmend mit der Anzahl* ω (§. 4 (5.)) *der Functionen, welche die Transformationsrelationen bilden.*
3. *Dass sämmtliche particularen Integrale durch rationale Functionen ihrer Argumente dargestellt werden können, welche in Bezug auf die letzteren homogen und von der* 0ten *Ordnung sind.*

Man kann den letzten Umstand an den Gleichungen selbst verificiren. Bildet man nämlich die Summe derjenigen partiellen Differentialgleichungen, in welchen beide Indices einander gleich sind, so wird

$$D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi) = 0.$$

Es ergiebt sich aber in symbolischer Form:

$$D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi) = x_1\frac{dF}{dx_1}+x_2\frac{dF}{dx_2}+\cdots+x_n\frac{dF}{dx_n},$$

was nach dem Satz über die homogenen Functionen in

$$p.F(x_1, x_2, \ldots x_n) = p.\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}\ldots = p.\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots}\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$$

übergeht, wenn man noch $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}\ldots = \frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ setzt.

Nun sei Π in Bezug auf die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von der γ^{ten} Ordnung, so folgt nach demselben Satz über die homogenen Functionen:

$$(7.)\qquad p\Sigma a_{\alpha\beta\gamma\ldots}\frac{d\Pi}{da_{\alpha\beta\gamma\ldots}} = \gamma p\Pi = D_{11}(\Pi)+D_{22}(\Pi)+\cdots+D_{nn}(\Pi),$$

folglich ist entweder $\Pi = 0$, oder $\gamma = 0$. Da aber Null als Lösung nicht an-

gesehen werden kann, so bleibt nur $\gamma = 0$ übrig, d. h. die Functionen Π sind von der 0ten Ordnung.

Wenn man die Gleichungen (6.) als gewöhnliche lineare Gleichungen behandelt, deren Unbekannte die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ sind, so hat man ein System von n^2 Gleichungen zwischen (n,p) Unbekannten, welche demnach $\omega = (n,p) - n^2$ Lösungen liefern, also ebenso viel als die Anzahl der Integrale beträgt. Bezeichnet man jene Lösungen durch $\Pi^{(1)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}, \Pi^{(2)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}, \ldots \Pi^{(\omega)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ und mit $M_1, M_2, \ldots M_\omega$ beliebige constante Multiplicatoren, so kann man als allgemeinste Lösung der linearen Gleichungen

$$(8.) \qquad \Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = M_1 \Pi^{(1)}_{\varrho\lambda\mu\ldots} + M_2 \Pi^{(2)}_{\varrho\lambda\mu\ldots} + \cdots + M_\omega \Pi^{(\omega)}_{\varrho\lambda\mu\ldots}$$

setzen. Es folgt daher:

4. *Die Auflösungen der linearen Gleichungen*

$$\Sigma\Sigma \Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} a_{\sigma\lambda\mu\ldots} = 0,$$

in Bezug auf die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als Unbekannte, lassen sich in ihrer allgemeinsten Form durch die partiellen Ableitungen einer mit ω willkürlichen constanten Parametern behafteten Function der Grössen $a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ nach denselben darstellen, dividirt durch die entsprechenden Polynomialcoefficienten.

Die Anwendung dieses Satzes auf die homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Variabeln hat mich zu den Resultaten meiner Abhandlung in diesem Journal Bd. 39, pag. 155 geführt.

Da jede der Functionen Π die Form eines ächten Bruches hat, der durch

$$\Pi = \frac{P}{Q}$$

bezeichnet werden soll, so wird

$$\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = \frac{P_{\varrho\lambda\mu\ldots} Q - Q_{\varrho\lambda\mu\ldots} P}{Q^2},$$

wo $P_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ und $Q_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ eine mit $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ (5.) analoge Bedeutung haben. Es sind aber die Gleichungen (6.) in Bezug auf die $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ homogen, daher kann man nur die Verhältnisse der letzteren ermitteln, und demnach mit Fortlassung des Nenners als Auflösung der Gleichungen

$$\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots} = P_{\varrho\lambda\mu\ldots} Q - Q_{\varrho\lambda\mu\ldots} P$$

schreiben, welche alsdann *ganze* Functionen sind. Betrachtet man die auf diese Weise definirten Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als die Coefficienten einer neuen homogenen Function der p^{ten} Ordnung, so will ich eine solche *die conjugirte Form zur ursprünglichen* nennen. Es folgt aus dem Obigen, dass die Anzahl der

in Bezug auf die Coefficienten von einander unabhängigen conjugirten Formen ω beträgt. Diese conjugirten Formen bilden eine *specielle* Classe der später zu entwickelnden zugehörigen Formen, und zeichnen sich vor den übrigen durch eine Eigenthümlichkeit aus, welche aus der Ansicht der Gleichungen (6.) sofort ersichtlich wird. Letztere bleiben nämlich unverändert, wenn man die Grössen $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ mit den entsprechenden $a_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ vertauscht. Betrachtet man daher in denselben die Grössen $a_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ als Unbekannte und stellt ihre Lösungen in Functionen der $\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}$ dar, so sind dieselben genau dieselben Functionen der letzteren, welche früher die letzteren von den ersteren waren, daher folgt:

5. *Die conjugirten Formen haben die Eigenschaft, dass sich die ursprüngliche Form als eine conjugirte zu jeder derselben darstellen lässt, wenn man letztere als eine ursprüngliche ansieht.*

Und

6. *Es giebt ein ganzes System von* $(\omega-1)$ *in Bezug auf die Coefficienten unabhängigen Formen, welche, der ursprünglichen coordinirt und mit ihr in Bezug auf die Variabeln von derselben Ordnung, die Eigenschaft haben, dass sie neben der ursprünglichen zu jeder conjugirten Form der letzteren conjugirt sind, und welche man, wenn die unter* (8.) *angegebenen ursprünglich conjugirten bekannt sind, sofort dadurch bilden kann, dass man die letzteren aus den Coefficienten einer der conjugirten zusammensetzt.*

Ich habe die Wichtigkeit der conjugirten Formen für die homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln in meiner Abhandlung (dieses Journal Bd. 55, pag. 68) dargethan, anderweitig sind dieselben als selbstständige Formen noch gar nicht untersucht, noch viel weniger ist ihre Existenz im Allgemeinen, welche durch die vorstehenden Entwickelungen klar hervortritt, irgendwo erwiesen worden.

§. 6.

Ueber die Invarianten der homogenen Functionen.

Die weitere Entwickelung der Theorie hängt davon ab, dass man die Zähler und Nenner der betrachteten Functionen Π selbstständig definirt. Diese Zähler und Nenner sind, wie ich jetzt zeigen werde, diejenigen ganzen Functionen der Coefficienten einer homogenen Function, welche mit dem Namen *Invarianten* bezeichnet werden. Zuvor bemerke ich jedoch, dass diese Benennung eigentlich im wahren Sinne des Wortes den Functionen Π selbst zu-

kommt, insofern als durch die vorstehende Theorie gezeigt worden ist, dass die Transformationsrelationen in den Formen

$$\Pi' - \Pi = 0$$

dargestellt werden, was nichts Anderes aussagt, als *dass die Functionen Π die Eigenschaft haben, absolut unverändert zu bleiben, wenn man dieselben aus den Coefficienten irgend einer transformirten Form bildet;* es dürfte daher die Benennung *absolute Invarianten*, welche ich in der oben citirten Abhandlung über die cubischen Functionen für dieselben vorgeschlagen habe, zweckmässig sein, um sie von den vorher definirten Invarianten zu unterscheiden. Die Definition der letzteren als Zähler und Nenner der absoluten Invarianten ist aber viel naturgemässer als die übliche, weil mit derselben auch ihre Existenz dargethan ist, und es wird nach dem Gange der gegenwärtigen Entwickelungen die sonst übliche Definition, welche ihre Existenz nur empirisch voraussetzt, als eine ihrer Haupteigenschaften erwiesen werden.

Es ist gezeigt worden, dass jede absolute Invariante Π die Form

$$(1.) \qquad \Pi = \frac{P}{Q}$$

hat, worin P und Q ganze homogene Functionen der Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ von F sind, welche den partiellen Differentialgleichungen

$$D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

oder wenn man den Werth für Π aus (1.) substituirt, den folgenden:

$$(2.) \qquad QD_{\varrho\sigma}(P) - PD_{\varrho\sigma}(Q) = 0$$

Genüge leisten. Sollen Zähler und Nenner von Π bestimmt definirbare Functionen sein, so muss man sie von jedem gemeinschaftlichen Factor befreit denken, denn mit einem Factor versehen können sie jeden beliebigen Werth annehmen. Beachtet man nun, dass (2.) eine identische Gleichung ist, ferner dass $D_{\varrho\sigma}(P)$ und $D_{\varrho\sigma}(Q)$ nach ihrer Definition zugleich mit P und Q ganze Functionen sind und zwar respective von derselben Ordnung wie P und Q, so folgt, wenn man zufolge (2.):

$$(3.) \qquad \frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P} = \frac{D_{\varrho\sigma}(Q)}{Q} = \lambda_{\varrho\sigma}$$

setzt, dass nicht allein diese Quotienten ohne Rest aufgehen müssen, sondern auch *dass ihr Werth $\lambda_{\varrho\sigma}$ von den Argumenten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der Functionen P und Q unabhängig ist.* Die Beschränkung, dass P und Q keinen gemeinschaftlichen Factor haben, kann in Ansehung solcher Factoren, welche selbst Zähler oder

Nenner der übrigen Functionen Π sind, aufgehoben werden, denn wenn P_1 einen solchen bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{D_{\varrho\sigma}(PP_1)}{PP_1} = \frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P} + \frac{D_{\varrho\sigma}(P_1)}{P_1},$$

dass mit $\frac{D_{\varrho\sigma}(P)}{P}$ und $\frac{D_{\varrho\sigma}(P_1)}{P_1}$ zugleich $\frac{D_{\varrho\sigma}(PP_1)}{PP_1}$ von den Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ unabhängig wird. Im Uebrigen ist klar, dass, welche Werthe auch die Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}$ sonst haben mögen, die zur Darstellung von Π erforderlichen Functionen P und Q immer aus den Gleichungen (3.) entnommen werden können. Aber die Gleichungen (3.) sind wiederum simultane partielle Differentialgleichungen, welche neben einander bestehen sollen, und es lässt sich nachweisen, *dass die Bedingungen der Coexistenz nur für ganz bestimmte Werthe der Grössen* $\lambda_{\varrho\sigma}$ *erfüllt sind.* Um diese Werthe auf dem einfachsten Wege zu erhalten, schlage ich folgendes Verfahren ein. In Folge der Constanz der Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}$ müssen dieselben Werthe auch für die zu (3.) analogen Differentialgleichungen:

$$(4.) \qquad \frac{D_{\varrho\sigma}(P')}{P'} = \lambda_{\varrho\sigma}$$

gelten, welche aus den Coefficienten $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ der transformirten Form gebildet sind. Diese Gleichungen kann man vermittelst der identischen Gleichung §. 3 (7.), welche auf die Function P' angewandt die folgende ist:

$$(5.) \qquad D_{\varrho\sigma}(P') = \frac{dP'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{dP'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dP'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)},$$

umformen. Setzt man nämlich der Kürze halber

$$(6.) \qquad L = \log P',$$

so gehen wegen (5.) die Gleichungen (4.) über in

$$(7.) \qquad \frac{dL}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{dL}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dL}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)} = \lambda_{\varrho\sigma},$$

welche Gleichungen nach einem bekannten Theorem der Determinantentheorie nebeneinander bestehen und sofort integrirt werden können, wenn man

$$\lambda_{\varrho\sigma} = 0$$

setzt, so oft ϱ *und* σ *von einander verschieden sind, und ausserdem*

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \cdots = \lambda_{nn}.$$

Alsdann aber zeigen die Gleichungen, dass L nur eine Function der Substitutionscoefficienten ist.

In der That, wenn

$$(8.) \qquad r = \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)}$$

die Determinante der Substitution bezeichnet, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$(9.) \qquad \frac{dr}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{dr}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dr}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)} = r \text{ oder } 0,$$

je nachdem ϱ und σ gleich oder verschieden sind, und wenn man der Kürze halber

$$(10.) \qquad l = \lambda \log r$$

schreibt, wo λ einen beliebigen Zahlenfactor bedeutet, so gehen dieselben in

$$(11.) \qquad \frac{dl}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{dl}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{dl}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)} = \lambda \text{ oder } 0$$

über: es stimmt aber (11.) mit (7.) überein, nachdem man auch in (7.):

$$(12.) \qquad \begin{cases} \lambda_{\varrho\varrho} = \lambda_{\sigma\sigma} = \cdots = \lambda, \\ \lambda_{\varrho\sigma} = 0 \end{cases}$$

gesetzt hat, und es ist alsdann:

$$L = l + C.$$

Man setze jetzt in die letzte Gleichung die Werthe für L und l aus (6.) und (10.), so entsteht:

$$P' = C.r^{\lambda},$$

wo C von den Substitutionscoefficienten unabhängig ist. Die Bestimmung von C erfolgt leicht vermittelst der schon in §. 2 angewandten evidenten Substitution:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad \ldots \quad x_n = \xi_n,$$

für welche die Determinante gleich 1 ist, und welche daher die Gleichung

$$P = C$$

liefert, also giebt die vorstehende Theorie schliesslich die Gleichung:

$$(13.) \qquad P' = P.r^{\lambda} = P.(\Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)})^{\lambda}.$$

Es bleibt noch der Beweis zu führen, dass man auf keine andere Weise als durch die Gleichungen (12.) den Bedingungen der Coexistenz genügen kann. Zu diesem Ende entnehme man aus (7.) das System von n Gleichungen, welches die Unbekannten $\frac{dL}{dx_1^{(\varrho)}}, \frac{dL}{dx_2^{(\varrho)}}, \cdots \frac{dL}{dx_n^{(\varrho)}}$ enthält, und löse es nach denselben auf, dann erhält man bekanntlich:

$$\frac{dL}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{1}{r}\left\{\frac{dr}{dx_k^{(1)}} \lambda_{\varrho 1} + \frac{dr}{dx_k^{(2)}} \lambda_{\varrho 2} + \cdots + \frac{dr}{dx_k^{(n)}} \lambda_{\varrho n}\right\}.$$

Ebenso aus dem System σ:

$$\frac{dL}{dx_k^{(\sigma)}} = \frac{1}{r}\left\{\frac{dr}{dx_k^{(1)}} \lambda_{\sigma 1} + \frac{dr}{dx_k^{(2)}} \lambda_{\sigma 2} + \cdots + \frac{dr}{dx_k^{(n)}} \lambda_{\sigma n}\right\}.$$

Die Bedingungen der Integrabilität erfordern, dass die erste nach $x_k^{(\sigma)}$ die zweite nach $x_k^{(\varrho)}$ differentiirt identisch übereinstimmende Resultate liefern. Es muss daher

$$(14.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\frac{d\log r}{dx_k^{(\sigma)}}}{dx_k^{(1)}}\lambda_{1\varrho}+\cdots+\frac{d\frac{d\log r}{dx_k^{(\sigma)}}}{dx_k^{(\varrho)}}\lambda_{\varrho\varrho}+\cdots \\ &\qquad -\left(\frac{d\frac{d\log r}{dx_k^{(\varrho)}}}{dx_k^{(1)}}\lambda_{1\sigma}+\cdots+\frac{d\frac{d\log r}{dx_k^{(\varrho)}}}{dx_k^{(\sigma)}}\lambda_{\sigma\sigma}+\cdots\right)=0 \end{aligned} \right.$$

sein, und dieser Gleichung muss durch Werthe für $\lambda_{\varrho\sigma}$ genügt werden, welche wegen ihrer Definition (3.) auch von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind. Man überzeugt sich nun leicht davon, dass mit Ausnahme der einander gleichen Coefficienten von $\lambda_{\varrho\varrho}$ und $\lambda_{\sigma\sigma}$ die $2n-2$ übrigen Coefficienten der $\lambda_{\varrho\sigma}$ in (14.) gänzlich von einander unabhängige Grössen sind, denn die Coefficienten der $\lambda_{\varrho\sigma}$ in $\frac{dL}{dx_k^{(\varrho)}}$ und $\frac{dL}{dx_k^{(\sigma)}}$ sind als erste Unterdeterminanten überhaupt von einander unabhängig, durch die Differentiation derselben nach nur zwei Constanten $x_k^{(\varrho)}$ und $x_k^{(\sigma)}$ entsteht aber eine zu geringe Zahl von zweiten Unterdeterminanten, um zwischen denselben eine lineare Relation herbeizuführen. Aus diesen Gründen kann die Gleichung (14.) nur erfüllt werden, wenn man $\lambda_{\varrho\varrho}=\lambda_{\sigma\sigma}$ und $\lambda_{\varrho\sigma}=0$ setzt.

Mit Berücksichtigung dieser Werthe zerfallen die Differentialgleichungen (3.) in zwei Gruppen, je nachdem sie mit gleichen oder ungleichen Indices gebildet werden, d. h. es ist:

$$(15.)\quad \left\{ \begin{aligned} D_{11}(P)=D_{22}(P)=\cdots=D_{nn}(P)&=\lambda.P, \\ D_{\varrho\sigma}(P)&=0. \end{aligned} \right.$$

Die Grösse λ bleibt in diesen Gleichungen völlig unbestimmt; in der That wird man, da die Anzahl der von einander unabhängigen Functionen P um 1 grösser sein muss, als die Anzahl der Functionen Π, auch nur noch n^2-1 Gleichungen zur Definition gebrauchen können, und daher in (15.) von dem gemeinschaftlichen Werthe λP der Grössen $D_{\varrho\varrho}(P)$ absehen. Will man hingegen über die Ordnung der Function P verfügen und setzt dieselbe gleich γ, so kann man hier ganz dieselbe Gleichung ableiten, welche in §. 5 (7.) gegeben ist, nämlich

$$(16.)\quad D_{11}(P)+D_{22}(P)+\cdots+D_{nn}(P)=p\gamma P.$$

Diese Gleichung geht wegen (15.) in

$$n\lambda P = p\gamma P$$

über und giebt alsdann

$$(17.) \qquad \lambda = \frac{p\gamma}{n}.$$

Es entspricht also jeder Invariante bestimmten Grades ein durch (17.) bestimmtes λ, aber sie werden sämmtlich den Gleichungen (15.) ohne das letzte Glied λP genügen.

Die Gleichung (13.) in Verbindung mit (16.), ferner die Gleichungen (15.) geben aber das folgende

Theorem IV.

a) Alle Invarianten haben die Eigenschaft, bis auf einen von den Substitutionscoefficienten abhängigen Factor, welcher eine Potenz der Determinante der letzteren ist, unverändert zu bleiben, wenn man sie aus den Coefficienten einer beliebigen transformirten Form bildet, und zwar ist

$$P' = r^{\frac{p\gamma}{n}}.P,$$

wenn γ die Ordnung der Invariante P, p die Ordnung der homogenen Function und n die Anzahl ihrer Variabeln bezeichnet.

b) Dieselben Invarianten genügen dem System von partiellen simultanen Differentialgleichungen:

$$D_{11}(P) = D_{22}(P) = \cdots = D_{nn}(P),$$

$$D_{\varrho\sigma}(P) = 0,$$

deren Anzahl n^2-1 beträgt, und sind durch dasselbe bestimmt, so dass die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen desselben mit der Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten übereinstimmt und gleich $(n,p)-n^2+1$ ist.

Der Theil *a)* des Theorems ist die übliche Definition der Invarianten. dasselbe als Definition zu gebrauchen ist aber nicht statthaft, weil die Existenz der Invarianten in allen Fällen dabei stillschweigend vorausgesetzt wird. Auch kann man aus der Form der Gleichungen:

$$P' = r^{\lambda}.P$$

nur beweisen, dass die Anzahl derselben nicht grösser sein kann als

$$\omega+1 = (n,p)-n^2+1,$$

indem man nach Aufstellung sämmtlicher Gleichungen dieser Art für irgend eine specielle aber vollständige Transformation wie in §. 4 Theorem I., die

Grössen P' durch $(n,p)-n^2$ von einander unabhängige Constanten G_k ausdrücken und daher nach Elimination von r aus sämmtlichen Gleichungen auch die Grössen G_k sämmtlich eliminiren könnte, wenn die Anzahl der Invarianten grösser als $\omega+1$ wäre.

Aus der vorstehenden Theorie folgt aber, dass die verlangte Anzahl von Invarianten wirklich existirt, da man den ω Functionen Π die Form $\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q}, \ldots \frac{P_\omega}{Q}$ geben kann, welche alle den gemeinschaftlichen Nenner Q haben, und die Functionen P_k nebst Q alsdann den Bedingungen des Theorems IV. genügen. Ich halte es hiernach nicht für überflüssig, das Theorem noch in folgender Fassung auszusprechen, welche dem Standpunkt der vorliegenden Untersuchung mehr angemessen ist.

Theorem V.

Wenn man, um zwei beliebige allgemeine homogene Functionen der p^{ten} Ordnung

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \textit{und} \quad F'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$$

durch lineare Substitutionen in einander zu transformiren, die (n,p) Gleichungen:

$$F_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$$

bildet, welche nach Einsetzung der Substitution in F, durch Vergleichung mit den Coefficienten von F' entstehen, und zu denselben noch die Gleichung:

$$\Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)} = r$$

hinzufügt, in welcher r eine beliebig gegebene Constante bedeutet, so kann man aus sämmtlichen $(n,p)+1$ Gleichungen durch Elimination der Substitutionscoefficienten $(n,p)+1-n^2$ Relationen zwischen den Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$, $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und r ableiten, welche sämmtlich die Form

$$P' - r^i P = 0$$

haben, wo P nur eine Function der Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ und P' die analoge Function der Grössen $a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ist, und beide ganze Functionen ihrer Argumente sind.

§. 7.

Ueber die Existenz einer Invariante der homogenen Functionen zweiter Ordnung und der binären Functionen dritter Ordnung.

Es ist bereits im §. 1 entwickelt worden, dass die ursprünglichen Transformationsgleichungen

$$(1.) \qquad F_{\alpha\beta\gamma\ldots} = a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}$$

von einander abhängig werden, wenn die Determinante der Substitutionscoefficienten verschwindet. Giebt man daher den Transformationsproblemen die Fassung des Theoremes V., fügt also den Gleichungen (1.) noch die folgende:

$$(2.) \qquad \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)} = r$$

als algebraische Gleichung hinzu, indem man r eine gegebene Constante bedeuten lässt, so kann der Fall eintreten, dass die Gleichungen (1.) und (2.) zusammen betrachtet von einander abhängig werden, während das System (1.) allein es nicht ist.

Die Criterien einer solchen Abhängigkeit liefert aber das System partieller linearer Differentialgleichungen:

$$(3.) \qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0, \qquad D_{\varrho\varrho}(\Pi) = \lambda \Pi,$$

welches immer aus den Gleichungen (1.) und (2.) abgeleitet werden kann, wenn sie von einander abhängig sind, und es bleibt in jedem Falle zu untersuchen, ob diese Gleichungen eine Lösung Π zulassen oder nicht. In dieser Lage befinden sich die drei Ausnahmefälle der allgemeinen Theorie, welche in §. 1 erwähnt sind, nämlich, wenn die gegebene homogene Function entweder eine lineare, oder eine quadratische für eine beliebige Anzahl von Veränderlichen, oder endlich eine binäre der dritten Ordnung ist.

Was nun zunächst den ersten Fall anbetrifft, so überzeugt man sich leicht durch Aufstellung der Gleichung (3.), dass die alleinige Lösung $\Pi = 0$ ist, *dass also eine einzige lineare Function keine Invariante hat*, ich gehe also gleich zum zweiten Falle über:

Es sei

$$(4.) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

eine gegebene homogene Function der zweiten Ordnung, dann gehen die Gleichungen (3.) zufolge §. 5 (4.) über in

$$(5.) \qquad 2\Sigma \Pi_{\varrho\mu} a_{\varrho\mu} = \lambda \Pi, \qquad \Sigma \Pi_{\varrho\mu} a_{\sigma\mu} = 0,$$

wo ϱ und σ immer constante und von einander verschiedene Indices sind, und wegen §. 5 (5.)

$$(6.) \qquad \Pi_{\varrho\varrho} = \frac{d\Pi}{da_{\varrho\varrho}}, \qquad \Pi_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{2} \frac{d\Pi}{da_{\varrho\sigma}}$$

ist. Die Anzahl der Gleichungen (5.) ist n^2, die der Grössen $\Pi_{\varkappa\lambda}$ gleich $\frac{n(n+1)}{2}$, aber aus dem bekannten Satze, dass die Auflösungen eines Systems von linearen Gleichungen, welches in Bezug auf die Diagonale symmetrisch ist, wiederum ein in Bezug auf die Diagonale symmetrisches System bilden, geht hervor.

dass das folgende aus (5.) entnommene System von n Gleichungen:

$$\Pi_{\varrho 1} a_{\varkappa 1} + \Pi_{\varrho 2} a_{\varkappa 2} + \cdots + \Pi_{\varrho n} a_{\varkappa n} = \frac{\lambda}{2} \Pi \text{ oder } 0,$$

in welchen $\varkappa$ allmälig die Werthe 1 bis n annimmt, nach seiner Auflösung denselben Werth für $\Pi_{\varrho\sigma}$ giebt, den man durch Auflösung des analogen die Grössen $\Pi_{\sigma 1}, \Pi_{\sigma 2}, \ldots \Pi_{\sigma n}$ bestimmenden Systems für $\Pi_{\sigma\varrho}$ finden würde; daher reduciren sich die n^2 Gleichungen (5.) durch Auflösung nach den Grössen $\Pi_{\varkappa i}$ auf $\frac{n(n+1)}{2}$, und wenn man nach sehr bekannter Weise

$$(7.) \quad \begin{cases} \Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \\ \Delta_{\varrho\varrho} = \dfrac{d\Delta}{da_\varrho}, \qquad \Delta_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \dfrac{d\Delta}{da_{\varrho\sigma}} \end{cases}$$

setzt, so werden diese $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen:

$$(8.) \quad \Pi_{\varrho\sigma} = \frac{\lambda}{2} \frac{\Pi}{\Delta} \Delta_{\varrho\sigma}.$$

Mit Berücksichtigung von (6.) und (7.) folgt hieraus

$$d\Pi = \frac{\lambda}{2} \frac{\Pi}{\Delta} d\Delta,$$

wenn d totale Differentiation nach den Grössen $a_{\varkappa\lambda}$ andeutet, also durch Integration:

$$(9.) \quad \Pi = \Delta^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Es existirt also eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (5.), und sie ist eine beliebige Potenz der Determinante Δ, ausserdem ist erwiesen, dass es keine andere Lösung giebt. Soll Π rational sein, so muss für λ eine gerade Zahl genommen werden, und überdies ist zufolge §. 6 (17.)

$$\lambda = \frac{2\gamma}{n},$$

wenn γ die Ordnung von Π andeutet. Der einfachste Fall $\lambda = 2$ giebt selbstverständlich $\gamma = n$ und $\Pi = \Delta$, daher folgt, dass

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

die einzige einfache Invariante der quadratischen Formen ist, und dass die Gleichung

$$(10.) \quad \Delta' = r^2 . \Delta$$

das alleinige Eliminationsresultat der Substitutionscoefficienten aus den Gleichungen (1.) und (2.) im gegenwärtigen Falle ist.

Eine ähnliche Behandlung lassen die binären Formen dritter Ordnung zu, für welche man die Bezeichnung der Function dadurch erleichtern kann, dass man setzt:

$$(11.) \qquad F(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3.$$

Die Anzahl der Gleichungen (1.) und (2.) reducirt sich auf fünf, die Anzahl der Substitutionscoefficienten auf vier, daher weiss man zum Voraus, dass mindestens eine Lösung existiren muss. Die Differentialgleichungen (3.) gehen in folgende über:

$$(12.) \qquad \begin{cases} \Pi_0 a_0 + 2\Pi_1 a_1 + \Pi_2 a_2 = \frac{\lambda}{3} \Pi, \\ \Pi_0 a_1 + 2\Pi_1 a_2 + \Pi_2 a_3 = 0, \\ \Pi_1 a_0 + 2\Pi_2 a_1 + \Pi_3 a_2 = 0, \\ \Pi_1 a_1 + 2\Pi_2 a_2 + \Pi_3 a_3 = \frac{\lambda}{3} \Pi, \end{cases}$$

wenn man nach §. 5 (5.)

$$\Pi_0 = \frac{d\Pi}{da_0}, \quad \Pi_1 = \tfrac{1}{3} \frac{d\Pi}{da_1}, \quad \Pi_2 = \tfrac{1}{3} \frac{d\Pi}{da_2}, \quad \Pi_3 = \frac{d\Pi}{da_3}$$

setzt. Löst man zunächst die Gleichungen (12.) nach diesen Grössen auf, indem man zuerst aus der ersten und zweiten Π_0, aus der dritten und vierten Π_3 eliminirt und die alsdann sich ergebenden Werthe für Π_1 und Π_2 in die zweite und dritte substituirt, so erhält man, wenn der Kürze halber

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird:

$$\Pi_0 = \frac{\lambda}{3} \Pi \frac{2a_2 C - a_3 B}{4AC - B^2}, \quad \Pi_1 = \frac{\lambda}{3} \Pi \frac{a_2 B - 2a_1 C}{4AC - B^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\lambda}{3} \Pi \frac{a_1 B - 2a_2 A}{4AC - B^2},$$

$$\Pi_3 = \frac{\lambda}{3} \Pi \frac{2a_1 A - a_0 B}{4AC - B^2}.$$

Aber es ist a priori erwiesen, dass diese vier Grössen die partiellen Ableitungen *einer* Function sind, daher müssen die Zähler derselben, abgesehen von constanten Factoren, die Ableitungen des Nenners sein, und es folgt in der That, wenn man

$$4AC - B^2 = \Delta$$

setzt:

$$\Pi_0 = \frac{\lambda}{6} \frac{\Pi}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_0}, \quad 3\Pi_1 = \frac{\lambda}{6} \frac{\Pi}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_1}, \quad 3\Pi_2 = \frac{\lambda}{6} \frac{\Pi}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_2}, \quad \Pi_3 = \frac{\lambda}{6} \frac{\Pi}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_3},$$

wie man sich durch eine nachträgliche Rechnung überzeugen kann. Diese Gleichungen lassen sich in

$$d\Pi = \frac{\lambda}{6}\frac{\Pi}{\Delta}d\Delta$$

zusammenfassen und geben

$$(13.) \qquad \Pi = \Delta^{\frac{\lambda}{6}}$$

als einzige Lösung, welche demnach eine beliebige Potenz von $\Delta = 4AC - B^2$ ist. Soll sie rational sein, so muss λ durch 6 theilbar sein. Zufolge §. 6 (17.) ist $\lambda = \frac{3\gamma}{2}$, wenn γ die Ordnung von Π ist, und der einfachste Fall $\lambda = 6$, $\gamma = 4$, giebt

$$\Delta = 4AC - B^2$$

als einzige einfachste Invariante und

$$\Delta' = r^6\Delta$$

als alleiniges Eliminationsresultat der Substitutionscoefficienten aus den Gleichungen (1.) und (2.) im vorliegenden Fall.

§. 8.

Verallgemeinerung der Theorie für die gleichzeitige Transformation eines Systemes homogener Functionen.

Die bisher entwickelte Theorie bildet nur den speciellsten Fall einer viel allgemeineren, an welche sich die Entwicklungen gleich hätten anknüpfen lassen, wenn nicht der einfacheren Darstellungsweise wegen der eingeschlagene Weg den Vorzug verdiente. Die Verallgemeinerung ist aber jetzt nothwendig, um selbst den speciellen Fall weiter durchzuführen.

„Es seien gegeben die folgenden m homogenen Functionen von beliebigen Ordnungen, aber alle von denselben n Variabeln:

$$(1.) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum\limits_{(1)} a_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \dots, \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum\limits_{(2)} a_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \dots, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum\limits_{(m)} a_{\alpha\beta\gamma\dots} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \dots, \end{cases}$$

ich will dieses System kurz das *Functionensystem F* nennen, ferner m andere Functionen der Variabeln ξ_k respective von denselben Ordnungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} F_1'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum\limits_{(1)} a'_{\alpha\beta\gamma\dots}\, \xi_1^{\alpha}\, \xi_2^{\beta}\, \xi_3^{\gamma} \dots, \\ F_2'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum\limits_{(2)} a'_{\alpha\beta\gamma\dots}\, \xi_1^{\alpha}\, \xi_2^{\beta}\, \xi_3^{\gamma} \dots, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_m'(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \sum\limits_{(m)} a'_{\alpha\beta\gamma\dots}\, \xi_1^{\alpha}\, \xi_2^{\beta}\, \xi_3^{\gamma} \dots, \end{cases}$$

welches System das *Functionensystem F'* genannt werden soll, sämmtliche Functionen in (1.) und (2.) seien ganz allgemein; man soll die Bedingungen zwischen ihren Coefficienten finden, unter welchen sich beide Functionensysteme durch dieselben linearen Substitutionen in einander transformiren lassen, so dass jede i^{te} Function des einen Systemes gleichzeitig in die i^{te} Function des anderen Systemes übergeht."

Bezeichnet man respective durch

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_m$$

die Ordnungen der einzelnen Functionen und setzt, wie in §. 1,

$$(3.)\qquad (n, p_i) = \frac{n(n+1)\dots(n+p_i-1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots p_i},$$

so ist die Anzahl der ursprünglichen Transformationsgleichungen:

$$(4.)\qquad \underset{(i)}{F_{\alpha\beta\gamma\dots}} = \underset{(i)}{a'_{\alpha\beta\gamma\dots}}$$

gleich

$$(n, p_1)+(n, p_2)+\dots+(n, p_m),$$

und daher die Anzahl der fraglichen Bedingungen:

$$(5.)\qquad \Omega = (n, p_1)+(n, p_2)+\dots+(n, p_m)-n^2.$$

Diese Zahl ist im Allgemeinen positiv; wenn *alle* Functionen linear sind und $m < n$ angenommen wird, ist sie negativ; für $m = n$ wird sie in diesem Falle gleich Null; ausserdem ist sie nur noch in einem ganz speciellen Falle negativ, nämlich wenn das ganze Functionensystem aus nur zwei Functionen und zwar einer von der zweiten Ordnung und einer linearen besteht, und in diesem Falle für $n = 3$ wieder gleich Null.

Zu den Bedingungen, welche das Problem verlangt, gehören schon die im Vorhergehenden definirten Transformationsrelationen, nämlich diejenigen, welche die Coefficienten je eines Functionenpaares beider Systeme allein enthalten, ihre Anzahl beträgt für jede Function F_i:

$$\omega_i = (n, p_i)-n^2.$$

Daher bleiben nur noch

$$\Omega_1 = \Omega - ((n, p_1) - n^2) - ((n, p_2) - n^2) - \cdots - ((n, p_m) - n^2)$$

Bedingungen übrig, welche die Coefficienten von zwei oder mehreren Functionen gemischt enthalten, und welche *simultane Transformationsrelationen* genannt werden sollen. Mit Berücksichtigung von (5.) geht daher die Anzahl der simultanen Relationen in

$$(6.) \qquad \Omega_1 = (m-1)n^2$$

über, doch ist diese Zahl nur die geringste, weil sich diese Relationen mit den einfachen immer wieder verbinden lassen, und dadurch wieder andere, wenn auch von einander abhängige, simultane Relationen geben. Ausserdem ist bei dieser Bestimmung vorausgesetzt, dass jede Function des Systemes einfache Transformationsrelationen besitzt, also nach dem Früheren, dass keine derselben linear oder von der zweiten Ordnung ist. Auf analoge Weise kann man auch die Anzahl derjenigen simultanen Relationen bestimmen, welche nur die Coefficienten von zwei, drei oder mehreren der gegebenen Functionen gemischt enthalten.

Die Auflösung des vorliegenden Problemes erfolgt nun in ganz derselben Weise, wie die des einfachen und es bleiben alle in §. 2 und §. 3 dargestellten Sätze genau in derselben Fassung gültig, so dass eine Wiederholung derselben überflüssig wäre. Demzufolge gelangt man zu dem in §. 2 entwickelten analogen Probleme:

„Diejenigen Functionen Π' der Coefficienten des Functionensystemes F' zu ermitteln, welche von den Substitutionscoefficienten unabhängig sind."

Hierzu ist wieder erforderlich, die folgenden n^2 Bedingungen

$$\frac{d\Pi'}{dx_\varrho^{(\sigma)}} = 0$$

zu erfüllen, welche jetzt auf Gleichungen von der Form:

$$(7.) \quad \left\{ \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{(1)\alpha\beta\gamma\ldots}} \frac{da'_{(1)\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} + \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{(2)\alpha\beta\gamma\ldots}} \frac{da'_{(2)\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} + \cdots + \Sigma \frac{d\Pi'}{da'_{(m)\alpha\beta\gamma\ldots}} \frac{da'_{(m)\alpha\beta\gamma\ldots}}{dx_\varrho^{(\sigma)}} = 0 \right.$$

führen, während nach §. 3 (2.) nur einer dieser Summanden erforderlich war.

Bezeichnet man demnach mit

$$(8.) \quad D_{(1)\varrho\sigma}(\Pi'), \quad D_{(2)\varrho\sigma}(\Pi'), \quad \ldots \quad D_{(m)\varrho\sigma}(\Pi')$$

analoge Ausdrücke für sämmtliche Functionen des Systemes F', wie in §. 3 (6.)

$D_{\varrho\sigma}(\Pi')$ für eine derselben war, so erhält zufolge (7.) auch die umgeformte Gleichung §. 3 (7.), statt *eines* der unter (8.) gegebenen Ausdrücke mit partiellen Differentialquotienten, *die einfache Summe derselben*, nämlich

$$(9.)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi') \\ \qquad = \dfrac{d\Pi'}{dx_1^{(\varrho)}}x_1^{(\sigma)}+\dfrac{d\Pi'}{dx_2^{(\varrho)}}x_2^{(\sigma)}+\cdots+\dfrac{d\Pi'}{dx_n^{(\varrho)}}x_n^{(\sigma)}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (9.) folgt nun, *dass zur Definition der Functionen Π' die partiellen Differentialgleichungen*

$$(10.)\quad \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi')+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi') = 0$$

an Stelle der früher aus einem Summanden derselben bestehenden eintreten.

Die Gleichungen (10.), welche weder die Substitutionscoefficienten noch die Coefficienten der ursprünglichen Formen enthalten, geben auch hier den Satz, *dass sämmtliche Transformationsrelationen die Form*

$$\Pi'-\Pi = 0$$

haben, wo Π' und Π analoge aus den Coefficienten beider Functionensysteme geformte Ausdrücke sind, von denen jeder nur die Coefficienten eines Systemes enthält und eine rationale gebrochene Function derselben ist.

Es genügen demnach die Functionen Π den Differentialgleichungen

$$(11.)\quad \underset{(1)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi)+\underset{(2)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi)+\cdots+\underset{(m)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

welche aus den Coefficienten des Functionensystemes F gebildet sind.

Aus §. 5 (4.) folgt, dass, in expliciter Form geschrieben, wenn man die Bezeichnung des §. 5

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = \underset{(i)}{\Sigma\Sigma} a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu \ldots$$

einführt,

$$(12.)\quad \underset{(i)}{D}_{\varrho\sigma}(\Pi) = p_i \underset{(i)}{\Sigma\Sigma}\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}a_{\sigma\lambda\mu\ldots}$$

ist, wo

$$(13.)\quad \underset{(i)}{\Pi}_{\varkappa\lambda\mu\ldots} = \frac{1}{(\varkappa\lambda\mu\ldots)}\frac{d\Pi}{\underset{(i)}{da}_{\varkappa\lambda\mu\ldots}}$$

gesetzt ist, und $(\varkappa\lambda\mu\ldots)$ den zu $\underset{(i)}{a}_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ zugehörigen Polynomialcoefficienten bedeutet. Man kann daher die Gleichungen (11.) explicite auf folgende Weise darstellen:

$$(14.)\quad p_1\underset{(1)}{\Sigma\Sigma}\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}\underset{(1)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots}+p_2\underset{(2)}{\Sigma\Sigma}\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}\underset{(2)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots}+\cdots+p_m\underset{(m)}{\Sigma\Sigma}\Pi_{\varrho\lambda\mu\ldots}\underset{(m)}{a}_{\sigma\lambda\mu\ldots} = 0.$$

§. 9.

Ueber simultane Invarianten.

Es sollen, wie in §. 6, diejenigen Functionen Π, aus welchen sich die Transformationsrelationen eines Functionensystemes in der in §. 8 angegebenen Weise bilden lassen, *absolute simultane Invarianten* genannt werden, wenn sie aus den Coefficienten von zwei oder mehreren Functionen des Systemes zusammengesetzt sind. Die Anzahl sämmtlicher absoluten simultanen Invarianten des Functionensystemes, welche von einander und von den absoluten einfachen Invarianten unabhängig sind, bestimmt sich nach §. 8 aus der Anzahl der gesammten Coefficienten des Functionensystemes, weniger der Anzahl der Substitutionscoefficienten, wenn man die Anzahl der einfachen absoluten Invarianten in Abzug gebracht hat, und diese Zahl reducirt sich noch weiter auf eine übrigens leicht in jedem Falle ersichtliche Weise, wenn sich lineare oder quadratische Functionen im Systeme befinden.

Um die Zähler und Nenner von Π einzeln zu untersuchen, sei

$$\Pi = \frac{P}{Q},$$

wo P und Q ganze homogene Functionen der Coefficienten des Functionensystemes F bedeuten, dann ist zunächst klar, dass die Anzahl der von einander unabhängigen P und Q zusammengenommen immer um eine Einheit grösser ist als die Anzahl der Functionen Π, da man alle Functionen Π nöthigenfalls auf gleiche Benennung bringen kann, und alsdann zu den Zählern der absoluten Invarianten nur noch der gemeinschaftliche Nenner hinzutritt. Es sollen nun diejenigen Zähler und Nenner P oder Q, welche aus den Coefficienten von mehr als einer der Functionen des gegebenen Functionensystemes zusammengesetzt sind, *simultane Invarianten* genannt werden. Die Anzahl der von einander und von den einfachen Invarianten unabhängigen simultanen Invarianten ist aber immer gleich der Differenz der Gesammtzahl und der Anzahl der letzteren, und daher in jedem Falle leicht bestimmbar.

Geht man auf die Entwicklungen des §. 6 zurück, so folgt hier genau auf dieselbe Weise wie dort angegeben ist, die Umwandlung der Gleichungen §. 8 (11.), welche die absoluten Invarianten definiren, in solche, welchen alle genügen, nämlich

$$(1.)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{D_{\varrho\varrho}}(P) + \underset{(2)}{D_{\varrho\varrho}}(P) + \cdots + \underset{(m)}{D_{\varrho\varrho}}(P) = \lambda P, \\ \underset{(1)}{D_{\varrho\sigma}}(P) + \underset{(2)}{D_{\varrho\sigma}}(P) + \cdots + \underset{(m)}{D_{\varrho\sigma}}(P) = 0, \end{cases}$$

wo ϱ und σ von einander verschiedene Indices sind, und λ wieder eine constante Zahl ist. Ich werde diese Gleichungen in der Folge

$$(2.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S} D_{\varrho\varrho}(P) = \lambda P, \\ \mathfrak{S} D_{\varrho\sigma}(P) = 0 \end{cases}$$

schreiben, indem ich das Zeichen $\mathfrak{S}$ als Summirungszeichen gebrauche, wenn ein und dieselben Operationen für alle m Functionen des Functionensystemes F ausgeführt und alsdann alle addirt werden sollen.

Nach §. 6 (16.) ist

$$D_{11}(P)+D_{22}(P)+\cdots+D_{nn}(P) = p.\gamma.P,$$

wenn γ die Ordnung von P in Bezug auf die Grössen $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ ist; bezeichnet man daher durch respective

$$\gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \cdots\quad \gamma_m$$

die Ordnungen von P in Bezug auf die Grössen

$$a_{\alpha\beta\gamma\ldots}^{(1)},\quad a_{\alpha\beta\gamma\ldots}^{(2)},\quad \cdots\quad a_{\alpha\beta\gamma\ldots}^{(m)},$$

so folgt

$$\mathfrak{S}\{D_{11}P+D_{22}P+\cdots+D_{nn}P\} = (p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+\cdots+p_m\gamma_m)P.$$

Aber wegen (2.) ist dieselbe Summe gleich $n\lambda P$, daher folgt

$$(3.)\qquad \lambda = \frac{p_1\gamma_1+p_2\gamma_2+\cdots+p_m\gamma_m}{n},$$

was zur Vervollständigung des Systemes (2.) dient.

Schliesslich ist aus §. 6 noch die Gültigkeit der Gleichung

$$(4.)\qquad P' = r^{\lambda}P$$

zu entnehmen, in welcher λ aus (3.) folgt, und r wie immer die Substitutionsdeterminante bedeutet.

Aus der vorstehenden Theorie folgt, *dass die Determinanten linearer Gleichungen als die ersten speciellen Fälle simultaner Invarianten betrachtet werden können.*

In der That, wenn

$$(5.)\qquad \begin{cases} F^{(1)} = a_1^{(1)}x_1+a_2^{(1)}x_2+\cdots+a_n^{(1)}x_n, \\ \vdots\qquad\quad \vdots\qquad\quad \vdots\qquad\quad \vdots \\ F^{(n)} = a_1^{(n)}x_1+a_2^{(n)}x_2+\cdots+a_n^{(n)}x_n \end{cases}$$

ein gegebenes Functionensystem von n linearen Functionen ist, so gehen die partiellen Differentialgleichungen zur Definition der Invariante in folgende über:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum D_{\varrho\varrho}(P) = a_{(1)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(1)}^{\varrho}} + a_{(2)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(2)}^{\varrho}} + \cdots + a_{(n)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(n)}^{\varrho}} = \lambda P, \\ \sum D_{\varrho\sigma}(P) = a_{(1)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(1)}^{\sigma}} + a_{(2)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(2)}^{\sigma}} + \cdots + a_{(n)}^{\varrho}\dfrac{dP}{da_{(n)}^{\sigma}} = 0, \end{cases}$$

welchen man, wie leicht ersichtlich, genügt durch

$$(7.)\qquad P = \Delta^{\lambda},$$

wo

$$\Delta = \Sigma \pm a_{(1)}^{1} a_{(2)}^{2} \ldots a_{(n)}^{n}$$

die Determinante des Systemes (5.) ist. Die Grundeigenschaft dieser Invariante

$$\Delta' = r.\Delta$$

ist alsdann der bekannte Satz von der Multiplication der Determinanten. Dass für ein System (5.), in welchem die Anzahl der Variabeln der Anzahl der Functionen gleich ist, eine und nur eine Invariante existirt; und dass bei einer geringeren Anzahl von linearen Functionen die Gleichungen (6.) keine andere Lösung als $P = 0$ liefern, folgt ohne Weiteres wie in §. 7 aus der Betrachtung des entsprechenden Transformationsproblemes.

§. 10.

Ueber ein einfaches Bildungsgesetz simultaner Invarianten.

Ich werde in den nächsten Paragraphen die Kenntniss einfacher Invarianten voraussetzen und zunächst zeigen, wie verschiedene andere zur allgemeinen Theorie erforderliche Formen aus denselben abgeleitet werden, und beginne mit einem einfachen bekannten Gesetz zur Bildung simultaner Invarianten.

Wenn das Functionensystem, dessen simultane Invarianten gesucht werden, aus Functionen ein und derselben p^{ten} Ordnung besteht, und wenn

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots$$

numerische Factoren bedeuten, vermittelst welcher

$$(1.)\qquad F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 + \cdots$$

zusammengesetzt ist, so wird jede aus den Coefficienten von F gebildete einfache Invariante P nach den Potenzen und Producten der α_x entwickelt werden können, so dass, wenn γ die Ordnung von P bedeutet,

$$(2.) \qquad P_{\alpha_1 F_1+\alpha_2 F_2+\alpha_3 F_3+\ldots} = \alpha_1^{\gamma} P_1+\alpha_1^{\gamma-1}\alpha_2 P_2+\cdots$$

gesetzt werden kann. Da nun

$$P'_{\alpha_1 F_1'+\alpha_2 F_2'+\alpha_3 F_3'+\ldots} = r^{\lambda}.P_{\alpha_1 F_1+\alpha_2 F_2+\alpha_3 F_3+\ldots}$$

ist, so müssen auch die Coefficienten der Potenzen und Producte von α_x, auf der rechten Seite von (2.), welche gemischte Functionen der Coefficienten von F_1, F_2, ... sind, einzeln den Gleichungen

$$P'_x = r^{\lambda}.P_x$$

genügen, und daher *simultane Invarianten* sein.

Sind die Functionen F_1, F_2, F_3, ... in Bezug auf die Variabeln von verschiedenen Ordnungen, so kann man dasselbe Princip anwenden, nachdem man sie vorher durch Potenzirung oder Multiplication mit einander auf die kleinste *gemeinschaftliche* Ordnung gebracht hat, da mit F in F' auch F^q in F'^q übergeht. Beachtet man noch, dass (2.) nach dem *Taylor*schen Lehrsatz entwickelt werden kann, so folgt hieraus

Theorem VI.

Wenn man eine einfache Invariante P, welche aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ einer homogenen Function gebildet ist, nach denselben differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $a^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ einer anderen homogenen Function derselbigen Ordnung substituirt, so erhält man eine simultane Invariante dieser Functionen und ebenso, wenn man diesen Differentiationsprocess öfter wiederholt und jedesmal die Coefficienten ein und derselben oder anderer homogenen Functionen derselben Ordnung statt der Incremente substituirt. Endlich kann man auch dasselbe Verfahren auf Functionen verschiedener Ordnungen anwenden, nachdem man letztere durch Potenzirung oder Multiplication mit einander auf gleiche Ordnung gebracht hat.

Dieses Theorem, welches ich gleich bei der Entstehung der jetzigen Invariantentheorie gefunden und (dieses Journal Bd. 39, pg. 150 und ff.) benutzt habe, findet in dem folgenden §. insofern Anwendung, als im Functionensystem eine Function als linear vorausgesetzt wird; in diesem Falle kann man nämlich aus jeder einfachen oder simultanen Invariante, welche das System ohne diese lineare Function besitzt, ohne Weiteres eine andere ableiten, welche auch die Coefficienten der linearen enthält, *wenn man erstere nach den Coefficienten irgend einer der gegebenen Functionen differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte der Coefficienten der linearen Function substituirt.*

§. 11.

Zugehörige Formen. Bestimmung der Substitutionscoefficienten.

Nach den bisherigen Entwickelungen wird man zur Bestimmung der Coefficienten der transformirten Form bei der Ausführung irgend einer speciellen Transformation die Gleichungen

$$(1.) \qquad P' = r^{\lambda}.P$$

ansetzen, von welchen die Anzahl der von einander unabhängigen gerade so gross ist als die Anzahl der zu bestimmenden Grössen einer vollständigen Transformation, wenn man zu den letzteren ausser den Coefficienten der transformirten Formen noch die Substitutionsdeterminante hinzurechnet. Die Gleichungen (1.) zeigen überdies sogleich, ob die allgemeinen Functionen in vorgelegte specielle Formen transformirbar sind, d. h. ob die über einen Theil der Coefficienten getroffene Verfügung erlaubt ist. Es ist nämlich sofort klar, *dass jede Verfügung statthaft ist, durch welche keine Invariante verschwindet*, denn geschähe das Letztere, so müsste, da P nicht verschwindet, wegen der Form der Gleichungen (1.), die Substitutionsdeterminante r verschwinden, also eine Abhängigkeit zwischen den neuen Variabeln eintreten, welche die Transformation illusorisch macht, während umgekehrt eine eintretende Abhängigkeit der Functionen P' von einander auf das Verschwinden einer zusammengesetzten Invariante hinauskommt.

Hat man also aus den Gleichungen (1.) die Coefficienten von der transformirten Form und die Substitutionsdeterminante bestimmt, so bleibt noch die Ermittelung der Substitutionscoefficienten übrig, und ich werde jetzt zeigen, dass auch zu diesem Zwecke die Benutzung der ursprünglichen Transformationsgleichungen (§. 1 (2.)) nicht erforderlich ist.

Wenn man nämlich zu der gegebenen Function oder zu dem gegebenen Functionensystem noch eine lineare Function

$$(2.) \qquad U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

hinzufügt und verlangt, dass dieselbe gleichzeitig mit den gegebenen Functionen in

$$(3.) \qquad U' = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \cdots + v_n \xi_n$$

transformirt wird, so treten zu den ursprünglichen Transformationsgleichungen noch diejenigen n Gleichungen hinzu, welche durch Einsetzen der Substitution

$$(4.) \qquad x_k = x_k^{(1)} \xi_1 + x_k^{(2)} \xi_2 + \cdots + x_k^{(n)} \xi_n$$

in (2.) durch Vergleichung mit (3.) entstehen, nämlich

$$(5.) \qquad v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n .$$

Es folgt daher, dass die Anzahl der Gleichungen (1.) noch um n Gleichungen vermehrt werden muss, welche aus den simultanen Invarianten des gegebenen Functionensystemes mit der linearen U entspringen. Obwohl man durch Verbindung dieser n Gleichungen mit einander und mit den Gleichungen (1.) die Anzahl derselben beliebig vervielfältigen kann, so ist doch klar, dass die Anzahl der von einander in Bezug auf die Coefficienten von U unabhängigen n betragen muss, doch bleiben die oft erwähnten beiden Fälle ausgeschlossen, wenn entweder eine homogene Function zweiter Ordnung allein zur Transformation vorgelegt wird, oder ein System linearer Functionen, deren Anzahl die Anzahl der Variabeln nicht übersteigt. Man kann in der That in allen übrigen Fällen eine beliebige Anzahl dieser simultanen Invarianten vermittelst des Theoremes VI. §. 10 ableiten und jedenfalls n von einander unabhängige, wenn man das Theorem auf n von einander unabhängige Invarianten P angewendet hat.

Ich werde die auf diese Weise entstehenden simultanen Invarianten durch

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots \quad \Psi_n$$

bezeichnen, dann erhält man die Gleichungen

$$(6.) \qquad \Psi' = r^{\lambda} . \Psi ,$$

welche den Gleichungen (1.) hinzugefügt werden müssen.

Ehe ich die Anwendung dieser Gleichungen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten zeige, habe ich zuvörderst zu bemerken, dass die Functionen Ψ, als Functionen der Grössen u_k betrachtet, solche homogene ganze Functionen der letzteren sind, welche *Gauss* zuerst *zugehörige Formen* genannt hat. Betrachtet man nämlich die Gleichungen (5.) als ein lineares Substitutionssystem, durch welches Functionen der u_k in Functionen der v_k transformirt werden, so steht dieses Substitutionssystem zu dem ursprünglichen (4.) in der Beziehung, welche *Gauss* eine *transponirte Substitution* nennt. Die Transposition eines Substitutionssystemes besteht darin, dass die gleichvielten Horizontal- und Verticalreihen mit einander und die Variabeln der ursprünglichen Formen mit denen der transformirten vertauscht werden. In der That sind u_k die ursprünglichen, v_k die neuen Variabeln der Functionen Ψ, und sie stehen in (5.) in umgekehrter Ordnung als x_k und ξ_k in (4.).

Mit Berücksichtigung der Relation (6.), welche ausführlicher

$$(7.) \qquad \Psi'(v_1, v_2, \ldots v_n) = r^\lambda \Psi.(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

lautet, folgt nun, dass sämmtliche Functionen $\Psi(u_1, u_2, \ldots u_n)$ durch die transponirte Substitution in ihre entsprechenden $\Psi'(v_1, v_2, \ldots v_n)$ übergehen, nachdem sie mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante multiplicirt worden sind. Dieses ist aber die Grundeigenschaft der *zugehörigen Formen*.

Es folgt daher

Theorem VII.

Wenn eine homogene Function oder ein Functionensystem durch lineare Substitutionen transformirt wird, so giebt es immer ein System zugehöriger Formen, welche gleichzeitig aber durch die transponirte Substitution in ihre entsprechenden aus den Coefficienten der transformirten Functionen gebildeten Formen übergehen, nachdem sie vorher in eine Potenz der Substitutionsdeterminante multiplicirt worden sind. Diese Formen bilden gleichzeitig die simultanen Invarianten des Functionensystemes mit einer linearen Function, deren Coefficienten ihre Variabeln sind, und werden in Folge dessen erhalten, wenn man die Invarianten des Systemes nach den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ einer der homogenen Functionen, aus denen sie gebildet ist, differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte der Variabeln substituirt. Ueberdies ist die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln von einander unabhängigen zugehörigen Formen ebenso gross als die Anzahl der Variabeln, und reducirt sich nur in den beiden Fällen auf eine einzige, wenn sie entweder zu einer einzelnen homogenen Function der zweiten Ordnung oder zu einem System von $(n-1)$ linearen Functionen gehört.

Um zu zeigen, in welcher Weise die zugehörigen Formen zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten führen, denke man sich n Gleichungen von der Form (7.) aufgestellt, und dieselben nach den Grössen v_k aufgelöst, so dass

$$(8.) \qquad v_k = X_k(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

entsteht, dann müssen durch Substitution der Werthe von v_k aus (5.) die Gleichungen (8.) identisch erfüllt sein, also die folgenden:

$$(9.) \qquad x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n = X_k(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

für jeden Werth der Variabeln u_k gelten. Setzt man daher in (9.) allmälig

$$\begin{array}{llll} u_1 = 1, & u_2 = 0, & \ldots & u_n = 0, \\ u_1 = 0, & u_2 = 1, & \ldots & u_n = 0, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 = 0, & u_2 = 0, & \ldots & u_n = 1, \end{array}$$

so erhält man dadurch sofort die Werthe der Substitutionscoefficienten:

(10.) $x_1^{(k)} = X_k(1, 0, \ldots 0)$, $x_2^{(k)} = X_k(0, 1, \ldots 0)$, $\ldots$ $x_n^{(k)} = X_k(0, 0, \ldots 1)$,

also durch Auflösung eines Systemes von nur n Gleichungen alle n^2 Substitutionscoefficienten, was in allen bekannten ausgeführten Transformationen so ausgedrückt wird, dass man die Substitutionscoefficienten einer Zeile von denen der übrigen separirt hat.

Es folgt aber auch, weil die linke Seite von (9.) in Bezug auf die Grössen u_k rational und linear ist, das sehr merkwürdige und insbesondere für die Auflösung algebraischer Gleichungen sehr wichtige

Theorem VIII.

Wenn man von den n zugehörigen Formen, welche ein gegebenes Functionensystem mit einer linearen Function gemein hat, n von einander unabhängige auswählt und aus diesen die Gleichungen

$$\Psi'(v_1, v_2, \ldots v_n) = r^{\lambda} . \Psi(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

bildet, so sind die Auflösungen derselben nach den Grössen v_k in Bezug auf die Grössen u_k nicht allein rational sondern sogar linear, und die Irrationalität der Auflösung haftet allein an den Coefficienten derselben.

Zur Darstellung der rationalen Auflösungen muss man sich entweder der durch (10.) ausgedrückten Methode bedienen, oder man muss die Coefficienten der transformirten Formen explicite in die Auflösung substituiren.

Diese wesentlichen Eigenthümlichkeiten der zugehörigen Formen, welche ich nirgends bis jetzt publicirt gefunden habe, auf welche sich aber verschiedene elegante Rechnungsresultate von bekannten ausgeführten Transformationen zurückführen lassen, will ich an einem elementaren Beispiel erläutern. Ich wähle hierzu ein bekanntes und möglichst einfaches, nämlich die gleichzeitige Transformation zweier homogenen Functionen zweiter Ordnung in andere, welche nur die Quadrate enthalten, und setze auch der grösseren Kürze halber nur drei Variable voraus. Sind

$$(11.) \qquad F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

die beiden gegebenen Functionen, so hat man im Ganzen $12 - 9 + 1 = 4$ Invarianten zu bilden, und zwar:

$$(12.) \qquad P = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}, \qquad Q = \Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33},$$

als die einfachen jeder der beiden Functionen, und nach §. 10 Theorem VI.:

$$(13.) \qquad P_1 = \Sigma \frac{dP}{da_{\varkappa\lambda}} b_{\varkappa\lambda}, \qquad Q_1 = \Sigma \frac{dQ}{db_{\varkappa\lambda}} a_{\varkappa\lambda},$$

als simultane.

Ebenso sind drei zugehörige Formen nach demselben Theorem:

$$(14.)\quad \begin{cases} \Psi(u_1u_2u_3) = \Sigma \dfrac{dP}{da_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda, \quad \Psi_1(u_1u_2u_3) = \Sigma \dfrac{dP_1}{da_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda = \Sigma \dfrac{dQ_1}{db_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda, \\ \Psi_2(u_1u_2u_3) = \Sigma \dfrac{dQ}{db_{\varkappa\lambda}} u_\varkappa u_\lambda. \end{cases}$$

Nun seien

$$\begin{aligned} F'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2, \\ F_1'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \end{aligned}$$

die transformirten Formen, so folgt, weil $\lambda = 2$ ist,

$$(15.)\quad \begin{cases} r^2 . P &= G_1G_2G_3, \\ r^2 . P_1 &= G_1G_2 + G_1G_3 + G_2G_3, \\ r^2 . Q_1 &= G_1 + G_2 + G_3, \\ r^2 . Q &= 1, \end{cases}$$

und hieraus $r^2 = \dfrac{1}{Q}$, sowie die cubische Gleichung $\Delta = G^3Q - G^2Q_1 + GP_1 - P = 0$ zur Bestimmung der drei Coefficienten G_1, G_2, G_3 der transformirten Form. Zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten hat man:

$$(16.)\quad \begin{cases} r^2 . \Psi &= G_2G_3v_1^2 + G_1G_3v_1^2 + G_1G_2v_3^2, \\ r^2 . \Psi_1 &= (G_2 + G_3)v_1^2 + (G_1 + G_3)v_2^2 + (G_1 + G_2)v_3^2, \\ r^2 . \Psi_2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \end{cases}$$

und die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned} (G_1 - G_2)(G_1 - G_3)v_1^2 &= r^2(\Psi - G_1\Psi_1 + G_1^2\Psi_2), \\ (G_2 - G_3)(G_2 - G_1)v_2^2 &= r^2(\Psi - G_2\Psi_1 + G_2^2\Psi_2), \\ (G_3 - G_1)(G_3 - G_2)v_3^2 &= r^2(\Psi - G_3\Psi_1 + G_3^2\Psi_2). \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{(G_1 - G_2)(G_1 - G_3)}{r^2} = (G_1 - G_2)(G_1 - G_3)Q^2 = \Delta_1,$$

wo Δ_1, beiläufig bemerkt, gleich $\dfrac{d\Delta}{dG_1}$ ist, so wird nach Theorem VIII.:

$$(17.)\quad v_k^2 = \frac{\Psi(u_1, u_2, u_3) - G_k\Psi_1(u_1, u_2, u_3) + G_k^2\Psi_2(u_1, u_2, u_3)}{\Delta_k}$$

eine homogene Function zweiter Ordnung der Variabeln u_k, welche ein vollständiges Quadrat ist, worauf bekanntlich auch die gewöhnliche Behandlungsweise des Problemes führt, denn es ist

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) - G_k\Psi_1(u_1, u_2, u_3) + G_k^2\Psi_2(u_1, u_2, u_3)$$

die zugehörige Form von $F - G_kF_1$, welche in zwei Factoren zerfällt.

Setzt man nun

$$v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + x_3^{(k)} u_3$$

in (17.) hinein, so folgt nach (10.):

$$x_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(1,0,0) - G_k \Psi_1(1,0,0) + G_k^2 \Psi_2(1,0,0)}{\Delta_k}},$$

$$x_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(0,1,0) - G_k \Psi_1(0,1,0) + G_k^2 \Psi_2(0,1,0)}{\Delta_k}},$$

$$x_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\Psi(0,0,1) - G_k \Psi_1(0,0,1) + G_k^2 \Psi_2(0,0,1)}{\Delta_k}},$$

was mit den bekannten Resultaten der gewöhnlichen Behandlungsweise übereinstimmt.

Ich will nur noch zeigen, wie man hieraus die Wurzeln der Gleichungen

$$F = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0, \qquad F_1 = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0$$

in schliesslicher Endform angeben kann. Um eine symmetrische Auflösung zu erhalten ist es in allen Fällen zweckmässig, wenn x_1, x_2, x_3 die Wurzeln bedeuten, den Werth einer beliebigen linearen Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

derselben, oder vielmehr nur einer mit U proportionalen Grösse zu bestimmen, deren Coefficienten x_1, x_2, x_3 alsdann die Verhältnisse der Wurzeln sind. Nun ist für eine beliebige lineare Function, wie leicht ersichtlich, allemal

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3;$$

kann man daher die linke Seite dieser Gleichung aus den transformirten Formen bestimmen, so ist nur die Uebertragung in die ursprüngliche erforderlich. In ersterer Form ergiebt sich aber sogleich aus

$$F' = G_1 \xi_1^2 + G_2 \xi_2^2 + G_3 \xi_3^2 = 0,$$

$$F_1 = \quad \xi_1^2 + \quad \xi_2^2 + \quad \xi_3^2 = 0$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2},$$

also ist

$$v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 = v_1 \sqrt{G_2 - G_3} + v_2 \sqrt{G_3 - G_1} + v_3 \sqrt{G_1 - G_2},$$

folglich sofort wegen (17.):

$$(18.) \quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = \sqrt{\dfrac{(G_2 - G_3)(\Psi - G_1 \Psi_1 + G_1^2 \Psi_2)}{\Delta_1}} \\ \quad + \sqrt{\dfrac{(G_3 - G_1)(\Psi - G_2 \Psi_1 + G_2^2 \Psi_2)}{\Delta_2}} + \sqrt{\dfrac{(G_1 - G_2)(\Psi - G_3 \Psi_1 + G_3^2 \Psi_2)}{\Delta_3}}, \end{cases}$$

welche Function, weil sie linear ist, die Werthe von $x_1 : x_2 : x_3$ liefert, wenn man respective unter den Wurzelzeichen allmälig $u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$; $u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 0$; $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1$ setzt.

Dieses Prinzip gilt allgemein für die Auflösung aller Gleichungen, soweit sie algebraisch sind.

Indem ich nun wieder zur allgemeinen Theorie zurückkehre, habe ich nur noch hervorzuheben, dass für die zugehörigen Formen, weil sie simultane Invarianten sind, auch entsprechende Differentialgleichungen existiren, welche erhalten werden, wenn man den Gleichungen §. 9 (2.) die von den Coefficienten u_k herrührenden $D_{\varrho\sigma}$ hinzufügt, aber man sieht sofort, dass $D_{\varrho\sigma}(\Psi)$ in Bezug auf U genommen gleich $u_\varrho \frac{d\Psi}{du_\sigma}$ ist, daher sind

$$(19.)\qquad \begin{cases} \sum D_{\varrho\varrho}(\Psi) + u_\varrho \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = \lambda\Psi, \\ \sum D_{\varrho\sigma}(\Psi) + u_\sigma \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = 0 \end{cases}$$

die Differentialgleichungen, denen alle zugehörige Formen genügen müssen, und es ist wegen §. 9 (3.)

$$(20.)\qquad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m + q}{n},$$

wenn q die Ordnung der zugehörigen Form in Bezug auf ihre Variabeln u_k bedeutet. Ist $q = p$, und überdies nur eine Function im Functionensystem gegeben, so wird

$$(21.)\qquad \lambda = \frac{p(\gamma+1)}{n},$$

und ist jene Form nach Theorem VI. §. 10 durch erste Differentiirung einer einfachen Invariante entstanden, so muss $\gamma+1$ die Ordnung der letzteren sein, also folgt, dass in diesem Falle die Werthe für λ für Invariante und zugehörige Form übereinstimmen.

Man kann aus den Gleichungen (19.) sehr leicht beweisen, dass eine homogene Function zweiter Ordnung eine und nur eine zugehörige Form besitzt. Wenn man nämlich, wie in §. 7, (5.), (6.),

$$D_{\varrho\sigma}(\Psi) = 2\Sigma\Psi_{\varrho\mu}a_{\varrho\mu}$$

schreibt, wo

$$\Psi_{\varrho\mu} = \tfrac{1}{2}\frac{d\Psi}{da_{\varrho\mu}}, \qquad \Psi_{\varrho\varrho} = \frac{d\Psi}{da_{\varrho\varrho}}$$

ist, so gehen die Gleichungen (19.) in

$$(22.)\qquad \begin{cases} 2\Sigma \Psi_{\varrho\mu} a_{\varrho\mu} + u_\varrho \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = \lambda \Psi, \\ 2\Sigma \Psi_{\varrho\mu} a_{\sigma\mu} + u_\sigma \dfrac{d\Psi}{du_\varrho} = 0 \end{cases}$$

über, und löst man dieselben ebenso wie in §. 7, (7.) auf, so folgt

$$\Delta\Psi_{\varrho\sigma} = -\tfrac{1}{2}(u_1\Delta_{1\sigma} + u_2\Delta_{2\sigma} + \cdots + u_n\Delta_{n\sigma})\frac{d\Psi}{du_\varrho} + \frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi$$

oder, wenn

$$(22^a.)\qquad \Psi_1(u_1, u_2, \ldots u_n) = \Sigma \Delta_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda$$

gesetzt wird.

$$\Delta\Psi_{\varrho\sigma} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\Psi_1}{du_\sigma}\frac{d\Psi}{du_\varrho} + \frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi,$$

aber auch

$$\Delta\Psi_{\sigma\varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\Psi_1}{du_\varrho}\frac{d\Psi}{du_\sigma} + \frac{\lambda}{2}\Delta_{\varrho\sigma}\Psi,$$

und da zur Coexistenz der Gleichungen (22.) erforderlich ist, dass beide Werthe übereinstimmen, so folgt, dass für jeden Werth der ϱ und σ

$$\frac{d\Psi_1}{du_\sigma}\frac{d\Psi}{du_\varrho} = \frac{d\Psi_1}{du_\varrho}\frac{d\Psi}{du_\sigma}$$

sein muss, also zunächst

$$\Psi = \Psi_1,$$

welches die bekannte zugehörige Form ist. Ausserdem ergiebt sich hieraus, dass Ψ nur noch eine beliebige Potenz von Ψ_1 sein kann.

Der zweite Fall, welcher eine Ausnahme von der allgemeinen Theorie macht, ist viel einfacher zu übersehen. Ich habe schon am Ende des §. 9 gezeigt, dass der einfachste Fall einer simultanen Invariante die gewöhnliche Determinante ist. Nimmt man nun an, dass wie dort $(n-1)$ lineare Functionen gegeben sind:

$$(23.)\qquad \begin{cases} F_1 = \underset{(1)}{a_1}x_1 + \underset{(1)}{a_2}x_2 + \cdots + \underset{(1)}{a_n}x_n, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_{n-1} = \underset{(n-1)}{a_1}x_1 + \underset{(n-1)}{a_2}x_2 + \cdots + \underset{(n-1)}{a_n}x_n, \end{cases}$$

und fügt die lineare Function

$$U = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n$$

hinzu, so ist die Determinante

$$(24.)\qquad I' = \Sigma \pm \underset{(1)}{a_1}\underset{(2)}{a_2}\ldots\underset{(n-1)}{a_{n-1}}u_n$$

eine lineare Function der Variabeln u_k, welche schon wegen des Grundprincipes der Multiplication der Determinante der Bedingung

$$(25.) \qquad I' = r.I$$

Genüge leistet, sie ist daher die zugehörige Form des Systemes (23.) und sie ist die einzige, weil die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen für lineare Functionen nur eine einzige Lösung zulassen, wie schon früher erörtert ist.

Wenn die Anzahl der linearen Functionen geringer ist als $n-1$, so hat das System keine Determinante in Verbindung mit U, und daher auch keine zugehörige Form, ausserdem ergeben sich leicht Modificationen, wenn eine Function zweiter oder höherer Ordnung zu dem linearen System hinzutritt. Es gilt aber in dieser Beziehung und zur Darstellung der ersten zugehörigen Formen überhaupt ein Theorem, welches in etwas anderer Form bekannt ist, und in derselben alle anfänglichen Invariantenbestimmungen geliefert hat. Wenn man nämlich beachtet, dass mit

$$\underset{(k)}{a_1}x_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n}x_n = \underset{(k)}{a_1'}\xi_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n'}\xi_n$$

gleichzeitig

$$(\underset{(k)}{a_1}x_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n}x_n)^p = (\underset{(k)}{a_1'}\xi_1+\cdots+\underset{(k)}{a_n'}\xi_n)^p$$

wird, und auf beiden Seiten die letzte Gleichung entwickelt, so folgt, dass mit der symbolischen Gleichung, in welcher $\alpha+\beta+\gamma\ldots=p$ ist,

$$(26.) \qquad \underset{(k)}{a_1^{\alpha}}\,\underset{(k)}{a_2^{\beta}}\,\underset{(k)}{a_3^{\gamma}}\ldots = \underset{(k)}{a_{\alpha\beta\gamma\ldots}},$$

auch die folgende

$$(27.) \qquad \underset{(k)}{a_1'^{\alpha}}\,\underset{(k)}{a_2'^{\beta}}\,\underset{(k)}{a_3'^{\gamma}}\ldots = \underset{(k)}{a'_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$$

stattfindet. Es wird daher jede in Bezug auf die Potenzen und Producte p^{ter} Ordnung der linken Seiten von (26.) und (27.) lineare Gleichung bestehen bleiben, wenn man für dieselben die rechten Seiten substituirt. Es hat aber

$$I'^p = (\Sigma \pm \underset{(1)}{a_1}\,\underset{(2)}{a_2}\ldots\underset{(n-1)}{a_{n-1}}u_n)^p$$

die angegebene Eigenschaft, und zufolge (25.) wird

$$(28.) \qquad I'^p = r^p.I'^p,$$

daher wird durch die symbolischen Substitutionen von (26.) und (27.) die Gleichung (28.) noch gültig bleiben, und I'^p symbolisch noch eine zugehörige Form des Functionensystemes (23.) sein, wenn eine der linearen Functionen durch eine Function F_k der p^{ten} Ordnung ersetzt wird.

Man kann auf dieselbe Weise ausserdem noch jede andere lineare Function durch eine der p^{ten} Ordnung ersetzen, und auf diese Weise fortfahren, so dass zuletzt eine zugehörige Form eines Functionensystemes entsteht, deren sämmtliche Functionen von ein und derselben p^{ten} Ordnung sind.

Setzt man alsdann alle diese Functionen einander gleich, so entsteht eine zugehörige Form der einen homogenen Function der p^{ten} Ordnung, oder I'^p wird identisch gleich Null, und zwar wird das Letztere jedesmal eintreten, wenn p ungerade ist, denn jede ungerade Potenz von der Determinante I' ist eine alternirende Function und verschwindet daher, wenn zwei Systeme einander gleich sind. Daher folgt:

Theorem IX.

Man erhält für jedes Functionensystem von $(n-1)$ Functionen derselben p^{ten} Ordnung eine zugehörige Form, wenn man

$$I'^p = \{\Sigma \pm \underset{(1)}{a_1}\, \underset{(2)}{a_2} \ldots \underset{(n-1)}{a_{n-1}}\, u_n\}^p$$

bildet, und statt der Potenzen und Producte $\underset{(k)}{a_1^\alpha}\, \underset{(k)}{a_2^\beta}\, \underset{(k)}{a_3^\gamma} \ldots$ der p^{ten} Ordnung die entsprechenden Coefficienten $\underset{(k)}{a_{\alpha\beta\gamma\ldots}}$ substituirt, und es bleibt dieselbe eine zugehörige Form auch für ein System einer geringeren Anzahl von Functionen, oder auch nur einer, wenn man ebenso viele Potenzen und Producte $\underset{(k)}{a_1^\alpha}\, \underset{(k)}{a_2^\beta}\, \underset{(k)}{a_3^\gamma} \ldots$ durch die Coefficienten ein und derselben Function ersetzt, bis erstere sämmtlich beseitigt sind, wenn nicht durch diese Substitution identisch Null entsteht.

Man kann dieses Theorem auch als einen speciellen Fall der von den Herren *Sylvester* und *Cayley* im grossartigen Massstabe aufgestellten symbolischen Invariantenbestimmungen betrachten, und findet aus demselben in der That die einfachste bekannte Invariante einer homogenen Function geraden Grades, wenn man nach dem im Theorem angegebenen Verfahren die zugehörige Form bildet und statt der Potenzen und Producte $u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma \ldots$ der p^{ten} Ordnung die entsprechenden Coefficienten der homogenen Function substituirt. Ist die Function ungeraden Grades, so entsteht auch hier aus dem angegebenen Grunde identisch Null.

§. 12.

Von den Covarianten. Bestimmung der inversen Substitution.

Man kann zu jeder zugehörigen Form, dieselbe als ursprünglich betrachtet, wieder die zugehörige bilden, dann erhält man ein System von

Functionen, welche in derselben Abhängigkeit zu einander stehen wie die zugehörigen Formen zu einander, und daher die Eigenschaft haben durch die transponirte Substitution der transponirten ebenso in ihre entsprechenden überzugehen, wie jene. Durch Transposition des transponirten Substitutionssystemes entsteht aber, wie aus der Definition desselben sofort hervorgeht, das ursprüngliche, wenn man nur wieder die ursprünglichen Variabeln schreibt, daher ist durch die vorstehende Betrachtung die Existenz eines Functionensystemes dargethan, welches der ursprünglich gegebenen Function respective den Functionen des ursprünglich gegebenen Functionensystemes coordinirt ist, und mit denselben zugleich und durch dieselbe Substitution in die analog gebildeten transformirten Formen übergeht, d. h. den Gleichungen

$$(1.) \qquad \Phi'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = r^\lambda . \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Genüge leistet, wenn Φ eine solche Function andeutet. Wegen dieser Eigenschaft werden die Functionen Φ *Covarianten* genannt.

Aus der eben angegebenen Bildungsweise der Covarianten geht ohne Weiteres hervor, dass im Allgemeinen immer n in Bezug auf die Variabeln von einander unabhängige existiren müssen, zu denen jedoch schon die gegebene Function F, respective das gegebene Functionensystem selbst gehört. Man kann sie aber auch selbstständig definiren. In der That *denkt man sich zu den Gleichungen des Theoremes* V. §. 6

$$(2.) \qquad \begin{cases} F_{(k)\alpha\beta\gamma\ldots} = a'_{(k)\alpha\beta\gamma\ldots} \\ \Sigma \pm x_1^{(1)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(n)} = r \end{cases}$$

noch die Substitutionsgleichungen

$$(3.) \qquad x_k = x_k^{(1)} \xi_1 + x_k^{(2)} \xi_2 + \cdots + x_k^{(n)} \xi_n$$

hinzugefügt und verlangt, dass aus den Gleichungen (2.) *und* (3.) *die sämmtlichen Substitutionscoefficienten eliminirt werden, so muss man die Gleichungen* (1.) *erhalten, und wegen des Hinzutretens von n Gleichungen* (3.) *auch in derselben Anzahl.*

Sowohl aus dieser Fassung, wie überhaupt leuchtet ein, dass man auch *sämmtliche* Relationen dieses Eliminationsproblemes in Form von Covarianten darstellen kann, da man einerseits durch Verbindung von Covarianten mit Invarianten neue Covarianten erhält, andererseits aus der grossen Zahl zugehöriger Formen auf dem angedeuteten Wege die Anzahl der Covarianten beliebig vervielfältigen kann.

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) kann man sehr leicht den früheren analoge partielle Differentialgleichungen aufstellen, welchen alle Covarianten genügen. Es ist nämlich nach §. 3 (7.) für eine Function:

$$D_{\varrho\sigma}(\Phi') = \frac{d\Phi'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{d\Phi'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{d\Phi'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)},$$

und ebenso nach §. 8 (9.) für ein Functionensystem:

$$(4.) \qquad \sum D_{\varrho\sigma}(\Phi') = \frac{d\Phi'}{dx_1^{(\varrho)}} x_1^{(\sigma)} + \frac{d\Phi'}{dx_2^{(\varrho)}} x_2^{(\sigma)} + \cdots + \frac{d\Phi'}{dx_n^{(\varrho)}} x_n^{(\sigma)}.$$

Es wird aber, wenn man die Gleichung (1.) nach $x_k^{(\varrho)}$ differentiirt:

$$(5.) \qquad \frac{d\Phi'}{dx_k^{(\varrho)}} + \sum_h \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = \lambda r^{\lambda-1} \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}} \Phi = \frac{\lambda\Phi'}{r} \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}},$$

indem man berücksichtigen muss, dass jetzt wegen (3.) die Substitutionscoefficienten auch in den Grössen ξ_h enthalten sind.

Bildet man aus (5.) die rechte Seite von (4.), so folgt hieraus:

$$(6.) \qquad \sum D_{\varrho\sigma}(\Phi') + \sum_{h,k} \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} x_k^{(\sigma)} = \frac{\lambda\Phi'}{r} \sum \frac{dr}{dx_k^{(\varrho)}} x_k^{(\sigma)},$$

und die rechte Seite dieser Gleichung ist, wie bekannt oder wegen §. 6 (9.) gleich 0, wenn ϱ und σ verschieden sind, oder gleich $\frac{\lambda\Phi'}{r} \cdot r = \lambda\Phi'$, wenn sie gleich sind; es bleibt also noch der zweite Summand der linken Seite zu bestimmen. Zu diesem Ende bilde man durch Auflösung der Gleichungen (3.) die inverse Substitution und bezeichne dieselbe durch

$$(7.) \qquad \xi_h = \xi_1^{(h)} x_1 + \xi_2^{(h)} x_2 + \cdots + \xi_n^{(h)} x_n,$$

alsdann kann man diese Gleichung entweder als identische wegen (3.) auffassen und erhält durch Differentiation nach $x_k^{(\varrho)}$ in diesem Sinne:

$$0 = \frac{d\xi_1^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_1 + \frac{d\xi_2^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_2 + \cdots + \frac{d\xi_n^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x^n + \xi_k^{(h)} \xi_\varrho,$$

oder, wenn man sie einfach differentiirt:

$$\frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = \frac{d\xi_1^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_1 + \frac{d\xi_2^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_2 + \cdots + \frac{d\xi_n^{(h)}}{dx_k^{(\varrho)}} x_n,$$

und daher durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen von einander:

$$\frac{d\xi_h}{dx_k^{(\varrho)}} = -\xi_k^{(h)} \xi_\varrho.$$

Es folgt daher, wenn man diese Differentialquotienten in (6.) substituirt:

$$\sum D_{\varrho\sigma}(\Phi') - \xi_\varrho \sum_{h,k} \frac{d\Phi'}{d\xi_h} \xi_k^{(h)} x_k^{(\sigma)} = \lambda \Phi' \text{ oder } = 0,$$

und endlich, weil wegen (3.) und (7.)

$$\sum \xi_k^{(h)} x_k^{(\sigma)} = 1 \text{ oder } = 0$$

ist, je nachdem $h = \sigma$ oder beide verschieden sind,

$$(8.) \qquad \sum D_{\varrho\sigma}(\Phi') - \xi_\varrho \frac{d\Phi'}{d\xi_\sigma} = \lambda \Phi' \text{ oder } = 0.$$

Diese Differentialgleichungen enthalten explicite weder die Substitutionscoefficienten noch die Coefficienten der ursprünglichen Formen, daher gilt auch das System

$$(9.) \qquad \begin{cases} \sum D_{\varrho\varrho}(\Phi) - x_\varrho \frac{d\Phi}{dx_\varrho} = \lambda \Phi, \\ \sum D_{\varrho\sigma}(\Phi) - x_\varrho \frac{d\Phi}{dx_\sigma} = 0 \end{cases}$$

zur Definition der Covarianten Φ.

Die Gleichungen (9.) unterscheiden sich von den analogen Gleichungen §. 11 (19.), welche die zugehörigen Formen definiren, dadurch, *dass hier die zweiten Glieder der linken Seiten negative Vorzeichen haben, und dass ϱ mit σ vertauscht ist.*

Die Bestimmung der Grösse λ ändert sich auf analoge Weise. Bildet man nämlich wie in §. 9

$$\sum (D_{11}(\Phi) + D_{22}(\Phi) + \cdots + D_{nn}(\Phi)) = (p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m)\Phi$$

und beachtet, dass, wenn Φ von der q^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln ist,

$$x_1 \frac{d\Phi}{dx_1} + x_2 \frac{d\Phi}{dx_2} + \cdots + x_n \frac{d\Phi}{dx_n} = q\Phi$$

wird, so folgt

$$p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m - q = n\lambda$$

oder

$$(10.) \qquad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \cdots + p_m\gamma_m - q}{n}.$$

Die wesentlichste Anwendung der Covarianten besteht darin, dass sie ebenso wie die zugehörigen Formen die Substitutionscoefficienten bestimmen, aber mit dem Unterschiede, dass sie die *inverse* Substitution geben. Um die

Coefficienten $\xi_\lambda^{(k)}$ dieser Substitution nicht durch Auflösung der ursprünglichen zu finden, was sehr bedeutende überflüssige Factoren hineinziehen würde. könnte man die Gleichungen (7.) von §. 11 nach den *ursprünglichen* Variabeln u_k auflösen, aber diese sind in ganz allgemeinen Formen enthalten und würden daher erfordern, dass man mit den ganz allgemeinen Formen bei der Auflösung operiren müsste, was, abgesehen von der practischen Unausführbarkeit. zu jeder anderen als der jedesmal vorliegenden speciellen Transformation ebenso gut passen würde, wodurch der Vortheil der Specialisirung und ihr Charakter gänzlich unberücksichtigt bliebe, während die Auflösung der Gleichungen §. 11 (7.) nach den Grössen v_k diesen doppelten Zweck erreichen lässt und daher die genuine ist, wenn es sich um die Bestimmung der Substitutionscoefficienten $x_k^{(\lambda)}$ handelt.

Das Umgekehrte hiervon leisten die Covarianten. Stellt man n von einander unabhängige Gleichungen von der Form:

$$(11.) \qquad \Phi'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = r^\lambda \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

aus denselben her, und löst diese nach den Grössen ξ_k, also wieder nach den Variabeln der *transformirten* Formen auf, so dass dadurch die Gleichungen

$$(12.) \qquad \xi_h = \Xi_h(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

entstehen, dann folgt aus (7.) die identische Gleichung:

$$(13.) \qquad \xi_1^{(h)} x_1 + \xi_2^{(h)} x_2 + \cdots + \xi_n^{(h)} x_n = \Xi_h(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

und setzt man demnach, wie in §. 11, allmälig

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 0, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1, \quad \ldots \quad x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots \quad x_n = 1, \end{aligned}$$

so folgt:

$$(14.) \quad \xi_1^{(h)} = \Xi_h(1, 0, \ldots 0), \quad \xi_2^{(h)} = \Xi_h(0, 1, \ldots 0), \quad \ldots \quad \xi_n^{(h)} = \Xi_h(0, 0, \ldots 1).$$

Es werden also die Coefficienten der inversen Substitution ebenfalls durch Auflösung von nur n Gleichungen erhalten.

Ueberhaupt giebt die Gleichung (13.) das ebenso wichtige, dem Theorem VI. §. 11 entsprechende

Theorem X.

Wenn man von den Covarianten einer einzelnen homogenen Function oder eines Functionensystemes n von einander unabhängige auswählt und die

aus denselben gebildeten n Gleichungen von der Form:

$$\Phi'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = r^\lambda . \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

nach den Grössen ξ_k auflöst, so kann man die Werthe der ξ_k nicht allein als rationale sondern sogar als lineare Functionen der Grössen x_k darstellen und es haftet die Irrationalität der Auflösung allein an den Coefficienten der Variabeln.

Um die gegenwärtige Substitutionsbestimmung ebenfalls durch das elementare Beispiel §. 11 zu erläutern, seien wieder

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

zwei homogene Functionen der zweiten Ordnung, welche in folgende:

$$(15.) \qquad F'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2, \qquad F_1'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

transformirt werden sollen. Entnimmt man aus §. 11 (14.) die drei zugehörigen Formen:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3), \qquad \Psi_1(u_1, u_2, u_3), \qquad \Psi_2(u_1, u_2, u_3),$$

von denen die mittlere die simultane ist, und bildet zu denselben nochmals die zugehörigen Formen, so reproducirt man, wie bekannt, durch die erste und dritte die ursprünglichen Functionen F und F_1 selbst als Covarianten, hingegen giebt die mittlere die noch fehlende dritte Covariante, welche durch $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet werden soll. In der transformirten Form ist die zugehörige Function zu $\Psi_1(v_1, v_2, v_3) = (G_2 + G_3)v_1^2 + (G_3 + G_1)v_2^2 + (G_1 + G_2)v_3^2$ die folgende:

$$\Phi'(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (G_3 + G_1)(G_1 + G_2)\xi_1^2 + (G_1 + G_2)(G_2 + G_3)\xi_2^2 + (G_2 + G_3)(G_3 + G_1)\xi_3^2,$$

also erhält man, da

$$\Phi' = r^2\Phi, \quad F' = F, \quad F_1' = F_1$$

ist, die folgenden drei Gleichnngen:

$$(16.) \quad \begin{cases} r^2.\Phi(x_1,x_2,x_3) = (G_3+G_1)(G_1+G_2)\xi_1^2 + (G_1+G_2)(G_2+G_3)\xi_2^2 + (G_2+G_3)(G_3+G_1)\xi_3^2, \\ F(x_1,x_2,x_3) = G_1\xi_1^2 + G_2\xi_2^2 + G_3\xi_3^2, \\ F_1(x_1,x_2,x_3) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \end{cases}$$

und als Auflösung derselben nach ξ_1^2, ξ_2^2, ξ_3^2:

$$(17.) \quad \begin{cases} (G_1-G_2)(G_1-G_3)\xi_1^2 = r^2.\Phi - (G_2+G_3)F - G_1(G_2+G_3)F_1, \\ (G_2-G_3)(G_2-G_1)\xi_2^2 = r^2.\Phi - (G_3+G_1)F - G_2(G_3+G_1)F_1, \\ (G_3-G_1)(G_3-G_2)\xi_3^2 = r^2.\Phi - (G_1+G_2)F - G_3(G_1+G_2)F_1. \end{cases}$$

Aus den Formeln §. 11 (15.) folgt

$$r^2 = \frac{1}{Q}; \qquad G_2 + G_3 = r^2 Q_1 - G_1: \qquad \Delta_1 = \frac{d\Delta}{dG_1} = (G_1 - G_2)(G_1 - G_3)\, Q^2$$

u. s. w.; daher ist

$$\Delta_k . \xi_k^2 = \Phi + (G_k Q - Q_1)(F - G_k F_1),$$

also

$$(18.)\quad \xi_k = \sqrt{\frac{\Phi(x_1, x_2, x_3) + (G_k Q - Q_1)\{F(x_1, x_2, x_3) - G_k F_1(x_1, x_2, x_3)\}}{\Delta_k}} = \Xi_k(x_1, x_2, x_3),$$

worin für k allmälig 1, 2, 3 zu setzen ist.

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (18.) muss nun nach dem entwickelten Princip in Bezug auf die Variabeln x_1, x_2, x_3 ein vollständiges Quadrat, d. h. Ξ eine lineare Function derselben sein, und daher nach (14.) die folgenden *inversen* Substitutionscoefficienten liefern:

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(1, 0, 0) + (G_k Q - Q_1)\{F(1, 0, 0) - G_k F_1(1, 0, 0)\}}{\Delta_k}},$$

$$\xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(0, 1, 0) + (G_k Q - Q_1)\{F(0, 1, 0) - G_k F_1(0, 1, 0)\}}{\Delta_k}},$$

$$\xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\Phi(0, 0, 1) + (G_k Q - Q_1)\{F(0, 0, 1) - G_k F_1(0, 0, 1)\}}{\Delta_k}}.$$

Die weitere Anwendung dieser Transformation giebt auch die Auflösung der Gleichungen

$$(19.)\qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

in einer anderen Form als in §. 11 (18.), nämlich die Reduction derselben auf lineare Gleichungen. Löst man nämlich die Gleichungen (19.) in den transformirten Formen (15.) auf, so erhält man

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2}$$

und durch Substitution dieser Werthe in (18.):

$$\sqrt{G_2 - G_3} : \sqrt{G_3 - G_1} : \sqrt{G_1 - G_2} = \Xi_1(x_1, x_2, x_3) : \Xi_2(x_1, x_2, x_3) : \Xi_3(x_1, x_2, x_3),$$

welche Gleichungen nach dem Obigen in Bezug auf die Unbekannten x_1, x_2, x_3 *linear* sind.

Das höchst einfache Princip, welches in den Gleichungen (14.) und im Theorem X. enthalten ist, umfasst beinahe alle Probleme der rationalen Algebra, und man kann die grosse Reihe eleganter Darstellungen, welche an verschiedenen Orten für Probleme, welche dem behandelten Beispiel analog sind,

gegeben worden sind, und welche jedesmal durch geeignete Formenbildungen bewiesen werden, auf obige Quelle zurückführen. Ich habe schon im §. 11 bemerkt, dass ich diese Vorstellungsweise von dem Charakter sowohl der zugehörigen Formen als der Covarianten bis jetzt nirgends vorgefunden habe, während ich denselben gleich von vorne hinein schon in meiner in der Einleitung citirten Abhandlung vom Jahre 1851 so aufgefasst habe. Ich glaube daher, dass es nicht überflüssig ist, als Resultat der in §. 11 und in diesem §. gegebenen Darstellungen hervorzuheben, dass jedesmal, wenn man die gegebene homogene Function oder das gegebene Functionensystem einer beliebigen linearen Transformation unterworfen hat,

1) die rechten Seiten der transponirten Substitution selbst:

$$v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n$$

ein vollständiges System von n von einander unabhängigen zugehörigen Formen der ersten Ordnung in Bezug auf die Variabeln u_k,

2) die rechten Seiten der inversen Substitution selbst

$$\xi_k = \xi_1^{(k)} x_1 + \xi_2^{(k)} x_2 + \cdots + \xi_n^{(k)} x_n$$

ein vollständiges System von n von einander unabhängigen Covarianten der ersten Ordnung in Bezug auf die Variabeln x_k bilden,

3) dass diese Systeme im Allgemeinen irrationale Coefficienten haben, und dass alle übrigen rationalen zugehörigen Formen und Covarianten als symmetrische Functionen der respective unter 1) und 2) angegebenen aufzufassen sind.

Hierdurch tritt deutlich hervor, dass es von grosser Wichtigkeit ist, wenn man für eine gegebene Function oder für ein gegebenes Functionensystem *rationale* zugehörige Formen und Covarianten der *ersten* Ordnung finden kann; es hat in der That zuerst Herr *Hermite* in seiner schönen Abhandlung über die binären Formen der fünften Ordnung (Cambridge and Dublin Mathematical Journal Vol. IX) gezeigt, dass für diese binären Formen dergleichen existiren, und durch dieselben eine merkwürdige Transformation begründet. In einer späteren Abhandlung (dieses Journal Bd. 57, pag. 375) hat derselbe auch die linearen rationalen Covarianten für ein System von drei homogenen Functionen zweiter Ordnung von drei Variabeln aufgestellt, und endlich hat Herr *Salmon* in den Philosophical Transactions 1860 pag. 236 auch ihre Existenz für die cubischen Formen von vier Variabeln nachgewiesen. Sie finden sich überdies noch in vielen anderen Fällen, jedoch, wie man leicht aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{p\gamma - 1}{n},$$

welche den Exponenten der Substitutionsdeterminante nach (10.) in diesem Falle bestimmt, schliessen kann, in denjenigen Fällen sicher nicht, in welchen p d. h. die Ordnung der Function durch n theilbar ist, weil λ für rationale Covarianten offenbar eine positive ganze Zahl sein muss.

§. 13.

Von den Functionalinvarianten.

Ich habe nicht die Absicht bei den gegenwärtigen allgemeinen Entwickelungen die eigentliche Formenbildung mit zu berücksichtigen, welche man auf eine sehr ausführliche Weise in den bekannten Abhandlungen und Werken über diesen Gegenstand vorfindet. Indessen dürfte es doch zweckmässig sein mindestens ein Princip hier genauer zu verfolgen, welches eine *directe* Darstellung der Covarianten gewährt, und in seinen weiteren Consequenzen die ganze vorliegende Theorie umfasst. Dasselbe beruht auf einer weiteren Verallgemeinerung des Begriffes der *Jacobi*schen Functionaldeterminante, und datirt von der Determinante des Herrn *Hesse* her, dessen Untersuchungen überhaupt die ersten Principien der Invariantentheorie hervorgerufen haben. Es macht gleichzeitig eine Reihe von Operationen und Benennungen, welche man in englischen Werken findet, wie Evectant, Emanant, Cogredient überflüssig, indem es diese scheinbar verschiedenartigen Processe auf eine einzige Quelle zurückführt und überdies umfassender ist. Dasselbe findet sich bereits in meiner Abhandlung über die cubischen Formen (dieses Journal Bd. 55, pag. 86), soweit es dort erforderlich war, und ich glaube, dass die Benennung der Formen, welche das Princip liefert, wie ich sie in der Ueberschrift angegeben habe, sich durch die Analogie mit den entsprechenden *Jacobi*schen empfiehlt, und dadurch leicht verständlich wird.

Wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen eine homogene Function der p^{ten} Ordnung allmälig in den folgenden Formen schreibt:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} F(x_1, x_2 \dots x_n) &= \frac{1}{p}\left\{x_1\frac{dF}{dx_1} + x_2\frac{dF}{dx_2} + \cdots + x_n\frac{dF}{dx_n}\right\} \\ &= \frac{1}{p(p-1)}\left\{x_1^2\frac{d^2F}{dx_1^2} + 2x_1x_2\frac{d^2F}{dx_1dx_2} + \cdots + x_n^2\frac{d^2F}{dx_n^2}\right\} \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{1}{p(p-1)\dots(p-k+1)}\left\{x_1^k\frac{d^kF}{dx_1^k} + kx_1^{k-1}x_2\frac{d^kF}{dx_1^{k-1}dx_2} + \cdots + x_n^k\frac{d^kF}{dx_n^k}\right\} \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

so stellt sich bei der Transformation dieser Functionen durch lineare Substitutionen heraus, dass es gleichgültig ist, ob man die Function F in einer dieser Formen, z. B.

$$F = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-k+1)} \Sigma \frac{d^k F}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots,$$

wo $\alpha+\beta+\gamma+\dots = k$ ist, als homogene Function in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln transformirt und nachher die Substitution in den Coefficienten $\frac{d^k F}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots}$ ausführt, oder ob man F gleich vollständig transformirt. Denn die Coefficienten einer transformirten Form der p^{ten} Ordnung werden nach dem *Taylor*schen Satze dadurch gebildet, dass man die Function p mal hintereinander differentiirt und statt der Incremente jedesmal gleiche oder verschiedene Systeme der Substitutionscoefficienten setzt, welche je einer Verticalzeile der Substitution angehören. Die oben angedeutete unterbrochene Transformation würde aber erfordern, dass man in diesem Sinne erst die k^{ten} Differentiale bildet und dann von denselben die $(p-k)^{\text{ten}}$ nimmt, was aber wieder die p^{ten} giebt und daher zu demselben Resultate führt.

Hieraus geht hervor, *dass jede einfache oder simultane Invariante des Functionensystemes* (1.), *welche aus den einstweilen als constant betrachteten Coefficienten der explicite stehenden Variabeln gebildet ist, eine Covariante der Function F werden muss*, denn bezeichnet Φ eine solche Invariante, so genügt sie der Gleichung

$$\Phi' = r^\lambda \Phi,$$

und diese Gleichung bleibt aus dem oben angegebenen Grunde noch bestehen, wenn jetzt Φ' und Φ als veränderlich gedacht werden und man auf Φ' die ursprüngliche Substitution anwendet.

Man überzeugt sich leicht davon, dass auf diese Weise unter der vielfältigen Anzahl der Covarianten sicher auch die normalmässige Anzahl der von einander unabhängigen gefunden wird, denn die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten des Systems (1.) ist mindestens grösser als die Anzahl der Variabeln, indem beispielsweise schon die einfachen Invarianten nur einer der Functionen des Systemes (1.) von einer gewissen Ordnung an diese Zahl überschreiten, und es sind auch die entsprechenden Covarianten, wenn man sie sowohl in Bezug auf die Coefficienten als in Bezug auf die Variabeln betrachtet, von einander unabhängig, nur kann man durch Elimination der n Variabeln aus je $n+1$ derselben das jedesmalige

System auf ein anderes reduciren, welches nur n mit Variabeln versehene Covarianten behält, während die übrigen, weil sie von den Variabeln befreit sind, Invarianten werden.

Wenn statt einer einzelnen Function ein ganzes Functionensystem ursprünglich gegeben ist, so gilt das vorstehende Gesetz offenbar in derselben Weise, d. h. man kann ebenso viele Systeme (1.) bilden als Functionen im Systeme gegeben sind und alle zu einem System verschmelzen, aus welchem alsdann gemeinschaftlich einfache und simultane Invarianten in der bezeichneten Weise entnommen werden. Der speciellste Fall hiervon tritt ein, wenn die Anzahl der gegebenen Functionen der Anzahl der Variabeln gleich ist, und jede Function nur in der Form der ersten Gleichung (1.) d. h. als lineare Function der explicite stehenden Variabeln geschrieben wird. Ein solches System hat nur eine Invariante, nämlich die Determinante, welche *Jacobi* die *Functionaldeterminante* genannt hat. Da hiernach eine Verallgemeinerung dieser Functionsclasse gewonnen ist, welche auch noch in anderer Beziehung mit derselben analog ist, so will ich alle in derselben enthaltenen Covarianten *Functionalinvarianten* nennen, und sogleich bemerken, dass, wenn auch nicht alle Covarianten von selbst Functionalinvarianten sind, dennoch, nach dem Vorhergehenden, sich jede aus Functionalinvarianten und constanten Invarianten zusammensetzen lässt. Es soll übrigens jener Beisatz auch jedesmal dem Namen einer besonderen Invariante, wenn sie einen solchen hat, beigefügt werden, sobald sie aus den Coefficienten eines oder mehrerer der Systeme (1.) gebildet wird. Wenn man also, nach der treffend gewählten Bezeichnungsweise des Herrn *Sylvester*, Discriminante diejenige Invariante nennt, welche durch ihr Verschwinden das Endresultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_2} = 0, \qquad \ldots \qquad \frac{dF}{dx_n} = 0$$

ausdrückt, so nenne ich z. B. jede aus den p^{ten} Differentialquotienten der Function gebildete Discriminante eine *Functionaldiscriminante*. Die Functionaldiscriminanten besonders zeichnen sich durch Eigenschaften aus, welche sie mit den Functionaldeterminanten gemein haben, ich kann indessen hier nicht darauf eingehen.

Aber das angegebene Gesetz hat noch eine weitere Ausdehnung: *es gehört nämlich schon jede einzelne homogene Function zu einem Functionensystem, dessen Functionen gleichzeitig mit der gegebenen transformirt werden.*

nämlich zu dem System ihrer Covarianten, mithin kann man das angegebene Gesetz auch auf jede Covariante anwenden, indem man selbige allmälig nach (1.) als homogene Function der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung schreibt und zu dem vorhandenen System hinzufügt. Es gilt also alles zusammengefasst:

Theorem XI.

Wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen jede Function eines gegebenen Functionensystemes allmälig als homogene Function der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln betrachtet und aus den Coefficienten derselben einfache und simultane Invarianten bildet, so sind letztere eine bestimmte Classe von Covarianten — Functionalinvarianten —, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen. Wenn man ferner jede ermittelte Covariante, nach demselben Satz, in den Formen der ersten, zweiten u. s. w. k^{ten} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln schreibt und dem angegebenen System beifügt, so sind die einfachen und simultanen Invarianten des vereinigten Systemes ebenfalls Covarianten derselben Art.

Ferner als Zusatz:

Wenn man aus den Coefficienten des durch Theorem XI. entstandenen Systemes in derselben Weise Covarianten bildet, so erhält man neue Covarianten.

Diese letzteren würden alsdann Functionalcovarianten genannt werden müssen.

Da endlich die letzten Ableitungen der gegebenen Functionen und der Covarianten constant sind, so erhält man auf dieselbe Weise auch Invarianten, so dass das Theorem in vielen Fällen hinreicht, um ein vollständiges System von einander unabhängiger Invarianten und Covarianten zu bilden, wenn man eine einzige Invariante kennt.

Die vorstehenden Sätze finden auch unmittelbar auf die *zugehörigen* Formen Anwendung. Da nämlich alle zugehörigen Formen eines Systemes ebenfalls durch ein und dieselbe Substitution, welche aber die transponirte ist, gleichzeitig in ihre entsprechenden transformirt werden, so folgt, dass sie in der Beziehung von Covarianten zu einander stehen, also gilt

Theorem XII.

Wenn eine einzige zugehörige Form bekannt ist, und man lässt dieselbe die Stelle der ursprünglich gegebenen Function im Theorem XI. vertreten, so kann man auf dieselbe Weise Systeme von neuen zugehörigen Formen ableiten, wie aus Theorem XI. Covarianten hervorgehen.

Die folgenden speciellen Sätze, welche hinlänglich bekannt sind, ergeben sich ohne Weiteres aus der vorstehenden Theorie, wenn man beachtet, dass die letzten Ableitungen einer homogenen Function ihre Coefficienten reproduciren:

a) Jede aus den Coefficienten einer Covariante gebildete Invariante, Covariante oder zugehörige Form ist respective auch eine solche für die ursprüngliche Function selbst.

b) Alle aus den Coefficienten einer zugehörigen Form gebildeten Invarianten sind wieder Invarianten, hingegen die Covarianten und zugehörigen Formen umgekehrt zugehörige Formen und Covarianten.

Der folgende §. wird weitere Ausdehnungen dieser Theoreme zeigen.

§. 14.

Von den Zwischenformen.

Wenn man auf eine lineare Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

gleichzeitig die ursprüngliche Substitution

$$(1.) \qquad x_k = x_k^{(1)} \xi_1 + x_k^{(2)} \xi_2 + \cdots + x_k^{(n)} \xi_n$$

und die transponirte

$$(2.) \qquad v_k = x_1^{(k)} u_1 + x_2^{(k)} u_2 + \cdots + x_n^{(k)} u_n$$

anwendet, so ergiebt sich sehr leicht, dass U direct in die entsprechende:

$$U' = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + \cdots + v_n \xi_n$$

übergeht. In der That setzt man (2.) in U' ein und ordnet nach den Grössen u_k, so entsteht wegen (1.):

$$(3.) \qquad U' = U.$$

Diese sehr evidente Gleichung ist nichts desto weniger sehr wichtig. Wenn man zunächst bemerkt, dass die Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten dadurch auf eine symmetrische Weise bewerkstelligt werden kann, dass man eine beliebige lineare Function U der Wurzeln sucht, so folgt aus (3.), dass nur erforderlich ist, eine derartige Auflösung in irgend welchen passend gewählten durch lineare Substitutionen transformirten speciellen Formen zu bewerkstelligen, d. h. eine lineare Function U' der transformirten Wurzeln zu finden, und die Coefficienten v_k durch zugehörige Formen nach §. 11 darzustellen, wie ich auch in dem Beispiel des §. 11 gezeigt habe. Mit welchen

Irrationabilitäten alsdann auch U' behaftet erscheint, so findet man dennoch die Coefficienten der u_k d. h. der Wurzeln ohne Weiteres, wenn man allmälig $u_1 = 1, u_2 = 0, \ldots u_n = 0$; $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0, \ldots u_n = 0$ u. s. w. setzt, weil wegen (3.) für jeden beliebigen Werth der u_k, $U' = U$ ist. Sieht man von dem algebraischen Problem, also davon ab, dass die Variabeln x_k und ξ_k specielle Werthe annehmen, so wird man im Allgemeinen für jedes System gegebener Functionen eine lineare Function U durch die zugehörigen Formen desselben in Verbindung mit den Covarianten auf irrationale (wenn auch nicht immer explicite) Weise darstellen können, wenn man durch n von einander unabhängige Covarianten die $2n$ Variabeln ausdrückt und in U einsetzt. Es hat sich nun in mehreren Fällen herausgestellt, wie z. B. bei der von Herrn *Cayley* gegebenen Darstellung eines linearen Factors der cubischen und biquadratischen Gleichung vermittelst Covarianten (dieses Journal Bd. 50 p. 287), dass man hierbei zu complicirteren Resultaten gelangt, als sie die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen ergiebt. Dasselbe findet in erhöhtem Masse statt, wenn analoge Probleme auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen, indem sogar die Irrationalität einen höheren Grad annehmen kann, als nothwendig ist. Den Grund hiervon habe ich darin gefunden, dass unter den mannigfach vorhandenen Formensystemen ein drittes Functionensystem existirt, welches als den zugehörigen Formen und Covarianten *coordinirt* angesehen werden muss, und welches überdies eine nothwendige Zwischenstufe zwischen den zugehörigen Formen und Covarianten einnimmt. Ich habe daher die Functionen dieses Systemes *Zwischenformen* genannt. *Bezeichnet man durch Θ eine Function gleichzeitig der Variabeln x_k und u_k, so ist dieselbe Zwischenform, wenn sie der Gleichung*

$$(4.) \qquad \Theta'(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n; v_1, v_2, \ldots v_n) = r^\lambda . \Theta(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_n)$$

genügt, sobald man auf die Variabeln x_k die ursprüngliche und auf die Variabeln u_k die transponirte Substitution anwendet.

Zu diesen Zwischenformen gehört von selbst die lineare Function U, weil sie der Gleichung $U' = U$ genügt, ferner jedes Product von Potenzen der zugehörigen Formen und Covarianten; eigentliche Zwischenformen sind aber die auf folgende doppelte Weise gebildeten Functionen:

a) Jede simultane Covariante, welche eine homogene Function oder ein Functionensystem mit der linearen Function U gemein hat.

b) Jede zugehörige Functionalform, d. h. jede Function, welche entsteht, wenn man nach dem Satze von den homogenen Functionen das gegebene

Functionensystem und dessen Covarianten in den verschiedenen Formen des Theoremes XI §. 13 schreibt und alsdann, statt Invarianten, zugehörige Formen aus den Coefficienten des Systemes zusammensetzt.

Hier tritt nun das Theorem IX. §. 11 zur vollen Geltung, nach welchem man wegen *b)* ganz direct vielfache Systeme von Zwischenformen ableiten kann, indem man nämlich aus den Functionensystemen:

$$F = \frac{1}{p(p-1)\dots(p-k+1)} \Sigma \frac{d^k F}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots,$$

$$\Phi = \frac{1}{p_1(p_1-1)\dots(p_1-k+1)} \Sigma \frac{d^k \Phi}{dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma \dots} x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots$$

die zugehörigen Formen des Theorems IX §. 11 entweder simultan entnimmt, in welchem Falle k jeder ganze Zahlenwerth kleiner als die Ordnungen von F und Φ sein kann, oder aus jeder der Functionen einzeln, im letzteren Falle aber k *gerade* voraussetzt.

Es ist jedoch nach dem Früheren die Anzahl der in Bezug auf beide Systeme von Variabeln von einander unabhängigen Zwischenformen gleich $2n$, in Bezug auf jedes System einzeln gleich n, und eliminirt man aus je $(n+1)$ derselben *ein* System der Variabeln, so ist das Endresultat der Elimination entweder eine Covariante oder eine zugehörige Form, je nach der Wahl der eliminirten Variabeln.

Die Zwischenformen genügen selbstständig einem System von partiellen Differentialgleichungen, welches sofort aus §. 12 (9.) abgeleitet werden kann, wenn man dieses System für ein Functionensystem bildet, dem man noch die lineare Function U beigefügt hat, nämlich

$$(5.) \quad \begin{cases} \Sigma D_{\varrho\varrho}(\Theta) + u_\varrho \frac{d\Theta}{du_\varrho} - x_\varrho \frac{d\Theta}{dx_\varrho} = \lambda . \Theta, \\ \Sigma D_{\varrho\sigma}(\Theta) + u_\sigma \frac{d\Theta}{du_\varrho} - x_\varrho \frac{d\Theta}{dx_\sigma} = 0, \end{cases}$$

und es ist alsdann

$$(6.) \quad \lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \dots + p_n\gamma_n + q - q_1}{n},$$

wenn Θ in Bezug auf die Variabeln x_k von der q^{ten} und in Bezug auf die Variabeln u_k von der q_1^{ten} Ordnung ist.

Die Zwischenformen welche einer einzigen homogenen Function angehören, sind von besonderer Wichtigkeit, daher will ich einige auf dieselben bezügliche Theoreme und Sätze für diesen Fall besonders vorführen.

Theorem XIII.

Wenn Θ und ϑ zwei beliebige Zwischenformen sind, welche auch einander gleich sein können, und man ordnet eine derselben in der Theorem XI. §. 13 angegebenen Weise nach den Variabeln x_k, die andere in der Theorem XII. §. 13 angegebenen Weise nach den Variabeln u_k, so dass sie in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln von gleicher h^{ter} Ordnung sind, also

$$(7.)\quad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{q(q-1)\dots(q-h+1)} \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \dots, \\ \vartheta = \dfrac{1}{q_1(q_1-1)\dots(q_1-h+1)} \Sigma\Sigma\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \dots \end{cases}$$

ist, wo $\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ und $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ der Kürze halber die h^{ten} Ableitungen nach den Variabeln respective x_k und u_k bedeuten, so ist

$$(8.)\qquad \Theta_1 = \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine neue Zwischenform der ursprünglichen Function.

Zum Beweise des Satzes will ich die partiellen Differentialgleichungen (7.) auf eine einzelne Function anwenden, in welchem Falle sie in

$$(9.)\quad \begin{cases} D_{\varrho\sigma}(\Theta) + u_\sigma \dfrac{d\Theta}{du_\varrho} - x_\varrho \dfrac{d\Theta}{dx_\sigma} = \lambda\Theta \text{ oder } = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(\vartheta) + u_\sigma \dfrac{d\vartheta}{du_\varrho} - x_\varrho \dfrac{d\vartheta}{dx_\sigma} = \lambda_1\vartheta \text{ oder } = 0 \end{cases}$$

für die Functionen Θ und ϑ übergehen.

Da diese Gleichungen identisch erfüllt sind, so müssen sie auch noch bestehen, wenn man sie nach den Variabeln respective u_k und x_k $h$mal differentiirt und statt der h^{ten} Potenzen und Producte der Incremente beliebige Grössen auf beiden Seiten der Gleichungen setzt. Es sollen nun in der ersten der Gleichungen (9.) statt der Potenzen und Producte der Incremente dx_k h^{ter} Ordnung die entsprechenden $\vartheta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ und in der zweiten statt der Potenzen und Producte der Incremente du_k h^{ter} Ordnung die entsprechenden $\Theta_{\varkappa\lambda\mu\dots}$ gesetzt werden. Dadurch gehen offenbar sowohl Θ als ϑ in Θ_1 über, ferner wird $D_{\varrho\sigma}(\Theta)$ in eine Function: $D^{(\vartheta)}_{\varrho\sigma}(\Theta)$ und $D_{\varrho\sigma}(\vartheta)$ in eine Function: $D^{(\Theta)}_{\varrho\sigma}(\vartheta)$ von der Art übergehen, dass

$$D^{(\vartheta)}_{\varrho\sigma}(\Theta) + D^{(\Theta)}_{\varrho\sigma}(\vartheta) = D_{\varrho\sigma}(\Theta_1)$$

wird, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man auf der rechten Seite von (8.) die Operation $D_{\varrho\sigma}$ sowohl auf die ersten Factoren als auf die zweiten

Factoren der einzelnen Terme anwendet, endlich wird auch

$$u_\sigma \frac{d\Theta}{du_\varrho} + u_\sigma \frac{d\vartheta}{du_\varrho} = u_\sigma \frac{d\Theta_1}{du_\varrho},$$
$$x_\varrho \frac{d\Theta}{dx_\sigma} + x_\varrho \frac{d\vartheta}{dx_\sigma} = x_\varrho \frac{d\Theta_1}{dx_\sigma},$$

folglich erhält man nach Addition der Gleichungen (9.)

$$D_{\varrho\sigma}(\Theta_1) + u_\sigma \frac{d\Theta_1}{du_\varrho} - x_\varrho \frac{d\Theta_1}{dx_\sigma} = (\lambda + \lambda_1)\Theta \text{ oder } = 0,$$

welche Gleichung Θ_1 als Zwischenform definirt, wie verlangt wurde.

Als specieller Fall des Theoremes ergiebt sich zunächst folgender Satz:

1. *Wenn Φ eine Covariante und Ψ eine zugehörige Form ist, und man schreibt beide in den Formen* (7.):

$$\Phi = \frac{1}{q(q-1)\dots(q-h+1)} \Sigma\Sigma \Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \dots,$$
$$\Psi = \frac{1}{q_1(q_1-1)\dots(q_1-h+1)} \Sigma\Sigma \Psi_{\varkappa\lambda\mu\dots} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \dots$$

ebenfalls von gleicher h^{ter} Ordnung in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln, so ist

$$\Theta = \Sigma\Sigma \Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots} \Psi_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Zwischenform.

Die Gültigkeit des Satzes ergiebt sich sofort, sei es dass man denselben als Zusatz zum Theorem betrachtet, oder auch von Neuem beweist, indem man in den Gleichungen (9.) Φ statt Θ, Ψ statt ϑ setzt, und die in der ersten derselben befindlichen Differentialquotienten nach den Variabeln u_k, sowie die in der zweiten vorkommenden Differentialquotienten nach den Variabeln x_k gleich Null setzt.

Da die Coefficienten der Functionen Φ und Ψ durch die letzten Ableitungen derselben nach den Variabeln reproducirt werden, so erhält man in weiterer Specialisirung von 1) den folgenden bekannten Satz:

2. *Wenn*

$$\Phi = \Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda\mu\dots} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \dots, \qquad \Psi = \Sigma\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu\dots} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \dots$$

eine Covariante und eine zugehörige Form derselben Ordnung in Bezug auf die Variabeln sind, so ist immer

$$\Sigma\Sigma b_{\varkappa\lambda\mu\dots} s_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Invariante, wenn hingegen Φ von höherer Ordnung als Ψ ist, so wird

$$\Sigma\Sigma \Phi_{\varkappa\lambda\mu\dots} s_{\varkappa\lambda\mu\dots}$$

eine Covariante, und wenn endlich Ψ von höherer Ordnung als Φ ist,

$$\Sigma\Sigma\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}b_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$$

eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass die Ableitungen $\Phi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ und $\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}$ die Coefficienten der Functionen:

$$\Sigma\Sigma\Phi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu\ldots,$$

$$\Sigma\Sigma\Psi_{\varkappa\lambda\mu\ldots}u_\varkappa u_\lambda u_\mu\ldots$$

sind, welche in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln dieselbe Ordnung haben, als jedesmal die Variabeln von respective Ψ und Φ erreichen.

Man kann durch Anwendung der früheren Sätze über Invarianten, zugehörige Formen und Covarianten, die Anzahl der Zwischenformen beliebig vervielfältigen, insbesondere indem man sie nach den Variabeln x_k oder u_k, wie unter (7.) geschehen ist, anordnet und alsdann aus ihren Coefficienten Functionalformen bildet, woraus alsdann folgender Satz hervorgeht, dem sich noch mehrere ähnliche leicht anreihen lassen:

3. *Wenn man eine Zwischenform nach den Potenzen und Producten der Variabeln x_k vollständig ordnet, so dass die Coefficienten nur Functionen der u_k und der Constanten sind, so ist jede aus diesen Coefficienten gebildete Covariante eine Zwischenform, und jede aus denselben zusammengesetzte Invariante und zugehörige Form eine zugehörige Form. Wenn man hingegen dieselbe Anordnung nach den Variabeln u_k macht, so dass die Coefficienten nur noch Functionen der x_k und der Constanten sind, so ist jede aus diesen Coefficienten gebildete zugehörige Form eine Zwischenform und jede Invariante und Covariante eine Covariante der ursprünglichen Function oder des Functionensystemes.*

Ich schliesse diese Entwickelungen über Zwischenformen noch mit folgendem Theorem, welches symbolisch die partiellen Differential-Gleichungen enthält, denen die Invarianten einer homogenen Function genügen, und welches dadurch einen Gesichtspunkt zur Verallgemeinerung dieser Relationen bietet.

Theorem XIV.

Bezeichnet man durch

$$(10.)\qquad \Psi = \Sigma\Sigma P_{\varkappa\lambda\mu\ldots}u_\varkappa u_\lambda u_\mu\ldots$$

eine zugehörige Form, welche durch Differentiirung einer Invariante P entstanden und daher von derselben p^{ten} Ordnung in Bezug auf die Variabeln ist, als die ursprüngliche Function:

$$(10^a.)\qquad F = \Sigma\Sigma a_{\varkappa\lambda\mu\ldots}x_\varkappa x_\lambda x_\mu\ldots,$$

und bildet man nach Theorem XIII. die Zwischenform

$$(11.) \qquad \Theta = \Sigma\Sigma \Psi_{\lambda\mu\ldots} F_{\lambda\mu\ldots},$$

in welcher $\Psi_{\lambda\mu\ldots}$ und $F_{\lambda\mu\ldots}$ die durch $p!$ dividirten $(p-1)^{ten}$ Ableitungen von Ψ und F nach den Variabeln bedeuten, also in Bezug auf letztere linear sind, so ist immer

$$(12.) \qquad p.\Theta = \lambda.P.(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n),$$

d. h. die lineare Zwischenform (11.) *ist gleich der evidenten Zwischenform U multiplicirt mit der Invariante P und einem Zahlenfactor.*

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man (10.) und (10^a.) in (11.) substituirt, indem der Coefficient von $u_\varrho x_\sigma$ der rechten Seite von (11.) dadurch in

$$\Sigma\Sigma P_{\varrho\lambda\mu\ldots} a_{\sigma\lambda\mu\ldots}$$

übergeht, was nach §. 5 (4.) gleich $\frac{1}{p} D_{\varrho\sigma}(P)$ ist. Da nun P den partiellen Differentialgleichungen für Invarianten genügt, so ist dieser Coefficient gleich Null, so oft ϱ und σ verschieden sind, und gleich $\frac{\lambda}{p} P$, wenn $\varrho=\sigma$ ist, was die Gleichung (12.) giebt.

Man kann sich nun aber leicht davon überzeugen, dass noch andere analoge Gleichungen wie (12.) existiren müssen, in denen die rechte Seite nicht allein U sondern auch eine höhere Potenz von U ist, denn es muss sich U als Zwischenform aus den übrigen zusammensetzen lassen, und ihre Anzahl ist hinreichend gross um Potenzen von U mittelst derselben darstellen zu können. Ist demnach Θ_1 eine Zwischenform der m^{ten} Ordnung in Bezug auf jedes der beiden Variabelnsysteme, welche der Gleichung

$$(13.) \qquad \Theta_1 = P_1(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)^m$$

genügt, so muss P_1 eine Invariante sein, für welche noch andere Gesetze als die in den Differentialgleichungen enthaltenen gelten und Verallgemeinerungen derselben sind, denn entwickelt man die rechte Seite von (13.) nach den Potenzen und Producten der Variabeln u_k und x_k, so finden sich auf derselben nur diejenigen, in welchen die u_k und x_k gleiche Indices haben, und diese sind dann sämmtlich in ein und denselben Coefficienten P_1 multiplicirt, daher müssen auch die Coefficienten von $u_1^\alpha x_1^\alpha$, $u_2^\beta x_2^\beta$, $u_3^\gamma x_3^\gamma$, ... auf der linken Seite von (13.) alle einander gleich und gleich der Invariante P_1 sein, während die übrigen gleich Null sind. Diese Relationen gehören dann nur der individuellen Invariante P_1 an und sind für dieselbe fundamentale. In der That sind fast alle Eigenschaften der Invarianten cubischer Formen

von drei Variabeln, welche ich in den beiden citirten Abhandlungen gegeben habe, eine Folge dieses Principes, und obwohl ich bereits in der ersten Abhandlung vom Jahre 1850 (dieses Journal Bd. 39, §. 7) diese Grundgesetze der Invarianten S und T publicirt habe, so ist mir doch nicht bekannt, dass für andere Functionen, welche seitdem behandelt wurden, analoge Gesetze, welche tief in die Theorie der speciellen Functionen eingreifen, gefunden worden wären.

Zur Ermittelung derartiger Zwischenformen kann man sich unter Anderen eines symbolischen Gesetzes bedienen, welches ich im folgenden §. angeben werde, und welches mir in der citirten Abhandlung des 55sten Bandes die Theoreme §. 7, §. 20, u. s. w. geliefert hat. Weitere specielle Entwickelungen dieser Theorie muss ich indessen hier übergehen, und ich bemerke nur noch, dass die eigentliche Formenbildung für die gesammte Invariantentheorie vorzugsweise aus den unter *a)* und *b)* gegebenen Bildungsgesetzen der Zwischenformen insbesondere mit der dabei auseinandergesetzten Anwendung auf Theorem IX. §. 11, und aus Theorem XIII. mit seinen Zusätzen hergeleitet werden kann.

§. 15.

Ueber ein symbolisches Gesetz zur Darstellung zusammengesetzter Grundformen.

Durch vorstehende Entwickelungen glaube ich mein Ziel erreicht zu haben, welches in der Feststellung der Grundprincipien der vorliegenden Theorie bestand. Die Bildung der Fundamentalformen, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, für specielle Functionen lag nicht in meiner Absicht, und im Allgemeinen scheint sie für nicht bestimmt definirte Functionenclassen nicht zweckentsprechend zu sein, da sich nach den bisherigen Erfahrungen herausgestellt hat, dass für jeden Grad der gegebenen Functionen und für jede Anzahl von Veränderlichen der Kreis der Fundamentalformen sich anders gestaltet. Ich habe auch nicht alle Methoden hier aufgeführt, welche zur Bildung der Grundformen, wie ich insgesammt die entwickelten vier Classen nennen will, dienen, weil die übrigen zur Darstellung des Charakters derselben nicht erforderlich waren; dennoch möchte ich noch eine, nämlich die *Methode der symbolischen* Formen, nicht unberührt lassen, weil ich von derselben eine andere Anwendung mache, als gewöhnlich geschieht. Diese Methode ist von den Herren *Sylvester* und *Cayley* vorzugsweise und mit grosser Ausführlichkeit behandelt worden und die Untersuchungen derselben sind in dieser Beziehung so weit reichend, dass man fast jede sym-

bolische Form, welche sich auf einem anderen Wege ergeben hat, nachträglich als speciellen Fall jener Gesetze finden kann. Es bleibt indessen immer noch schwierig die vollständige Lösung eines speciellen Falles aus jenen Gesetzen herzuleiten. Ich benutze daher die symbolischen Formen nicht zur Ermittelung der Grundformen, sondern ich reducire umgekehrt *gegebene* Grundformen auf symbolische, um den algebraischen Zusammenhang, den sie mit anderen haben, und die Gesetze, welche zwischen ihnen stattfinden, zu ergründen, und hierzu lässt sich aus der Invariantentheorie selbst eine sehr einfache Methode entnehmen, welche in der folgenden Fassung noch nicht veröffentlicht worden ist, denn die Intentionen des Herrn *Sylvester* gehen, wie ich glaube, weiter hinaus und nach einer anderen Richtung. Ich setze nämlich für den angegebenen Zweck die Grundformen einer Function höherer Ordnung aus den Grundformen eines Systemes von solchen Functionen niederer Ordnung zusammen, welche durch Multiplication und Potenzirung auf den Grad der höheren gebracht werden können. Die Potenzen und Producte der Coefficienten der letzteren sind dann die Symbole für die Coefficienten der ursprünglichen Function. *Hierzu dient nun jedes Theorem, welches lehrt, wie man aus der Grundform einer einzelnen homogenen Function eine simultane Grundform für ein ganzes Functionensystem ableitet,* insbesondere Theorem VI., §. 10, welches für alle Grundformen gilt. Wenn man nämlich die Functionen des Systemes, für welches die behandelte Grundform eine simultane geworden ist, in Potenzen und Producte anderer elementarer Functionen von niederer Ordnung zerlegt, so bleibt diese Grundform auch für die letztere eine simultane, zerfällt aber alsdann in eine oder *mehrere* Grundformen dieser Elementarfunctionen. Kennt man nun die Gesetze der letzteren Grundformen, so hat man auch den Rückschluss auf die ersteren, da alle Umformungen mit den Symbolen auch für die wirklichen Grössen gültig bleiben, *wenn man die Anzahl der Symbolensysteme in der Weise hinlänglich gross gewählt hat, dass keine Relationen niederer Ordnung, als die Ordnung der zu behandelnden Grundform beträgt, zwischen denselben bestehen.* Sind beispielsweise die Symbole Potenzen und Producte der Coefficienten einer einzigen linearen Function, so dürfen nur lineare Umformungen damit vorgenommen werden, weil schon Relationen zweiter Ordnung zwischen denselben existiren. Der einfachste Fall der obigen Zerlegung tritt ein, wenn man jede Function des Systemes, zu welchem die entstandene simultane Grundform gehört, als ein Product linearer Factoren betrachtet, indem alsdann die Grundformen eines

linearen Systemes zum Vorschein kommen, welche aber die Determinanten desselben und die linearen Factoren selbst sind, so dass alsdann jede Grundform, welche Invariante oder zugehörige Form war, sich aus Determinanten allein, jede Grundform, welche Covariante und Zwischenform war, sich aus Determinanten und linearen Functionen gemischt zusammensetzt. Diesen Fall kann man in vielen Anwendungen, jedoch nicht immer, noch weiter dahin specialisiren, dass man jede Function des Systemes nur durch eine gleich hohe Potenz einer linearen Function ersetzt, und diesen habe ich vorzugsweise bei der Darstellung der symbolischen Formen zur Anwendung gebracht, welche ich in der citirten Abhandlung des 55sten Bandes gegeben habe; denselben speciellen Fall hat auch Herr *Clebsch* (dieses Journal Bd. 58, pag. 117, Bd. 59, pag. 1) aus meiner Abhandlung abgeleitet und seinen Darstellungen in mehreren Abhandlungen zu Grunde gelegt.

Die symbolische Methode, welche ich hier auseinandergesetzt habe, liefert ein neues Mittel die Zusammensetzung complicirter Formen aus den einfachen kennen zu lernen, und ich kann sie allen denen sehr empfehlen, welche die Resultate der allgemeinen Invariantentheorie verwerthen wollen; sie ersetzt oft mit grossem Erfolg die andere hierzu verwendete sehr bekannte, auch aus Theorem III. §. 4 hervorgehende Methode, welche darin besteht, dass man die verlangte Zusammensetzung in einer transformirten Form ausführt, in welcher über so viele Coefficienten auf eine geeignete Weise verfügt worden ist, als die Anzahl der Substitutionscoefficienten beträgt, welche aber beim weiteren Fortschreiten der rationalen Algebra durch ihre Complication unausführbar wird.

In allen Fällen bleibt die folgende Aufgabe zu lösen: „Für ein gegebenes Functionensystem die fundamentalen Grundformen zu finden, aus welchen sich alle übrigen zusammensetzen lassen, und die der individuellen Functionenclasse eigenthümlichen Gesetze derselben zu entwickeln." Der Werth einer Lösung dieses Problems hängt aber wesentlich davon ab, dass die in die Natur der *speciellen* Functionenclasse eingreifenden Gesetze in derselben dargestellt werden, da sich die Formenbildung allein aus den vorhandenen allgemeinen Principien in jedem Falle leicht ausführen lässt. Indessen glaube ich, dass zur weiteren Ausbildung der rationalen Algebra erforderlich wird, dieselben Principien auf Transformationen höherer Ordnung auszudehnen, wozu die vorliegenden Entwickelungen in ihrer Anlage die ersten Mittel bieten. Diese Anlage hat auch auf einem sehr naturgemässen Wege zu den partiellen

Differentialgleichungen geführt, welche sich in dieser Fassung bereits in meiner in der Einleitung erwähnten Abhandlung vom Jahre 1851 befinden. Ohne diese Abhandlung zu kennen und auf einem ganz anderen Wege haben die Herrn *Sylvester* und *Cayley* die partiellen Differentialgleichungen für *binäre* homogene Functionen, der erstere in Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1852 Section VI, der letztere in diesem Journal Bd. 47, pag. 111, abgeleitet, und später hat in den Philosophical Transactions 1854 pag. 245 Herr *Cayley* auch die *allgemeinen* Gleichungen aufgestellt, neuerdings Herr *Clebsch* in der oben citirten Abhandlung (dieses Journal Bd. 59, pag. 5). Eine strenge Ableitung derselben für die *binären* Formen hat Herr *Brioschi* in *Tortolinis* Annali di Mathem. 1859 pag. 82 gegeben. Es ist jedoch der von allen eingeschlagene Weg zu ihrer Darstellung sehr verschieden von dem meinigen, welcher, wie ich glaube, erst ihre eigentliche Bedeutung zeigt, indem er ihnen die Stellung zuweist, welche sie in der allgemeinen Invariantentheorie einnehmen. Es war auch weniger meine Absicht, diese Gleichungen abzuleiten, als die Theorie zu begründen.

Berlin, 1863.

Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen.

(Von Herrn *Franz Wetzig* zu Leipzig.)

I. Ueber das Minimum der Quadratsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten.

§. 1.

Wir schicken zunächst, des Folgenden wegen, einige Bemerkungen über den Punkt voraus, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von gegebenen Punkten ein Minimum ist, und welcher bekanntlich der Schwerpunkt der letzteren ist *).

Sind k Punkte A gegeben, sind O und O' zwei beliebige Punkte, und bezeichnet man die Abstände OO' mit t, OA mit r und $O'A$ mit r' und den Winkel zwischen zwei Geraden a und b einfach durch ab, so besteht die Gleichung

$$r'^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos rt.$$

Bildet man diesen Ausdruck für jeden der Punkte A und summirt, was durch das Zeichen Σ ausgedrückt werde, so erhält man

$$\Sigma r'^2 = \Sigma r^2 + kt^2 - 2t\Sigma r\cos rt.$$

Wählt man den Punkt O so, dass in Bezug auf jede durch ihn gelegte Gerade die Summe $\Sigma r\cos rt$ verschwindet, dass daher die Abstände r, der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt, ein geschlossenes Vieleck bilden, so wird

$$\Sigma r'^2 = \Sigma r^2 + kt^2.$$

Hieraus folgert man:

In Bezug auf den der Bedingung $\Sigma r\cos rt = 0$ genügenden Punkt O ist Σr^2 ein Minimum.

Dieser Punkt ist der Schwerpunkt der gleichschweren Punkte A; denn nimmt man statt t drei auf einander senkrechte Axen und nennt x, y, z die ihnen parallelen Coordinaten von A, so folgt $\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0$.

*) s. *Carnot*, Geometrie der Stellung Art. 275; *L'huilier*, de maximis et minimis §. 68—78.

Der Ort der Punkte O', für welche die Quadratsumme der Abstände, $\Sigma r'^2$, constant ist, ist eine Kugelfläche (in der Ebene ein Kreis) mit dem Mittelpunkt O, und die Zunahme jener Summe ist proportional dem Quadrate des Halbmessers.

Die rechtwinklige Projection des Punktes O auf eine gegebene Gerade oder Ebene ist derjenige Punkt dieser Geraden oder Ebene, für welchen die Quadratsumme der Abstände von den gegebenen Punkten ein Minimum ist: denn jeder andere Punkt dieser Ebene (Geraden) gehört einer Kugel (Kreislinie) constanter Quadratsumme von grösserem Halbmesser an. Diese Projection ist zugleich Mittelpunkt der Kreise der Ebene, oder je zweier Punkte der Geraden, für welche die Quadratsumme constant ist.

II. Ueber das Minimum der Quadratsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Geraden in der Ebene oder Ebenen im Raume.

§. 2.

1. Sind k Gerade in der Ebene oder k Ebenen im Raume gegeben, und bezeichnet man den senkrechten Abstand eines Punktes O von einer derselben mit r, den eines anderen Punktes O', in der Entfernung $OO'=t$, mit r', so hat man, wenn O und O' auf derselben Seite der Geraden oder Ebene liegen,

$$r' = r - t\cos rt,$$

wenn auf entgegengesetzter,

$$r' = t\cos rt - r.$$

Man kann daher die erste Gleichung zu Grunde legen mit Beachtung der Regel, dass r' das Zeichen wechselt, wenn es auf die entgegengesetzte Seite der Geraden oder Ebene übergeht. Durch Quadrirung folgt

$$r'^2 = r^2 - 2rt\cos rt + t^2\cos^2 rt.$$

Bildet man die Summe dieser Quadrate für alle Geraden oder Ebenen, so erhält man

$$\Sigma r'^2 = \Sigma r^2 - 2t\Sigma r\cos rt + t^2\Sigma\cos^2 rt.$$

Wenn daher der Punkt O ein solcher ist, dass in Bezug auf jede durch ihn gelegte Gerade die Bedingung

$$\Sigma r\cos rt = 0$$

erfüllt wird, dass also die Abstände r, der Grösse und Richtung nach an-

einander gesetzt, ein geschlossenes Vieleck bilden, so ist

$$\Sigma r'^2 = \Sigma r^2 + t^2 \Sigma \cos^2 rt.$$

Da aber $t^2 \Sigma \cos^2 rt$ stets positiv ist, so ist Σr^2 ein Minimum, also der Punkt O, für den, bei jeder Lage von t, $\Sigma r \cos rt = 0$ ist, der Minimumpunkt.

Hieraus folgt, dass O zugleich der Schwerpunkt der Fusspunkte der Abstände r ist; denn die Bedingungsgleichung $\Sigma r \cos rt = 0$ ist dieselbe, wie die im vorigen Paragraphen entwickelte für den Schwerpunkt.

2. Für denselben Punkt O ist bei Geraden in der Ebene auch die Quadratsumme der nicht rechtwinklig, sondern unter einem beliebigen Winkel u genommenen Abstände ϱ ein Minimum, und O ist der Schwerpunkt ihrer Endpunkte auf den Geraden. Denn mit Σr^2 ist auch $\Sigma \varrho^2 = \frac{\Sigma r^2}{\cos^2 u}$ ein Minimum; und bildet die durch O gelegte Gerade τ mit t ebenfalls den Winkel u, so ist mit $\Sigma r \cos rt = 0$ die Gleichung $\Sigma \varrho \cos \varrho\tau = 0$ identisch. Dreht man also das System der gegebenen Geraden in seiner Ebene um den Punkt O, so wird es von dem festen Strahlenbüschel der r beständig in Punkten geschnitten, deren Schwerpunkt O ist.

3. Bei gegebenen Geraden ist das Vieleck, welches die r, der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt, bilden, mit dem gegebenen gleichwinklig, bei drei Geraden ihm daher ähnlich, woraus folgt, dass im Dreieck die Abstände des Punktes O den zugehörigen Seiten proportional sind. Bei vier Geraden erfordert die Aehnlichkeit eine Bedingungsgleichung (s. §. 8). Giebt es überhaupt in einem Vieleck einen Punkt, dessen Abstände den zugehörigen Seiten proportional sind, so ist er Minimumpunkt. In jedem regelmässigen Vieleck ist er daher der Mittelpunkt.

§. 3.

1. Ist O der Punkt einer der gegebenen Geraden oder Ebenen, für welchen die Quadratsumme der Abstände von den übrigen Geraden oder Ebenen ein Minimum ist, so muss in Bezug auf jene Gerade t oder in Bezug auf jede Gerade t jener Ebene die Bedingung $\Sigma r \cos rt = 0$ erfüllt werden; setzt man also die r der Grösse und Richtung nach an einander, so müssen Anfangs- und Endpunkt in einer Normalen zur Geraden oder Ebene liegen.

2. Die Punkte paralleler Geraden, für welche die Quadratsumme der Abstände von Geraden in der Ebene ein Minimum, also $\Sigma r \cos rt = 0$ ist.

liegen auf einer gewissen Geraden. Denn ist O der Minimumpunkt der Geraden t in Bezug auf die übrigen Geraden, also $\Sigma r\cos rt=0$, und hat auf einer beliebigen Parallelen t' zu t, im senkrechten Abstande y, ein Punkt O' die rechtwinkligen Coordinaten x und y, deren Anfangspunkt O ist, so ist, wenn $rt=\alpha$ gesetzt wird,

$$r = r'+y\sin\alpha+x\cos\alpha,$$

$$\Sigma r\cos\alpha = \Sigma r'\cos\alpha+y\Sigma\sin\alpha\cos\alpha+x\Sigma\cos^2\alpha.$$

Da aber $\Sigma r\cos\alpha=0$ ist, so liefert die Bedingung, dass O' Minimumpunkt auf t', also $\Sigma r'\cos\alpha=\Sigma r'\cos r't'=0$ sein soll, die Gleichung einer Geraden, nämlich

$$x\Sigma\cos^2\alpha+y\Sigma\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

3. Die Punkte paralleler Ebenen, für welche die Quadratsumme der Abstände von gegebenen Ebenen ein Minimum ist, liegen gleichfalls auf einer gewissen Geraden. Denn legt man durch den Minimumpunkt O einer Ebene drei rechtwinklige Axen OX, OY, OZ, von denen OX und OY in dieser Ebene liegen, und bildet r mit ihnen die Winkel α, β, γ, so ist $\Sigma r\cos\alpha=\Sigma r\cos\beta=0$. Hat in einer parallelen Ebene im Abstande z ein Punkt O' die Coordinaten x, y, z, so ist

$$r = r'+x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos\alpha$, ein zweites Mal mit $\cos\beta$, summirt und berücksichtigt in den beiden erhaltenen Summengleichungen die Bedingungen, dass O' Minimumpunkt seiner Ebene sein soll, nämlich $\Sigma r'\cos\alpha=\Sigma r'\cos\beta=0$, so folgt

$$0 = x\Sigma\cos^2\alpha+y\Sigma\cos\alpha\cos\beta+z\Sigma\cos\alpha\cos\gamma,$$

$$0 = x\Sigma\cos\alpha\cos\beta+y\Sigma\cos^2\beta+z\Sigma\cos\beta\cos\gamma,$$

wodurch eine Gerade bestimmt wird.

§. 4.

Mit Hülfe der Sätze des vorigen Paragraphen lässt sich der Punkt O für beliebig viele Gerade in der Ebene construiren.

1. Sind drei Gerade a_1, a_2, a_3 gegeben, welche auf einander die Abschnitte $A_2A_3=a_1$, $A_3A_1=a_2$, $A_1A_2=a_3$ bilden, und ist O_1 der Punkt der Geraden a_1, für den die Quadratsumme $r_2^2+r_3^2$ der Abstände von a_2 und a_3 ein Minimum ist, so ist $r_3\cos r_3a_1+r_2\cos r_2a_1=0$, oder $r_3\sin A_2=r_2\sin A_3$,

folglich

$$r_2 : r_3 = \sin A_2 : \sin A_3 = a_2 : a_3,$$

$$O_1A_3 : O_1A_2 = \frac{r_2}{\sin A_3} : \frac{r_3}{\sin A_2} = a_2^2 : a_3^2.$$

Es verhalten sich also die Abstände des Punktes O_1 wie die zugehörigen Dreiecksseiten und die Abschnitte, die O_1 auf a_1 bildet, wie deren Quadrate. Man kann daher O_1 construiren, indem man innerhalb des Winkels A_1 zwei Parallelen zu a_2 und a_3 in den senkrechten Abständen a_2 und a_3 zieht; die Verbindungslinie ihres Durchschnittes mit A_1 giebt die Gerade A_1O_1.

Sind nun r_1, r_2, r_3 die Abstände irgend eines Punktes von a_1, a_2, a_3, ferner α_1, α_2, α_3 die Winkel, welche r_1, r_2, r_3 mit einer gewissen Geraden bilden, so gilt, wenn als solche a_1 oder eine zu a_1 Parallele genommen wird, für jeden Punkt der Geraden A_1O_1 die Gleichung

$$r_2\cos\alpha_2 + r_3\cos\alpha_3 = 0,$$

oder auch, wegen $\alpha_1 = 90°$,

$$r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + r_3\cos\alpha_3 = 0.$$

Bestimmt man ebenso den Minimumpunkt O_2 der Geraden a_2, so dass also $r_1 : r_3 = a_1 : a_3$ oder $O_2A_3 : O_2A_1 = a_1^2 : a_3^2$ ist, so gilt in Bezug auf a_2 für jeden Punkt der Geraden A_2O_2 die Gleichung

$$r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + r_3\cos\alpha_3 = 0.$$

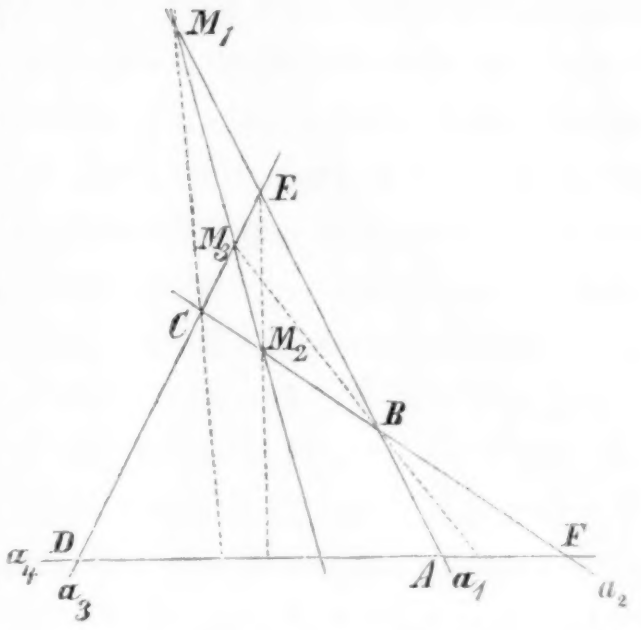
Für den Durchschnittspunkt von A_1O_1 mit A_2O_2 gilt daher diese Gleichung in Bezug auf zwei Gerade, mithin in Bezug auf jede beliebige der Ebene; er ist also der gesuchte Minimumpunkt O.

Da Gleiches von A_3O_3 gilt, so bestimmt sich der Minimumpunkt O eines Dreiecks als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dreier Geraden, jede von einer Ecke des Dreiecks nach dem Minimumpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Linien A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3, die den Schwerlinien analog sind, wollen wir Minimumaxen nennen.

2. Sind vier Gerade gegeben, welche sich in den Punkten A, B, C, D, E, F schneiden, wo r_1 auf AB, r_2 auf BC, r_3 auf CD, r_4 auf DA senkrecht steht, so ist der Punkt O so zu bestimmen, dass in Bezug auf wenigstens zwei Gerade der Ebene die Bedingung

$$r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 + r_3\cos\alpha_3 + r_4\cos\alpha_4 = 0$$

erfüllt ist.



Wir suchen dieselbe zuerst in Bezug auf eine der Geraden, etwa a_4, zu erfüllen. Zu dem Zwecke construire man die durch B, C, E gehenden Minimumaxen der über a_4 stehenden Dreiecke ABF, DCF, AED und nenne sie Axen erster Ordnung. Die erste, die Axe der Geraden a_1 und a_2, schneide a_3 in M_3; die zweite, die Axe von a_2 und a_3, schneide a_1 in M_1; die dritte, die Axe von a_3 und a_1, schneide a_2 in M_2. Alsdann ist, stets in Bezug auf a_4, für jeden Punkt der ersten Axe $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2=0$, daher für M_3, da $r_3=0$ ist, $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$. Für jeden Punkt der zweiten Axe ist $r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$, daher für M_1 ebenfalls $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$; und Gleiches gilt von M_2. Mithin liegen nach §. 3, (2.) die Punkte M_1, M_2, M_3 auf einer Geraden von der Eigenschaft, dass für jeden ihrer Punkte $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$, aber auch, wegen $\alpha_4=90^0$, $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3+r_4\cos\alpha_4=0$ ist. Folglich ist die Gerade $M_1M_2M_3$ die zu a_4 gehörige Minimumaxe des Vierseits; sie enthält den Punkt O und schneidet a_4 in dem Punkte O_4 dieser Geraden, für welchen die Quadratsumme der Abstände von den drei übrigen Geraden ein Minimum ist.

Indem man auf gleiche Weise die drei übrigen Minimumaxen construirt, bestimmt sich O als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von vier Axen, deren jede die zugehörige Gerade im Minimumpunkt derselben schneidet. Wir nennen sie Axen zweiter Ordnung.

Bezeichnet man mit $(2,3)_1$ die Axe erster Ordnung von a_2, a_3 in Bezug auf a_1, also die Gerade, für welche $r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$ ist, ebenso mit $(2,3,4)_1$ die Gerade, für welche, in Bezug auf a_1, $r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3+r_4\cos\alpha_4=0$ ist, ferner mit $(2,3)_1^{\cdot}4$ den Durchschnittspunkt der Axe $(2,3)_1$ mit der Geraden a_4, endlich mit $(1,2,3,4)$ den Punkt O, so kann man dessen Construction durch folgendes Schema darstellen:

$$\underbrace{\underbrace{(2,3)_1^{\cdot}4\ (3,4)_1^{\cdot}2\ (4,2)_1^{\cdot}3}_{(2,3,4)_1}\ \underbrace{(3,4)_2^{\cdot}1\ (4,1)_2^{\cdot}3\ (1,3)_2^{\cdot}4}_{(3,4,1)_2}\ \underbrace{(4,1)_3^{\cdot}2\ (1,2)_3^{\cdot}4\ (2,4)_3^{\cdot}1}_{(4,1,2)_3}\ \underbrace{(1,2)_4^{\cdot}3\ (2,3)_4^{\cdot}1\ (3,1)_4^{\cdot}2}_{(1,2,3)_4}}_{(1,2,3,4)}$$

Die ganze Construction umfasst also $\frac{4.3}{1.2}=12$ Axen erster Ordnung, näm-

lich jede Combination (1, 2) mit zwei Indices, 3 und 4; jede derselben giebt einen Durchschnittspunkt, nämlich $(1, 2)_3$ mit a_4, wodurch man also zwölf Durchschnittspunkte erhält. Axen zweiter Ordnung $(1, 2, 3)_4$ giebt es vier, nämlich jede Combination (1, 2, 3) mit einem Index; jede ist durch drei der zwölf Durchschnittspunkte bestimmt. Je drei Axen erster Ordnung schneiden sich in einem Punkte, wie $(1, 2)_3$, $(2, 3)_1$, $(3, 1)_2$, und geben daher vier Durchschnittspunkte, durch deren jeden auch eine Axe zweiter Ordnung geht, nämlich $(1, 2, 3)_4$ durch (1, 2, 3). Nimmt man also noch die sechs Punkte A, B, C, ... hinzu, in deren jedem sich zwei gegebene Gerade (Axen 0ter Ordnung) mit zwei Axen erster Ordnung schneiden, so hat man ein System von zwanzig Geraden mit eilf Punkten, in deren jedem sich je vier Gerade schneiden.

3. Sind fünf Gerade gegeben, so bestimmt sich der Minimumpunkt O als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von fünf Axen dritter Ordnung, nämlich der Axen $(2,3,4,5)_1$, $(3,4,5,1)_2$, $(4,5,1,2)_3$, $(5,1,2,3)_4$, $(1,2,3,4)_5$. Jede derselben ist durch vier Punkte bestimmt, und ihre Construction, z. B. die der ersten, ist durch folgendes Schema gegeben:

$$\underbrace{\underbrace{(2,3)_1^{\cdot}4\ (3,4)_1^{\cdot}2\ (4,2)_1^{\cdot}3}_{(2,3,4)_1^{\cdot}5}\ \underbrace{(3,4)_1^{\cdot}5\ (4,5)_1^{\cdot}3\ (5,3)_1^{\cdot}4}_{(3,4,5)_1^{\cdot}2}\ \underbrace{(4,5)_1^{\cdot}2\ (5,2)_1^{\cdot}4\ (2,4)_1^{\cdot}5}_{(4,5,2)_1^{\cdot}3}\ \underbrace{(5,2)_1^{\cdot}3\ (2,3)_1^{\cdot}5\ (3,5)_1^{\cdot}2}_{(5,2,3)_1^{\cdot}4}}_{(2,3,4,5)_1}$$

Indem man auf gleiche Weise die vier übrigen Axen dritter Ordnung construirt, ergiebt sich Folgendes:

Man erhält $\frac{5(5-1)(5-2)}{1.2} = 30$ Axen erster Ordnung, nämlich jede Combination (1, 2) mit $5-2=3$ Indices. Jede liefert $5-3=2$ Durchschnittspunkte, nämlich $(1, 2)_3$ mit a_4 und a_5, so dass sich $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1.2} = 60$ Durchschnittspunkte ergeben. Axen zweiter Ordnung giebt es $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1.2.3} = 20$, nämlich jede Combination (1, 2, 3) mit zwei Indices, jede Axe durch drei der sechzig Punkte bestimmt. Jede liefert einen Durchschnittspunkt, nämlich $(1, 2, 3)_4$ mit a_5, so dass solcher Durchschnittspunkte zwanzig entstehen. Axen dritter Ordnung giebt es $\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1.2.3.4} = 5$, nämlich jede Combination (1, 2, 3, 4) mit einem Index, jede durch vier der zwanzig Punkte bestimmt. Je drei Axen erster Ordnung schneiden sich in einem Punkte, nämlich $(1, 2)_3$, $(2, 3)_1$, $(3, 1)_2$, und solcher Punkte giebt es zehn. Durch

jeden derselben gehen noch zwei Axen zweiter Ordnung, nämlich $(1, 2, 3)_4$ und $(1, 2, 3)_5$. Ferner schneiden sich je vier Axen zweiter Ordnung in einem Punkte, nämlich $(1, 2, 3)_4$, $(2, 3, 4)_1$, $(3, 4, 1)_2$, $(4, 1, 2)_3$, und solcher Punkte giebt es fünf. Durch jeden derselben geht auch eine Axe dritter Ordnung, nämlich $(1, 2, 3, 4)_5$. Nimmt man dazu O und die gegebenen fünf Geraden mit ihren zehn Durchschnittspunkten, in deren jedem sich noch drei Axen erster Ordnung treffen, so hat man ein System von sechzig Geraden mit sechsundzwanzig Punkten, in deren jedem sich fünf der Geraden schneiden.

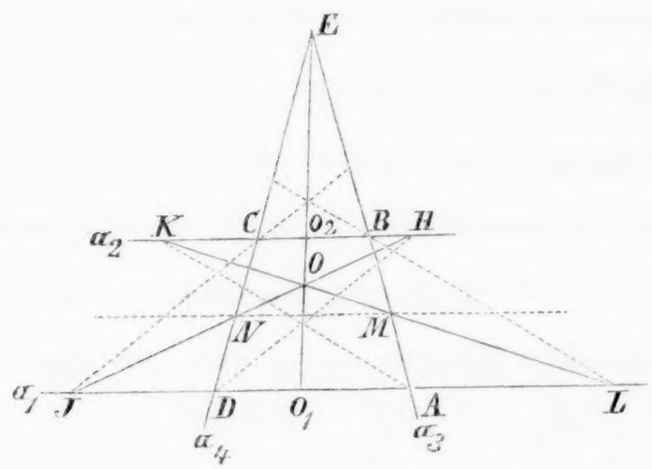
4. Sind allgemein k Gerade in der Ebene gegeben, so bestimmt sich ihr Minimumpunkt als der gemeinschaftliche Durchschnitt von k Axen $k-2^{\text{ter}}$ Ordnung, deren jede die zugehörige Gerade in dem Minimumpunkt der letzteren schneidet; z. B. $(2, 3, 4, \ldots k)_1$ schneidet a_1 in O_1, $(1, 3, 4, \ldots k)_2$ schneidet a_2 in O_2 u. s. w. Die ganze Construction umfasst $\frac{k(k-1)(k-2)}{2}$ Axen erster Ordnung, deren jede sich mit $k-3$ Geraden schneidet, wie $(1, 2)_3$ mit $4, 5, \ldots k$, wodurch $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2}$ Durchschnittspunkte entstehen. Je drei dieser Punkte bestimmen eine Axe zweiter Ordnung, deren Anzahl $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3}$ beträgt. Jede dieser Axen schneidet $k-4$ Gerade, wie $(1, 2, 3)_4$ die Geraden $5, 6, \ldots k$, wodurch $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3}$ Durchschnittspunkte entstehen, von denen je vier eine Axe dritter Ordnung bestimmen, so dass die Anzahl der letzteren $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3.4}$ beträgt, u. s. w.

Je drei Axen erster Ordnung, wie $(1, 2)_3$, $(2, 3)_1$, $(3, 1)_2$ schneiden sich in einem Punkte, dem Minimumpunkte von a_1, a_2, a_3, und solcher Punkte giebt es $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}$. Durch jeden derselben gehen aber auch $k-3$ Axen zweiter Ordnung, wie durch den oben genannten die Axen $(1, 2, 3)_4$, $(1, 2, 3)_5$, $\ldots$ $(1, 2, 3)_k$. Je vier Axen zweiter Ordnung schneiden sich in einem Punkte, wie $(1, 2, 3)_4$, $(2, 3, 4)_1$, $(3, 4, 1)_2$, $(4, 1, 2)_3$ im Minimumpunkte von a_1, a_2, a_3, a_4, und solcher Punkte giebt es $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}$. Durch jeden derselben gehen $k-4$ Axen dritter Ordnung, wie durch den genannten die Axen $(1, 2, 3, 4)_5$, $(1, 2, 3, 4)_6$, $\ldots$ $(1, 2, 3, 4)_k$; u. s. w. Je $k-1$ Axen $k-3^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden sich in einem Punkte; die Anzahl dieser Punkte ist $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots 2}{1.2\ldots(k-1)} = k$, und durch jeden derselben geht noch eine Axe $k-2^{\text{ter}}$

Ordnung. Endlich die k Axen $k-2^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden sich in einem Punkte, dem Minimumpunkte O der gegebenen k Geraden. Da die Summe der Binomialcoefficienten der k^{ten} Potenz 2^k ist, so erhält man, wenn man die gegebenen k Geraden und ihre $\frac{k(k-1)}{1.2}$ Durchschnittspunkte hinzunimmt, ein System von $k(2^{k-1}-k+1)$ Geraden mit 2^k-k-1 Punkten, in deren jedem sich k Gerade schneiden.

5. Sind zwei der gegebenen Geraden, a_1 und a_2, parallel, so vermindert sich die Anzahl der Axen, und insbesondere fallen die Minimumaxen $k-2^{\text{ter}}$ Ordnung der beiden parallelen Geraden zusammen. Die $k-2$ Axen erster Ordnung $(1,2)_3$, $(1,2)_4$, ... $(1,2)_k$ fallen in eine mit a_1 parallele Gerade in gleichem senkrechten Abstande von a_1 und a_2 zusammen, und je zwei Axen erster Ordnung mit einer der gegebenen Geraden, indem $(1,m)_2=(2,m)_1=a_m$ ist. Allgemein ist dann $(1,3,4,\ldots)_2=(2,3,4,\ldots)_1=(3,4,\ldots)_2=(3,4,\ldots)_1$. Z. B. für das Paralleltrapez $ABCD$ hat man $(1,2)_3=(1,2)_4=MN$, wo M und N die Mitten von AB und CD sind. Ferner ist

$$(3,4,1)_2=(2,3,4)_1=(3,4)_1=(3,4)_2=EO_2O_1.$$



Die übrigen nach dem oben aufgestellten Schema zu bestimmenden Punkte sind:

$(4,1)_3^{\cdot}2=H$, $(1,2)_3^{\cdot}4=N$, $(2,4)_3^{\cdot}1=J$, so dass $(4,1,2)_3=HNJ$;

$(1,2)_4^{\cdot}3=M$, $(2,3)_4^{\cdot}1=L$, $(3,1)_4^{\cdot}2=K$, so dass $(1,2,3)_4=KML$.

§. 5.

Auf ganz analoge Weise ist die Construction des Punktes O bei gegebenen Ebenen im Raume auszuführen.

1. Sind vier Ebenen, f_1, f_2, f_3, f_4 gegeben, welche eine dreiseitige Pyramide $A_1A_2A_3A_4$ bilden, deren Seitenflächen zugleich mit f_1, f_2, f_3, f_4 bezeichnet werden sollen, so dass f_1 dem Punkte A_1 etc. gegenüberliegt, so muss in Bezug auf jede durch O gelegte Gerade, mithin wenigstens in Bezug auf drei derselben die Bedingung

$$r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3+r_4\cos\alpha_4=0$$

erfüllt sein.

Um zunächst den Minimumpunkt O_4 der Ebene f_4 d. h. den Punkt zu finden, welcher in Bezug auf jede Gerade der Ebene f_4 der Bedingung $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$ genügt, bestimme man den Punkt M_2 auf A_1A_3, für welchen, in Bezug auf A_1A_3, $r_1\cos\alpha_1+r_3\cos\alpha_3=0$, oder $r_1\cos\alpha_1=r_3\cos(180^0-\alpha_3)$ ist. Dies ist leicht durch die Bemerkung, dass die Pyramiden $M_2A_4A_2A_1$ und und $M_2A_4A_2A_3$ die gemeinschaftliche Grundfläche $M_2A_4A_2$ haben, ihr Verhältniss also gleich dem ihrer Höhen oder gleich dem der Abschnitte M_2A_1 und M_2A_3 ist. Man hat demnach

$$f_1r_1 : f_3r_3 = M_2A_3 : M_2A_1 = \frac{r_1}{\cos\alpha_1} : \frac{r_3}{\cos(180^0-\alpha_3)} = r_1^2 : r_3^2,$$

folglich

$$r_1 : r_3 = f_1 : f_3,$$
$$M_2A_3 : M_2A_1 = f_1^2 : f_3^2.$$

Es ist also die Pyramidenkante A_1A_3 in zwei Abschnitte zu theilen, die sich wie die Quadrate der anstossenden Pyramidenflächen verhalten, und es sind dann die Abstände des Theilpunktes M_2 von den Seitenflächen denselben proportional.

Nun ist aber für jeden Punkt der Geraden A_2M_2 in Bezug auf A_1A_3

$$r_1\cos\alpha_1+r_3\cos\alpha_3 = 0,$$

daher auch, wegen $\alpha_2=90^0$,

$$r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3 = 0.$$

Theilt man daher in gleicher Weise A_2A_3 in M_1 so, dass $M_1A_3 : M_1A_2 = f_2^2 : f_3^2$, und A_2A_1 in M_3 so, dass $M_3A_2 : M_3A_1 = f_1^2 : f_2^2$, so ergiebt sich O_4 als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Geraden A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, und es gilt für denselben

$$r_1 : r_2 : r_3 = f_1 : f_2 : f_3.$$

Ferner ist O_4 der Scheitel dreier Dreiecke, deren Verhältniss ist

$$A_3O_4A_2 : A_2O_4A_1 : A_1O_4A_3 = f_1^2 : f_3^2 : f_2^2,$$

indem z. B.

$$O_4A_2A_1 : O_4A_2A_3 = M_2A_1 : M_2A_3 = f_3^2 : f_1^2.$$

Da nun aber für A_4, $r_1=r_2=r_3=0$, also $r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3=0$ ist, so ist nach §. 3, 3. für jeden Punkt der Geraden A_4O_4 in Bezug auf jede Gerade der Ebene f_4

$$r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3 = 0,$$

folglich auch, wegen $\alpha_4=90^0$,

$$r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2+r_3\cos\alpha_3+r_4\cos\alpha_4 = 0;$$

daher ist A_4O_4 die zu f_4 gehörige Minimumaxe der Pyramide und wird als Axe erster Ordnung durch $(1, 2, 3)_4$ bezeichnet.

Theilt man in gleicher Weise die übrigen drei Kanten der Pyramide, so erhält man auf f_1, f_2, f_3 die Punkte O_1, O_2, O_3, und O selbst als den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der vier Axen A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3, A_4O_4. Der Minimumpunkt einer dreiseitigen Pyramide bestimmt sich also als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von vier Geraden, jede von einer Ecke nach dem Minimumpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche gehend. Seine Abstände von den Seitenflächen sind diesen proportional, indem z. B. für jeden Punkt von A_4O_4, $r_1 : r_2 : r_3 = f_1 : f_2 : f_3$, für jeden Punkt von A_3O_3, $r_1 : r_2 : r_4 = f_1 : f_2 : f_4$, mithin für den Durchschnittspunkt beider $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4$ ist.

2. Dieses Verfahren zur Construction des Punktes O lässt sich in gleicher Weise auf beliebig viele Ebenen ausdehnen, wie in der Ebene auf beliebig viele Gerade. Der Minimumpunkt von k Ebenen bestimmt sich als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von k Axen, deren jede die zugehörige Ebene im Minimumpunkte derselben schneidet. Es wird, nach dem Vorhergehenden, das folgende Schema für fünf Ebenen ohne Weiteres verständlich sein.

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,2,3)_5^{\cdot}4 & (2,3,4)_1^{\cdot}5 & (3,4,5)_2^{\cdot}1 & (4,5,1)_3^{\cdot}2 & (5,1,2)_4^{\cdot}3 \\
(2,3,4)_5^{\cdot}1 & (3,4,5)_1^{\cdot}2 & (4,5,1)_2^{\cdot}3 & (5,1,2)_3^{\cdot}4 & (1,2,3)_4^{\cdot}5 \\
(3,4,1)_5^{\cdot}2 & (4,5,2)_1^{\cdot}3 & (5,1,3)_2^{\cdot}4 & (1,2,4)_3^{\cdot}5 & (2,3,5)_4^{\cdot}1 \\
\underbrace{(4,1,2)_5^{\cdot}3} & \underbrace{(5,2,3)_1^{\cdot}4} & \underbrace{(1,3,4)_2^{\cdot}5} & \underbrace{(2,4,5)_3^{\cdot}1} & \underbrace{(3,5,1)_4^{\cdot}2} \\
\underbrace{(1,2,3,4)_5} & \underbrace{(2,3,4,5)_1} & \underbrace{(3,4,5,1)_2} & \underbrace{(4,5,1,2)_3} & \underbrace{(5,1,2,3)_4}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}
$$

$$
(1,2,3,4,5)
$$

Jede Axe zweiter Ordnung wird demnach durch vier Punkte bestimmt, die nach §. 3, 3. auf einer Geraden liegen.

Wir übergehen die Betrachtungen, die sich über die Anzahl der Axen und ihrer Durchschnittspunkte anknüpfen lassen.

3. Wenn zwei der Ebenen, f_1 und f_2, parallel sind, so vermindert sich die Anzahl der Axen, und insbesondere fallen die Minimumaxen von f_1 und f_2 mit zwei Axen nächst niederer Ordnung zusammen, indem allgemein $(2, 3, 4, \ldots)_1 = (1, 3, 4, \ldots)_2 = (3, 4, \ldots)_1 = (3, 4, \ldots)_2$ ist. Ist von vier Ebenen $f_1 \parallel f_2$, und schneiden sich f_3 und f_4 in der Geraden A_1A_2, wo A_1 in f_1 und A_2 in f_2 liegt, so ist $(2,3,4)_1 = (3,4,1)_2 = (3,4)_1 = A_1A_2$; ferner ist $(1,2,3)_4$ die Durchschnittsgerade von f_3 mit der zu f_1 und f_2 parallelen Ebene, welche

den Abstand beider halbirt; $(4, 1, 2)_3$ ist die Durchschnittsgerade von f_4 mit derselben Ebene, und O ist die Mitte von A_1A_2.

Wenden wir dies auf eine abgestumpfte dreiseitige Pyramide an mit den parallelen Ebenen $A_4A_5A_3 = f_2$ und $B_4B_5B_3 = f_1$, während $A_4A_5B_5B_4$ mit f_3 u. s. w. bezeichnet wird, so ist $(2, 3, 4, 5)_1 = (3, 4, 5, 1)_2 = (3, 4, 5)_1 = (3, 4, 5)_2 = A_1O_1O_2$. Sei ferner $(2, 4, 5)_3 = A_3O_3$, $(4, 5, 1)_3 = B_3O_3'$, wo $B_3O_3' \parallel A_3O_3$ ist, und $(5, 1, 2)_3 4 = (1, 2, 4)_3 5 = M_3$, d. i. die Mitte von A_3B_3, so hat man $(4, 5, 1, 2)_3$ bestimmt durch die drei Punkte $A_3O_3'f_1$, M_3, $B_3O_3'f_2$. Bei analoger Bezeichnung wird ferner $(5, 1, 2, 3)_4$ durch die Punkte $A_4O_4'f_1$, M_4, $B_4O_4'f_2$, und endlich $(1, 2, 3, 4)_5$ durch die drei Punkte $A_5O_5'f_1$, M_5, $B_5O_5'f_2$ bestimmt.

§. 6.

1. Setzt man in der §. 2, 1. gefundenen Gleichung für die Quadratsumme der senkrechten Abstände $\Sigma r'^2$ aus einem beliebigen Punkte O' die Zunahme $\Sigma r'^2 - \Sigma r^2 = c^2$, so hat man

$$c^2 = t^2 \Sigma \cos^2 rt.$$

Daher wächst diese Zunahme auf einer durch O gelegten Geraden proportional dem Quadrate des Abstandes vom Minimumpunkte.

Um den Ort der Punkte O' constanter Quadratsumme der Abstände zu finden, lege man bei gegebenen Geraden in ihrer Ebene durch O eine beliebige Nulllinie, mit welcher t den Winkel φ, und r den Winkel α bildet. Alsdann ist $rt = \alpha - \varphi$, und man hat daher, wenn c^2 constant sein soll, zwischen t und φ die Relation

$$t^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi \Sigma \cos^2\alpha + \sin^2\varphi \Sigma \sin^2\alpha + 2\sin\varphi\cos\varphi \Sigma \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Die Punkte constanter Quadratsumme der Abstände von gegebenen Geraden liegen daher auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Minimumpunkt ist.

Nimmt man als Nulllinie eine der beiden Axen der Ellipse, so muss für jede derselben $\Sigma \sin 2\alpha = 0$ sein, und das Verschwinden dieser Summe wird durch eine Drehung der bisherigen Nulllinie um einen Winkel u erreicht. der durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} 2u = \frac{\Sigma \sin 2\alpha}{\Sigma \cos 2\alpha}$$

bestimmt ist. Werden daher die Winkel α gegen die Axe $2a$ der Ellipse gerechnet, so ist

$$t^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi \Sigma\cos^2\alpha + \sin^2\varphi \Sigma\sin^2\alpha}.$$

Die Quadrate der Halbaxen a und b haben die Grössen

$$a^2 = \frac{c^2}{\Sigma\cos^2\alpha}, \qquad b^2 = \frac{c^2}{\Sigma\sin^2\alpha},$$

woraus folgt, wenn k die Anzahl der Geraden ist,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{k}{c^2}.$$

Von der Schaar concentrischer und ähnlicher Ellipsen, die daher zu verschiedenen Werthen von c^2 gehören, berührt je eine eine Gerade a_m in dem Minimumpunkte O_m dieser Geraden; denn zu jedem anderen Punkte von a_m gehört eine Ellipse von grösseren Axen und daher ein grösseres c^2. Daraus folgt aber, dass OO_m der zu a_m (d. i. zu dem mit a_m parallelen Durchmesser) conjugirte Durchmesser der Ellipse ist. Mithin ist jede der k Minimumaxen von k gegebenen Geraden der zur zugehörigen Geraden conjugirte Durchmesser der Ellipsen constanter Quadratsumme der Abstände.

Die Ellipsen gehen in Kreise über, wenn $\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\sin^2\alpha$ ist, also in Bezug auf jede Gerade der Ebene $\Sigma\cos^2\alpha$ denselben Werth hat*). Alsdann stehen die Axen $k-2^{\text{ter}}$ Ordnung auf ihren Geraden senkrecht, fallen also mit den Abständen r zusammen.

2. Ist O der Minimumpunkt einer Ebene in Bezug auf andere Ebenen, sind x und y zwei in dieser Ebene durch O gelegte rechtwinklige Axen, und bezeichnet man die Winkel rx, ry, tx mit α, β, φ, so ist

$$\cos rt = \cos\varphi . \cos\alpha + \sin\varphi . \cos\beta,$$

$$t^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi \Sigma\cos^2\alpha + \sin^2\varphi \Sigma\cos^2\beta + 2\sin\varphi\cos\varphi \Sigma\cos\alpha\cos\beta}.$$

Mithin liegen die Punkte einer Ebene, für welche die Quadratsumme der Abstände von gegebenen Ebenen constant ist, auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Minimumpunkt dieser Ebene ist. Nimmt man als Coordinatenaxen die Axen der Ellipse, so muss in Bezug auf dieselben $\Sigma\cos\alpha\cos\beta = 0$ sein, daher

$$t^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi \Sigma\cos^2\alpha + \sin^2\varphi \Sigma\sin^2\alpha}.$$

Jede Durchschnittsgerade der Ebene mit den übrigen Ebenen wird von einer der, verschiedenen Werthen von c^2 entsprechenden, concentrischen und ähnlichen

*) S. §. 14, 1. und 3.

Ellipsen in dem Punkte dieser Geraden berührt, für welchen die Quadratsumme der Abstände von den gegebenen Ebenen ein Minimum ist. Die Ellipsen gehen in Kreise über, wenn $\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\beta$ und daher $\Sigma\cos^2\alpha$ in Bezug auf jede Gerade der Ebene constant ist.

3. Ist O der Minimumpunkt von k Ebenen, und sind α, β, γ die Winkel, die r mit drei beliebig durch O gelegten rechtwinkligen Axen bildet, ξ, η, ζ die Winkel von t mit denselben Axen, so folgt

$$\cos rt = \cos\alpha.\cos\xi + \cos\beta.\cos\eta + \cos\gamma.\cos\zeta.$$

Setzt man diesen Werth in

$$t^2 = \frac{c^2}{\Sigma\cos^2 rt}$$

ein, so erhält man für $\Sigma\cos^2 rt$ den Ausdruck

$$\cos^2\xi\,\Sigma\cos^2\alpha + \cos^2\eta\,\Sigma\cos^2\beta + \cos^2\zeta\,\Sigma\cos^2\gamma + 2\cos\xi\cos\eta\,\Sigma\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\eta\cos\zeta\,\Sigma\cos\beta\cos\gamma + 2\cos\zeta\cos\xi\,\Sigma\cos\gamma\cos\alpha.$$

Hieraus folgt, dass die Punkte constanter Quadratsumme der Abstände auf einem Ellipsoid liegen, dessen Mittelpunkt der Minimumpunkt ist.

Nimmt man die Axen dieses Ellipsoids als Coordinatenaxen an, so muss in Bezug auf dieselben $\Sigma\cos\alpha\cos\beta = \Sigma\cos\beta\cos\gamma = \Sigma\cos\gamma\cos\alpha = 0$ sein, folglich

$$t^2 = \frac{c^2}{\cos^2\xi\,\Sigma\cos^2\alpha + \cos^2\eta\,\Sigma\cos^2\beta + \cos^2\zeta\,\Sigma\cos^2\gamma}.$$

Sind f, g, h die Halbaxen des Ellipsoids, so ist

$$f^2 = \frac{c^2}{\Sigma\cos^2\alpha}, \qquad g^2 = \frac{c^2}{\Sigma\cos^2\beta}, \qquad h^2 = \frac{c^2}{\Sigma\cos^2\gamma},$$

$$\frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{k}{c^2}.$$

Verschiedenen Werthen von c^2 entsprechen concentrische, ähnliche Ellipsoide, welche die gegebenen Ebenen in den oben erwähnten Ellipsen constanter Quadratsumme schneiden; jede Ebene wird von einem der Ellipsoide im Mittelpunkte dieser Ellipsen, der zugleich der Minimumpunkt dieser Ebene in Bezug auf die übrigen Ebenen ist, berührt. Jede Minimumaxe OO_m (§. 5) ist daher der zur zugehörigen Ebene f_m (d. i. zur parallelen Diametralebene) conjugirte Durchmesser der Ellipsoide.

Die Ellipsoide gehen in Kugelflächen über, wenn

$$\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\beta = \Sigma\cos^2\gamma,$$

also $\Sigma\cos^2\alpha$ in Bezug auf jede beliebige Gerade constant ist.

4. Aus der Grundgleichung

$$\Sigma r'^2 - \Sigma r^2 = t^2 \Sigma \cos^2 rt$$

lässt sich noch eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Wegen $r - r' = t \cos rt$ kann man nämlich dafür schreiben

$$\Sigma r'^2 - \Sigma r^2 = \Sigma (r - r')^2,$$

$$\Sigma r^2 = \Sigma r . r'.$$

Es ist also die Summe der Producte der Abstände eines beliebigen Punktes mit den zugehörigen des Minimumpunktes constant, nämlich gleich der Minimalsumme der Quadrate der Abstände. Sind z. B. die gegebenen Geraden einem Kreise oder die Ebenen einer Kugel vom Halbmesser ϱ umschrieben, so folgt

$$\Sigma r^2 = \varrho \Sigma r.$$

Oder gehen die Geraden oder Ebenen mit Ausnahme der ersten durch einen und denselben Punkt im Abstande h von dieser, so folgt

$$\Sigma r^2 = h . r_1,$$

welche Relation z. B. auf jede Pyramide anwendbar ist.

§. 7.

Im Folgenden sollen die Abstände r des Minimumpunktes O von den gegebenen Geraden oder Ebenen durch die Bestimmungsstücke derselben ausgedrückt werden.

In Bezug auf drei Gerade, welche auf einander die ihren Durchschnittspunkten A_1, A_2, A_3 gegenüberliegenden Abschnitte a_1, a_2, a_3 bilden, haben wir §. 4. 1. gesehen, dass die Abstände des Minimumpunktes den zugehörigen Dreiecksseiten proportional sind, also

$$r_1 : r_2 : r_3 = a_1 : a_2 : a_3.$$

Nimmt man zu diesen Proportionen noch die Gleichung

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 2f = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3,$$

worin h_1, h_2, h_3 die Höhen des Dreiecks und f seine Fläche bezeichnet, so folgt

$$r_1 = h_1 \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 2f \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$r_2 = h_2 \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 2f \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$r_3 = h_3 \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 2f \frac{a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

woraus sich als Minimalsumme ergiebt:

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2 = \frac{4f^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Zieht man Gerade von O nach A_1, A_2, A_3, so erhält man drei Dreiecke, die sich wie die Quadrate der Dreiecksseiten verhalten, auf denen sie stehen,

$$A_1OA_2 : A_2OA_3 : A_3OA_1 = a_3^2 : a_1^2 : a_2^2,$$

indem z. B. $A_1OA_2 : A_2OA_3 = a_3r_3 : a_1r_1 = a_3^2 : a_1^2$.

Das Gleichungssystem, durch welches die r bestimmt sind, kann man auch in folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} -a_3r_1 \qquad\quad +a_1r_3 &= 0, \\ -a_3r_2+a_2r_3 &= 0, \\ a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 &= 2f, \end{aligned}$$

so dass der gemeinschaftliche Nenner der r durch die symmetrische Determinante dargestellt wird:

$$\begin{vmatrix} -a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3.R,$$

wo $R = a_1^2+a_2^2+a_3^2$.

Als specieller Fall ist das rechtwinklige Dreieck erwähnenswerth. Sei A_3 ein rechter Winkel, so ist, wegen $O_3A_1 : O_3A_2 = a_2^2 : a_1^2$, A_3O_3 die zur Hypotenuse gehörige Höhe h und folglich $r_3 = \frac{1}{2}h$; so dass O die Mitte dieser Höhe ist. Die Ellipsen constanter Quadratsumme haben die eine Axe a parallel zur Hypotenuse A_1A_2, weil A_3O_3 senkrecht zu A_1A_2 und zu A_1A_2 conjugirt ist. Das Quadrat des Axenverhältnisses ist

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\Sigma\cos^2\alpha}{\Sigma\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2A_2+\sin^2A_1}{1+\cos^2A_2+\cos^2A_1} = \tfrac{1}{2},$$

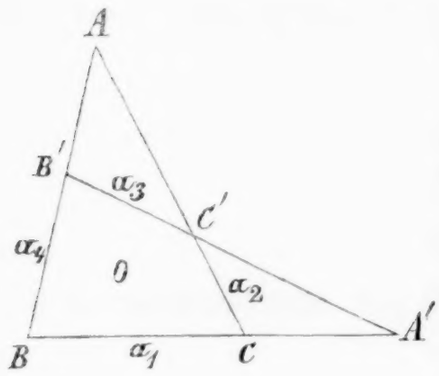
also für alle rechtwinkligen Dreiecke constant. Die Minimalsumme der Quadrate der Abstände ist $r_1^2+r_2^2+r_3^2 = OO_3^2+OA_3^2 = \frac{1}{2}h^2$, also gleich dem halben Quadrate der Höhe. Die Zunahme c^2 der Quadratsumme der Abstände von O bis zu den Punkten der Ellipse mit den Halbaxen a und b wird bestimmt durch

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{3}{c^2},$$

woraus wegen $a^2 = 2b^2$ folgt $c^2 = a^2$; diese Zunahme ist also gleich dem Quadrate der grossen Halbaxe.

§. 8.

1. Wenn vier Gerade gegeben sind, so können die Abstände r im Allgemeinen auf sechs verschiedene Weisen ausgedrückt werden, nämlich jedesmal durch die Seiten und Flächen der beiden Dreiecke, die in jedem der sechs Durchschnittspunkte an einander stossen. Um nicht zu weitläufig zu werden, übergehen wir jetzt die aus diesen verschiedenen Ausdrucksweisen hervorgehenden Identitäten.



Sei in beistehender Figur $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $AB'=c'$, $AC'=b'$, $B'C'=a'$, und seien r_1, r_2, r_3, r_4 der Reihe nach die Abstände des Punktes O von BC, CA, $B'C'$, AB. Da nun die Bedingungsgleichung $\Sigma r\cos\alpha=0$ gleichbedeutend mit $\Sigma r\sin\alpha=0$ ist und nur in Bezug auf zwei Gerade der Ebene erfüllt zu sein braucht, um für alle zu gelten, so wird ihr durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r_3\sin C'+r_4\sin A-r_1\sin C &= 0,\\ r_3\sin B'+r_2\sin A-r_1\sin B &= 0 \end{aligned}$$

Genüge geleistet, die man erhält, indem man einmal r_2 dann r_4 als Nulllinie nimmt. Dividirt man beide Gleichungen mit $\sin A$ und setzt statt der Sinus die ihnen proportionalen Dreiecksseiten, so folgt

$$(1.)\qquad \begin{cases} ac'r_3+aa'r_4-ca'r_1 &= 0,\\ ab'r_3+aa'r_2-ba'r_1 &= 0. \end{cases}$$

Dazu kommen, wenn $\triangle ABC=f$ und $\triangle AB'C'=f'$ gesetzt wird, noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} ar_1+br_2+cr_4 &= 2f,\\ -a'r_3+b'r_2+c'r_4 &= 2f'. \end{aligned}$$

Man hat demnach zur Bestimmung der r folgendes Gleichungssystem aufzulösen:

$$\begin{aligned} aa'r_4 \qquad -ca'r_1+ac'r_3 &= 0,\\ +aa'r_2-ba'r_1+ab'r_3 &= 0,\\ -cr_4-br_2\ -ar_1 \qquad\quad &= -2f,\\ +c'r_4+b'r_2 \qquad -a'r_3 &= 2f'. \end{aligned}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der r wird daher durch folgende symmetrische

Determinante dargestellt:

$$aa'\begin{vmatrix} aa' & 0 & -c & +c' \\ 0 & aa' & -b & +b' \\ -c & -b & -\frac{a}{a'} & 0 \\ c' & b' & 0 & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix} = aa'R,$$

wo sich für R der Werth ergiebt:

$$(2.) \qquad R = a^2a'^2+a^2(b'^2+c'^2)+a'^2(b^2+c^2)+(bc'-b'c)^2.$$

Durch Auflösung des obigen Gleichungssystems erhält man ferner:

$$(3.) \quad \begin{cases} R.r_1 = a\,[2f(a'^2+b'^2+c'^2)-2f'(bb'+cc')], \\ R.r_3 = a'\,[2f(bb'+cc')-2f'(a^2+b^2+c^2)], \\ R.r_2 = 2f[b(a'^2+c'^2)-b'cc']+2f'[b'(a^2+c^2)-bc'c], \\ R.r_4 = 2f[c(a'^2+b'^2)-bb'c']+2f'[c'(a^2+b^2)-b'bc]. \end{cases}$$

Setzt man für $2f$ und $2f'$ die Werthe $2f = bc\sin A$ und $2f' = b'c'\sin A$, so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$(4.) \quad \begin{cases} R.r_1 = a\sin A[\,a'^2\,b\,c+b'^2b(c-c')+c'^2\,c(b-b')], \\ R.r_3 = a'\sin A[-a^2b'c'+b^2b'(c-c')+c^2c'\,(b-b')], \\ R.r_2 = \sin A[\,a^2b'^2c'+a'^2b^2c+cc'(b-b')(bc'-b'c)], \\ R.r_4 = \sin A[a^2\,b'\,c'^2+a'^2bc^2+bb'(c-c')(cb'-c'b)]. \end{cases}$$

2. Wir ziehen zunächst den Fall in nähere Betrachtung, dass die Abstände r den zugehörigen Viereckseiten proportional sind. Dies ist auf zweierlei Weise möglich.

1.) Die r sind den Seiten des Vierecks $BCC'B'$ proportional, also

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = BC : CC' : C'B' : B'B = a : b-b' : a' : c-c'.$$

Es braucht nur eine von diesen Proportionen, etwa $r_1 : r_3 = a : a'$, erfüllt zu sein, so ergeben sich die übrigen aus den Gleichungen (1.) von selbst, wie auch daraus folgt, dass dann das Viereck, dessen Seiten der Reihe nach mit r_1, r_2, r_3, r_4 gleich und gleich gerichtet sind, mit dem gegebenen ähnlich ist (vergl. die Schlussbemerkung §. 2, 3.). Die Bedingung $r_1 : r_3 = a : a'$ liefert aber aus den beiden ersten Gleichungen unter (4.) die Bedingungsgleichung

$$a^2\,b'c'+a'^2\,bc = (b-b')(c-c')(bb'+cc').$$

Nimmt man die allgemeine Relation

$$a^2 b'c' - a'^2 bc = b'c'(b^2+c^2) - bc(b'^2+c'^2)$$

hinzu, welche sich aus $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ und $a'^2 = b'^2+c'^2-2b'c'\cos A$ durch Elimination von $\cos A$ ergiebt, so kann man, indem man diese Gleichungen addirt und subtrahirt, a^2 und a'^2 durch vier Bestandtheile des Vierecks, nämlich b, b', c, c', also die zwischen a_2 und a_4 liegenden Abschnitte der Geraden a_1 und a_3 durch die von ihrem Durchschnittspunkte aus gerechneten Abschnitte der Geraden a_2 und a_4 ausdrücken. Man erhält nämlich

$$2a^2 b'c' = (bb'+cc')(bc+b'c') - 2bc(b'^2+c'^2),$$
$$2a'^2 bc = (bb'+cc')(bc+b'c') - 2b'c'(b^2+c^2).$$

Jede dieser Gleichungen drückt also die Bedingung der verlangten Proportionalität aus. Wären die Abstände r durch die Seiten und Flächen der beiden in A' zusammenstossenden Dreiecke ausgedrückt worden, so hätte man durch völlig analoge, mit den obigen identische Gleichungen die Abschnitte BB' und CC' der Geraden a_2 und a_4 durch die Abschnitte $A'B$, $A'B'$ $A'C$, $A'C'$ der Geraden a_1 und a_3 ausgedrückt erhalten. Bezeichnet f die Fläche des Vierecks $BCC'B'$, und wird die Quadratsumme seiner Seiten, $BC^2+CC'^2+C'B'^2+B'B^2 = R$ gesetzt, so sind die Abstände r bestimmt durch

$$R.r_1 = 2f.BC, \quad R.r_2 = 2f.CC', \quad R.r_3 = 2f.C'B', \quad R.r_4 = 2f.B'B;$$

die Minimalsumme beträgt

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2 = \frac{4f^2}{R}.$$

2.) Die r sind proportional den Seiten des Vierecks $BA'C'A$, also

$$r_1 : r_3 : r_2 : r_4 = BA' : A'C' : C'A : AB.$$

Die dazu nöthige Bedingungsgleichung, die wir der Kürze wegen übergehen, drückt auf ganz analoge Weise entweder die Abschnitte BA' und $C'A$ der Geraden a_1 und a_2 durch die Abschnitte $B'A$, $B'B$, $B'C'$, $B'A'$ der Geraden a_4 und a_3, oder die Abschnitte AB und $A'C'$ der Geraden a_4 und a_3 durch die Abschnitte CA', CB, CC', CA der Geraden a_1 und a_2 aus.

Zu beiden Aehnlichkeitsfällen wird uns das Sehnenviereck einfache Beispiele liefern.

§. 9.

1. Ist $BCC'B'$ ein Sehnenviereck, dessen Perimeter sich nicht selbst schneidet, so lassen sich, um die Abstände r durch seine Fläche $BCC'B' = f$ und seine Seiten $BC = a_1$, $CC' = a_2$, $C'B' = a_3$, $B'B = a_4$ darzustellen, aus

der Aehnlichkeit der Dreiecke $AC'B$ und $AB'C$ Werthe von b, b', c, c', ausgedrückt durch a_1, a_2, a_3, a_4, herleiten, nämlich

$$b' = a_3 \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4}{a_1^2 - a_3^2}, \qquad c' = a_3 \frac{a_2 a_3 + a_4 a_1}{a_1^2 - a_3^2},$$

$$b = a_1 \frac{a_2 a_3 + a_4 a_1}{a_1^2 - a_3^2}, \qquad c = a_1 \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4}{a_1^2 - a_3^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2.) und (4.) des §. 8 ein, so erhält man, mit Weglassung des Factors $\frac{a_1^2 a_3^2}{(a_1^2 - a_3^2)^2}$,

$$R = (a_1^2 - a_3^2)^2 + (a_2^2 - a_4^2)^2 + 2(a_1 a_2 + a_3 a_4)^2 + 2(a_2 a_3 + a_4 a_1)^2.$$

Berücksichtigt man ferner, dass

$$2f = \sin A\,(bc - b'c') = \frac{(a_1 a_2 + a_3 a_4)(a_2 a_3 + a_4 a_1)}{a_1^2 - a_3^2} \sin A,$$

so erhält man r_1, r_2, r_3, r_4 bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} R.r_1 &= 2f[a_1(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2) + 2a_2 a_3 a_4], \\ R.r_2 &= 2f[a_2(a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_1^2) + 2a_3 a_4 a_1], \\ R.r_3 &= 2f[a_3(a_3^2 + a_4^2 - a_1^2 + a_2^2) + 2a_4 a_1 a_2], \\ R.r_4 &= 2f[a_4(a_4^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + 2a_1 a_2 a_3]. \end{aligned}$$

Das Sehnenviereck liefert ein Paar einfache Beispiele zu der im vorigen Paragraphen erwähnten Proportionalität der Abstände r mit den zugehörigen Seiten.

1.) Wenn in einem Sehnenviereck die Producte der gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, so ist der Minimumpunkt der Durchschnitt der Diagonalen, und seine Abstände sind den zugehörigen Seiten proportional. Denn sind p_1, p_2, p_3, p_4 die Abstände des Diagonalendurchschnittes von den Seiten eines beliebigen Sehnenviereckes, so folgt aus der Aehnlichkeit je zweier gegenüberliegender Dreiecke

$$p_2 : p_4 = a_2 : a_4, \qquad p_1 : p_3 = a_1 : a_3,$$

und ferner ist

$$p_1 : p_2 = a_4 : a_3, \qquad p_3 : p_4 = a_2 : a_1,$$

weil diese Verhältnisse die Sinusverhältnisse gleicher Peripheriewinkel sind. Soll aber

$$p_1 : p_2 = a_1 : a_2 \quad \text{und} \quad p_3 : p_4 = a_3 : a_4,$$

folglich

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

sein, so wird die Bedingung $a_1 a_3 = a_2 a_4$ erfordert. Aus dieser Proportion selbst aber folgt, dass der Diagonalendurchschnitt Minimumpunkt ist (s. §. 2, 3.).

Um ein solches Sehnenviereck zu construiren, nehme man im Kreise ABC beliebig, verlängere BC rückwärts um $BE=BC$ und mache $\angle CBD=\angle BAE$, so ist D der gesuchte vierte Punkt, wie sogleich aus den ähnlichen Dreiecken ADC und ABE folgt.

Die Werthe der r lassen sich sehr einfach bestimmen; z. B. aus $a_1r_1+a_2r_2=a_1a_2\sin a_1a_2$ folgt

$$r_1 = a_1\frac{a_1^2a_2\sin a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

2.) In einem Viereck mit zwei gegenüberstehenden rechten Winkeln liegt der Minimumpunkt in der Mitte der Diagonale, welche die rechten Winkel theilt, und seine Entfernungen sind den Seiten des Vierecks mit einspringendem Winkel proportional. Denn sind B' und C die rechten Winkel, O die Mitte von $B'C$, so ist

$$r_1=\tfrac{1}{2}a_4\sin B, \quad r_4=\tfrac{1}{2}a_1\sin B, \quad r_2=\tfrac{1}{2}a_3\sin C', \quad r_3=\tfrac{1}{2}a_2\sin C',$$
$$a_1=BA\cos B, \quad a_4=BA'\cos B, \quad a_2=A'C'\cos C', \quad a_3=AC'\cos C',$$

wobei unter C' der spitze Winkel verstanden wird. Berücksichtigt man, dass $\sin B=\sin C'$ und $\cos B=\cos C'$ ist, so folgt aus diesen Gleichungen

$$r_1:r_2:r_3:r_4 = BA':A'C':C'A:AB.$$

Die r sind also den Seiten des Vierecks $BA'C'A$ proportional und folglich ist O der Minimumpunkt (§. 2, 3.). Die Minimalsumme beträgt in diesem Falle

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=\tfrac{1}{4}\sin^2B(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)=\tfrac{1}{2}\sin^2B.BC'^2.$$

2. Wenn der Perimeter des Sehnenvierecks sich selbst schneidet, so erhält man für die Abstände r ganz analoge, nur durch Vorzeichen verschiedene Formeln. Es mögen also die Punkte A', C, A, B' auf einem Kreise liegen, und werde, damit man die Seiten und zugehörigen r der Reihe nach zählt, $A'C=a_1$, $CA=a_2$, $AB'=a_3$, $B'A'=a_4$ gesetzt. Alsdann ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $CC'A'$ und $B'C'A$, BCA und $BB'A'$ folgende Werthe:

$$b=a_2, \qquad c'=a_3, \qquad a=a_2\frac{a_3a_4-a_1a_2}{a_2^2-a_4^2},$$
$$b'=a_3\frac{a_2a_3-a_4a_1}{a_3^2-a_1^2}, \quad c=a_2\frac{a_2a_3-a_4a_1}{a_2^2-a_4^2}, \quad a'=a_3\frac{a_3a_4-a_1a_2}{a_3^2-a_1^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (4.) des vorigen Paragraphen ein, und berücksichtigt man, dass $2f=\sin A(a_4a_1-a_2a_3)$, wo f die Fläche $A'CAB'$ bezeichnet, so erhält man mit Weglassung des Factors $\frac{a_2^2a_3^2(a_3a_4-a_1a_2)^2}{(a_2^2-a_4^2)^2(a_3^2-a_1^2)^2}$,

$$\begin{aligned}
R &= (a_1^2-a_3^2)^2+(a_2^2-a_4^2)^2+2(a_1a_2-a_3a_4)^2+2(a_2a_3-a_4a_1)^2,\\
Rr_1 &= 2f[a_1(a_1^2+a_2^2-a_3^2+a_4^2)-2a_2a_3a_4],\\
Rr_2 &= 2f[-a_2(a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_1^2)+2a_3a_4a_1],\\
Rr_3 &= 2f[-a_3(a_3^2+a_4^2-a_1^2+a_2^2)+2a_4a_1a_2],\\
Rr_4 &= 2f[a_4(a_4^2+a_1^2-a_2^2+a_3^2)-2a_1a_2a_3].
\end{aligned}$$

Der besondere Fall, dass die Winkel bei B' und bei C rechte sind, also AA' ein Kreisdurchmesser, fällt mit dem vorhin erwähnten eines Vierecks mit zwei gegenüberstehenden rechten Winkeln zusammen; O ist die Mitte von $B'C$. Die Ausdrücke durch die Seiten des Vierecks $A'CAB'$ sind:

$$r_1=\tfrac{1}{2}a_4\sin A,\quad r_2=\tfrac{1}{2}a_3\sin A,\quad r_3=\tfrac{1}{2}a_2\sin A,\quad r_4=\tfrac{1}{2}a_1\sin A,$$

$$r_1:r_2:r_3:r_4 = a_4:a_3:a_2:a_1,$$

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=\tfrac{1}{4}\sin^2A(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)=\tfrac{1}{2}A'A^2\sin^2A.$$

3. Wenn $BCC'B'$ ein Paralleltrapez mit den parallelen Seiten BC und $B'C'$ ist, und die Abstände r durch a, b, c und die Höhen $AH=h$ und $AH'=h'$ ausgedrückt werden sollen, so hat man in die Gleichungen (2.) und (4.) des vorigen Paragraphen $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'}$ einzusetzen und erhält dadurch, mit Weglassung des Factors a'^2,

$$\begin{aligned}
R &= a^2+2(b^2+c^2),\\
Rr_1 &= h(a^2+b^2+c^2)-h'(b^2+c^2),\\
Rr_3 &= h(b^2+c^2)-h'(a^2+b^2+c^2),\\
Rr_2 &= ab(h+h'),\\
Rr_4 &= ac(h+h').
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $r_2:r_4=b:c$; O liegt also auf der durch A gehenden Axe des Dreiecks BAC, wie wir schon (§. 4, 5.) gesehen haben.

Führt man dagegen die Seiten des Paralleltrapezes, $BC=a_1$, $CC'=a_2$, $C'B'=a_3$, $B'B=a_4$ und seine Höhe $h-h'=k=h\frac{a_1-a_3}{a_1}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
R &= 2(a_2^2+a_4^2)+(a_1-a_3)^2,\\
R.r_1 &= k[a_2^2+a_4^2+a_1^2-a_1a_3],\\
R.r_3 &= k[a_2^2+a_4^2+a_3^2-a_1a_3],\\
R.r_2 &= ka_2(a_1+a_3),\\
R.r_4 &= ka_4(a_1+a_3)
\end{aligned}$$

Beim Paralleltrapez kann der erste der im vorigen Paragraphen erwähnten

Aehnlichkeitsfälle eintreten. Wenn nämlich das doppelte Rechteck der parallelen Seiten gleich der Quadratsumme der nicht parallelen ist, so sind die Abstände r den zugehörigen Seiten proportional, und ihre Quadratsumme ist gleich dem Quadrate der Trapezhöhe. Denn die Bedingung

$$a_2^2+a_4^2 = 2a_1a_3$$

ergiebt die Werthe

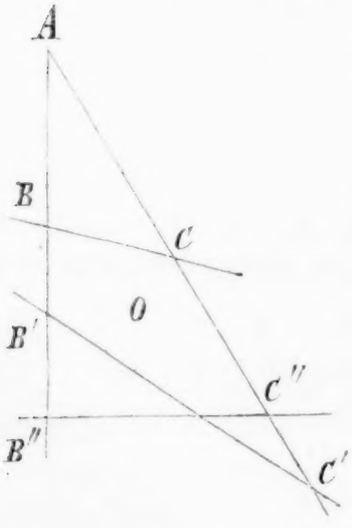
$$r_1 = k\frac{a_1}{a_1+a_3}, \quad r_2 = k\frac{a_2}{a_1+a_3}, \quad r_3 = k\frac{a_3}{a_1+a_3}, \quad r_4 = k\frac{a_4}{a_1+a_3},$$

folglich

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4,$$
$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2 = k^2.$$

§. 10.

Auf dieselbe Weise, wie bei vier Geraden, gelangt man bei beliebig vielen Geraden in der Ebene dazu, die Abstände r des Minimumpunktes durch die Seiten und Flächen der in einem der Durchschnittspunkte der Geraden zusammenstossenden Dreiecke auszudrücken; der gemeinschaftliche Nenner der r ist eine symmetrische Determinante, deren Grad gleich der Anzahl der Geraden ist. Es werde dies noch an fünf Geraden gezeigt.



Auf zwei der gegebenen Geraden, die sich im Punkte A schneiden, werden von den drei übrigen die Abschnitte gebildet: $AB=c$, $AC=b$, $AB'=c'$, $AC'=b'$, $AB''=c''$, $AC''=b''$, während jene auf diesen dreien die Abschnitte $BC=a$, $B'C'=a'$, $B''C''=a''$ bilden. Ferner seien r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 der Reihe nach die Abstände von a, a', a'', b, c.

Indem man in der Gleichung $\Sigma r\sin\alpha = 0$ einmal r_4, dann r_5 als Nulllinie nimmt, erhält man

$$r_1\sin C + r_5\sin A - r_2\sin C' - r_3\sin C'' = 0,$$
$$r_1\sin B + r_4\sin A - r_3\sin B'' - r_2\sin B' = 0.$$

Setzt man nach Division mit $\sin A$ statt der Sinus die ihnen proportionalen Seiten, so folgt

$$r_1a'a''c - r_2aa''c' - r_3aa'c'' + r_5aa'a'' = 0,$$
$$r_1a'a''b - r_2aa''b' - r_3aa'b'' + r_4aa'a'' = 0.$$

Dazu kommen noch drei Gleichungen, welche die Flächen $ABC=f$, $AB'C'=f'$,

$AB''C'' = f''$ ausdrücken, so dass man zur Bestimmung der r folgende Gleichungen hat:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
a r_1 & & & -b\, r_4 & -c\, r_5 & = & -2f, \\
 & a' r_2 & & +b' r_4 & +c' r_5 & = & 2f', \\
 & & a'' r_3 & +b'' r_4 & +c'' r_5 & = & 2f'', \\
-a'a''b r_1 & +aa''b' r_2 & +aa'b'' r_3 & -aa'a'' r_4 & & = & 0, \\
-a'a''c r_1 & +aa''c' r_2 & +aa'c'' r_3 & & -aa'a'' r_5 & = & 0.
\end{array}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der r wird daher durch folgende symmetrische Determinante dargestellt:

$$a^2 a'^2 a''^2 \begin{vmatrix} \frac{a}{a'a''} & 0 & 0 & -b & -c \\ 0 & \frac{a'}{aa''} & 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & \frac{a''}{aa'} & b'' & c'' \\ -b & b' & b'' & -aa'a'' & 0 \\ -c & c' & c'' & 0 & -aa'a'' \end{vmatrix} = aa'a''R,$$

wo R folgenden Werth hat:

$$\begin{aligned} R = {} & a^2 a'^2 a''^2 \\ & + a^2 a'^2 (b''^2 + c''^2) + a'^2 a''^2 (b^2 + c^2) + a''^2 a^2 (b'^2 + c'^2) \\ & + a^2 (b'c'' - b''c')^2 + a'^2 (bc'' - b''c)^2 + a''^2 (bc' - b'c)^2. \end{aligned}$$

§. 11.

In Bezug auf vier Ebenen, welche eine dreiseitige Pyramide $A_1A_2A_3A_4$ mit den den gleichbezeichneten Eckpunkten gegenüberliegenden Seitenflächen f_1, f_2, f_3, f_4 begrenzen, haben wir in §. 5, 1. gesehen, dass ihr Minimumpunkt sich als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von vier Geraden A_1O_1, A_2O_2, ... bestimmt, deren jede eine Ecke mit dem Minimumpunkte der gegenüberliegenden Fläche verbindet; dass ferner O_1, O_2, ... Scheitel von je drei auf den Pyramidenkanten stehenden Dreiecken sind, die sich wie die Quadrate der anliegenden Pyramidenflächen verhalten; endlich, dass die Abstände r den zugehörigen Flächen proportional sind, $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4$. Es ist noch hinzuzufügen, dass O die gemeinschaftliche Spitze von vier Pyramiden ist, deren Volumina sich wie die Quadrate der gegebenen Pyramidenflächen verhalten, auf denen sie stehen, z. B. $OA_1A_2A_3 : OA_2A_3A_4 = f_4 r_4 : f_1 r_1 = f_4^2 : f_1^2$.

Bezeichnet man mit h_1, h_2, h_3, h_4 die Höhen der Pyramide, mit V ihr Volumen, mit R die Quadratsumme ihrer Seitenflächen, $f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2$, so ist

$$3V = f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 + f_4 r_4 = f_1 h_1 = f_2 h_2 = f_3 h_3 = f_4 h_4,$$

folglich, da die r den zugehörigen Seitenflächen proportional sind,

$$R.r_1 = h_1 f_1^2, \quad R.r_2 = h_2 f_2^2, \quad R.r_3 = h_3 f_3^2, \quad R.r_4 = h_4 f_4^2,$$

woraus sich als Minimalsumme der Quadrate der Abstände ergiebt:

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2 = \frac{9V^2}{R}.$$

Wenn drei Ebenen der Pyramide, f_1, f_2, f_3, sich rechtwinklig schneiden, in A_4 also drei rechte Kantenwinkel zusammenstossen, so ist O_4 der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen des Dreiecks $A_1A_2A_3$, die Axe A_4O_4 ist die zur Ebene f_4 gehörige Pyramidenhöhe h_4, der Minimumpunkt O ist deren Mitte, und die Minimalsumme der Quadratabstände ist dem halben Quadrate dieser Höhe gleich. Denn nach §. 5 ist

$$M_2A_1 : M_2A_3 = \overline{A_1A_4A_2}^2 : \overline{A_3A_4A_2}^2 = \overline{A_4A_1}^2 : \overline{A_4A_3}^2,$$

folglich steht A_4M_2 in dem rechtwinkligen Dreieck $A_1A_4A_3$ auf der Hypotenuse A_1A_3 senkrecht. Da ferner A_4A_2 auf der Ebene $A_1A_4A_3$ senkrecht steht, so ist die Ebene $A_4M_2A_2$ zu A_1A_3, also auch A_2M_2 zu A_1A_3 senkrecht. Gleiches gilt von A_3M_3 und A_1M_1 in Bezug auf A_1A_2 und A_2A_3. Wegen $f_4^2 = f_1^2+f_2^2+f_3^2$ folgt $r_4 = \frac{1}{2}h_4^2$, und wegen $r_1^2+r_2^2+r_3^2 = \overline{OA_4}^2 = \frac{1}{4}h_4^2$ ergiebt sich $r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2 = \frac{1}{2}h_4^2$. Noch ist hinzuzufügen, dass von den vier Pyramiden, deren Spitze O ist, die über $A_1A_2A_3$ gleich der Summe der übrigen drei ist, weil sie den Quadraten der Flächen, auf denen sie stehen, proportional sind. Alle diese Beziehungen sind denen beim rechtwinkligen Dreieck (s. §. 7) vollständig analog.

Um die Analogie des Falles von vier Ebenen mit dem einer grösseren Anzahl zu zeigen, werde noch bemerkt, dass man zur Bestimmung der r folgendes Gleichungssystem aufstellen kann:

$$\begin{aligned}
f_4.r_1 \qquad\qquad\quad & -f_1.r_4 = 0,\\
f_4.r_2 \qquad\quad & -f_2.r_4 = 0,\\
f_4.r_3 \quad & -f_3.r_4 = 0,\\
f_1.r_1 + f_2.r_2 + f_3.r_3 + f_4.r_4 &= 3V,
\end{aligned}$$

so dass der gemeinschaftliche Nenner der r durch folgende symmetrische

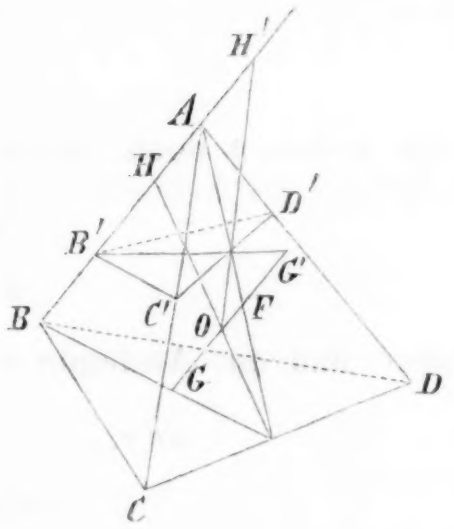
Determinante dargestellt wird:

$$-\begin{vmatrix} f_4 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & f_4 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_4 & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & -f_4 \end{vmatrix} = f_4(f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2).$$

§. 12.

Sind beliebige Ebenen im Raume gegeben, so kann man die Abstände r ihres Minimumpunktes durch die Seitenflächen und Volumina der in einem der Durchschnittspunkte zusammenstossenden dreiseitigen Pyramiden ausdrücken. Wir wollen dies an fünf Ebenen zeigen; dieselben bilden das Analogon zu vier Geraden in der Ebene.

Es mögen in beistehender Figur die Seitenflächen wie folgt bezeichnet werden: $BCD = a$, $B'C'D' = a'$, $ACD = b$, $AC'D' = b'$, $ADB = c$, $AD'B' = c'$, $ABC = d$, $AB'C' = d'$; und zu den Ebenen b, c, d, a, a' mögen der Reihe nach die Abstände r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 gehören. Die Bedingung $\Sigma r\cos\alpha = 0$ muss in Bezug auf wenigstens drei durch O gelegte Gerade erfüllt sein, als solche nehmen wir Parallelen zu AB, AC, AD. In Bezug auf eine Parallele zu AB geht, weil r_2 und r_3 auf AB senkrecht stehen, die Bedingung $\Sigma r\cos\alpha = 0$ über in



$$r_1\cos\alpha_1 + r_4\cos\alpha_4 + r_5\cos\alpha_5 = 0.$$

Man kann nun aber die Verhältnisse $\cos\alpha_4 : \cos\alpha_1$ und $\cos\alpha_5 : \cos\alpha_1$ durch die gegebenen Seitenflächen ausdrücken; denn man hat einerseits

$$OCDA : OCDB = br_1 : ar_4.$$

Schneidet die durch O gelegte Parallele zu AB die Fläche CDB in G, CDA in F, schneidet die Ebene OCD die Linie AB in H, so ist andererseits, weil jene Pyramiden die gemeinschaftliche Grundfläche OCD haben, ihr Verhältniss gleich dem der Höhen von A und B auf OCD, folglich gleich dem der Abschnitte HA und HB, also

$$OCDA : OCDB = HA : HB = OF : OG = -\frac{r_1}{\cos\alpha_1} : \frac{r_4}{\cos\alpha_4}.$$

Aus dieser Gleichung folgt in Verbindung mit der vorhergehenden

$$\frac{\cos\alpha_4}{\cos\alpha_1} = -\frac{b}{a}.$$

Wird ferner $B'C'D'$ von FG in G' und $OC'D'$ von AB in H' geschnitten, so ist

$$OC'D'A : OC'D'B' = b'r_1 : a'r_5 = H'A : H'B' = OF : OG' = \frac{r_1}{\cos\alpha_1} : \frac{r_5}{\cos\alpha_5},$$

folglich

$$\frac{\cos\alpha_5}{\cos\alpha_1} = \frac{b'}{a'}.$$

Setzt man diese Werthe in die Bedingungsgleichung ein, so erhält man

$$r_1 aa' - r_4 a'b + r_5 ab' = 0.$$

Nimmt man ein zweites Mal als Nulllinie eine Parallele zu AC und ein drittes Mal eine solche zu AD, so folgt in gleicher Weise

$$r_2 aa' - r_4 a'c + r_5 ac' = 0,$$
$$r_3 aa' - r_4 a'd + r_5 ad' = 0.$$

Dazu kommen noch, wenn man $ABCD = v$ und $AB'C'D' = v'$ setzt,

$$br_1 + cr_2 + dr_3 + ar_4 = 3v,$$
$$b'r_1 + c'r_2 + d'r_3 - a'r_5 = 3v'.$$

Daher sind die Abstände r durch folgendes Gleichungssystem bestimmt:

$$\begin{array}{rrrrrl}
aa'r_1 & & & -a'br_4 & +ab'r_5 & = 0, \\
 & aa'r_2 & & -a'cr_4 & +ac'r_5 & = 0, \\
 & & aa'r_3 & -a'dr_4 & +ad'r_5 & = 0, \\
-br_1 & -cr_2 & -dr_3 & -ar_4 & & = -3v, \\
b'r_1 & +c'r_2 & +d'r_3 & & -a'r_5 & = 3v'.
\end{array}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der r wird daher durch die symmetrische Determinante dargestellt:

$$aa' \begin{vmatrix} aa' & 0 & 0 & -b & b' \\ 0 & aa' & 0 & -c & c' \\ 0 & 0 & aa' & -d & d' \\ -b & -c & -d & -\frac{a}{a'} & 0 \\ b' & c' & d' & 0 & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix} = a^2 a'^2 R,$$

wo R den Werth hat:

$$R = a^2a'^2+a^2(b'^2+c'^2+d'^2)+a'^2(b^2+c^2+d^2)+(bc'-b'c)^2+(cd'-c'd)^2+(db'-d'b)^2.$$

Die Abstände r sind durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$R.r_1 = 3v[b(a'^2+c'^2+d'^2)-b'(cc'+dd')]+3v'[b'(a^2+c^2+d^2)-b(cc'+dd')],$$
$$R.r_2 = 3v[c(a'^2+b'^2+d'^2)-c'(dd'+bb')]+3v'[c'(a^2+b^2+d^2)-c(dd'+bb')],$$
$$R.r_3 = 3v[d(a'^2+b'^2+c'^2)-d'(bb'+cc')]+3v'[d'(a^2+b^2+c^2)-d(bb'+cc')],$$
$$R.r_4 = a[3v(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)-3v'(bb'+cc'+dd')],$$
$$R.r_5 = a'[3v(bb'+cc'+dd')-3v'(a^2+b^2+c^2+d^2)].$$

Der Vergleich zeigt die Analogie dieser Formeln mit denen für vier Gerade (§. 8).

Sind zwei Ebenen, a und a', parallel, so dass die gegebenen fünf Ebenen eine parallel abgestumpfte dreiseitige Pyramide begrenzen, so hat man $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}$ zu setzen, wodurch man für R, mit Weglassung des Factors a'^2, den Werth

$$R = a^2+2(b^2+c^2+d^2)$$

erhält. Bezeichnen ferner h und h' die zu a und a' gehörigen Höhen, so ist $3v = ah$ und $3v' = a'h'$, und man erhält

$$R.r_1 = ab(h+h'),$$
$$R.r_2 = ac(h+h'),$$
$$R.r_3 = ad(h+h'),$$
$$R.r_4 = h(a^2+b^2+c^2+d^2)-h'(b^2+c^2+d^2),$$
$$R.r_5 = h(b^2+c^2+d^2)-h'(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Diese Formeln sind denen für das Paralleltrapez ganz analog. Da $r_1:r_2:r_3=b:c:d$, so liegt O auf der durch A gehenden Axe von a, b, c, d, wie wir schon (§. 5) gesehen haben.

III. Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten.

§. 13.

1. Wird mit r der Abstand eines der gegebenen Punkte A von einem beliebigen Punkte O, mit r' sein Abstand von einem anderen beliebigen

Punkte O', ferner OO' mit t bezeichnet, so ist

$$r'^2 = r^2 - 2rt\cos rt + t^2 = r^2\left(1 - 2t\frac{\cos rt}{r} + \frac{1}{r^2}t^2\right),$$

woraus durch Potenzirung mit einer beliebigen Zahl $\frac{n}{2}$ und Entwickelung nach dem binomischen Satze folgt:

$$r'^n = r^n\left[1-\left(2t\frac{\cos rt}{r} - \frac{1}{r^2}t^2\right)\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$= r^n\left[1 - nt\frac{\cos rt}{r} + \frac{n}{2}t^2\frac{1+(n-2)\cos^2 rt}{r^2} - \cdots\right].$$

Bildet man diese Gleichung für jeden der Punkte A, so erhält man durch Summation

$$\Sigma r'^n = \Sigma r^n - nt\Sigma r^{n-1}\cos rt + \frac{n}{2}t^2\Sigma r^{n-2}(1+(n-2)\cos^2 rt) - \cdots$$

Wählt man daher den Punkt O so, dass die Gleichung

$$(1.) \qquad \Sigma r^{n-1}\cos rt = 0$$

erfüllt ist, so hängt das Wachsthum von Σr^n nur von dem Vorzeichen des Ausdruckes

$$\frac{n}{2}\Sigma r^{n-2}(1+(n-2)\cos^2 rt)$$

ab, da t stets so klein genommen werden kann, dass das Glied der Entwickelung, welches den Factor t^2 enthält, alle folgenden Glieder überwiegt. Ist also die Summe der Projectionen der $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen der Abstände auf jede Gerade durch O gleich Null, oder, was dasselbe, geben diese $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen, der Grösse und Richtung nach an einander gesetzt, ein geschlossenes Vieleck, so ist, wenn man sich t als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung denkt, das Increment ε von Σr^n eine solche zweiter Ordnung.

Diese Bedingung $\Sigma r^{n-1}\cos rt = 0$, muss in Bezug auf zwei Gerade einer Ebene erfüllt sein, um für jede Gerade der Ebene, und in Bezug auf drei nicht in einer Ebene liegende Gerade, um für jede Gerade im Raume zu gelten. Soll O auf einer vorgeschriebenen Geraden oder Ebene liegen, so muss jene Bedingung in Bezug auf diese Gerade oder in Bezug auf jede Gerade dieser Ebene erfüllt sein; setzt man die Grössen r^{n-1} der Grösse und Richtung nach an einander, so müssen Anfangspunkt und Endpunkt in einer Normalen zur gegebenen Geraden oder Ebene liegen.

Aus Gleichung (1.) lässt sich eine bemerkenswerthe Relation ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 - 2rt\cos rt + t^2, \\ r'^2 . r^{n-2} &= r^n + t^2 . r^{n-2} - 2r^{n-1} t\cos rt, \\ \Sigma r'^2 . r^{n-2} &= \Sigma r^n + t^2 \Sigma r^{n-2}. \end{aligned}$$

Es ist mithin für alle Punkte einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte O die Productensumme $\Sigma r'^2 . r^{n-2}$ constant und ihre Zunahme dem Quadrate des Kugelradius proportional. Für $n = 2$ folgt, wenn k die Anzahl der Punkte bedeutet, die bekannte Gleichung

$$\Sigma r'^2 = \Sigma r^2 + kt^2.$$

2. Das Increment

$$(2.) \qquad \varepsilon = \frac{n}{2} t^2 \Sigma r^{n-2} (1 + (n-2)\cos^2 rt)$$

ist offenbar für jedes $n \geqq 1$ positiv; für den Punkt O ist also die Potenzsumme der Abstände, Σr^n, nach jeder Richtung Minimum, wenn n grösser als die positive Einheit oder ihr gleich ist *).

Dagegen kann für $n < 1$ ε negativ werden, also auch entweder ein relatives Maximum und Minimum oder ein absolutes Maximum eintreten.

Zunächst ist nun zu bemerken, dass ein absolutes Maximum nur für $-1 < n < 0$ möglich ist. Denn bildet man nach Gleichung (2.) die Summe der Incremente ε', ε'', ε''' nach beliebigen drei auf einander senkrechten Richtungen t', t'', t''', so erhält man, weil

$$\cos^2 rt' + \cos^2 rt'' + \cos^2 rt''' = 1,$$

$$\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \frac{n(n+1)}{2} t^2 \Sigma r^{n-2},$$

also eine von der Richtung unabhängige und mit Ausnahme des Falles $-1 < n < 0$ stets positive Grösse. Dagegen muss für $n = -1$, wo diese Summe gleich Null ist, stets relatives Maximum und Minimum stattfinden, wenn nicht ε selbst identisch verschwindet.

Sind x, y, z drei durch O gelegte rechtwinklige Axen, und bezeichnet man die Winkel, die t und r mit ihnen bilden, durch

$$\begin{aligned} tx = \xi, \quad ty = \eta, \quad tz = \zeta, \\ rx = \alpha, \quad ry = \beta, \quad rz = \gamma, \end{aligned}$$

so ist

$$\cos rt = \cos\xi\cos\alpha + \cos\eta\cos\beta + \cos\zeta\cos\gamma.$$

---

*) Die Bedingung $\Sigma\cos rt = 0$ im Falle $n = 1$ haben schon *Tédénat* in *Gergonnes* Annalen Band 1, p. 285 und *L'huilier* ebendaselbst p. 297 auf anderem Wege gefunden, wobei jedoch unentschieden bleibt, ob Minimum oder Maximum stattfindet.

Durch Einsetzung dieses Werthes in Gleichung (2.) ergiebt sich

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned}\varepsilon = \frac{n}{2}t^2\{&\Sigma r^{n-2}+(n-2)[\cos^2\xi\,\Sigma r^{n-2}\cos^2\alpha+\cos^2\eta\,\Sigma r^{n-2}\cos^2\beta+\cos^2\zeta\,\Sigma r^{n-2}\cos^2\gamma\\ &+2\cos\xi\cos\eta\,\Sigma r^{n-2}\cos\alpha\cos\beta+2\cos\eta\cos\zeta\,\Sigma r^{n-2}\cos\beta\cos\gamma\\ &+2\cos\zeta\cos\xi\,\Sigma r^{n-2}\cos\gamma\cos\alpha]\}.\end{aligned}\right.$$

Wählt man die Coordinatenaxen so, dass die drei letzten Glieder der eckigen Klammer verschwinden — was stets möglich ist, wie man aus der Discussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades weiss —, so erhält ε die Form

$$(4.)\qquad \varepsilon = t^2(A\cos^2\xi + B\cos^2\eta + C\cos^2\zeta),$$

wo

$$A = \frac{n}{2}\Sigma r^{n-2}(1+(n-2)\cos^2\alpha),$$

$$B = \frac{n}{2}\Sigma r^{n-2}(1+(n-2)\cos^2\beta),$$

$$C = \frac{n}{2}\Sigma r^{n-2}(1+(n-2)\cos^2\gamma).$$

Es giebt daher in dem Systeme der Punkte drei auf einander senkrechte Axen und nach den Richtungen derselben drei Hauptincremente At^2, Bt^2, Ct^2, aus denen man das Increment nach einer beliebigen Richtung durch Gleichung (4.), also als reciproken Quadratvector einer centralen Fläche zweiten Grades, d. i. als Quadratvector ihrer Fusspunktenfläche aus dem Mittelpunkte findet; oder, was dasselbe, die Punkte constanten Incrementes liegen auf einer centralen Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt O ist.

Ist jeder der Coefficienten A, B, C positiv oder jeder negativ, so liegen die Punkte constanten positiven oder negativen Zuwachses auf einem Ellipsoid. Ist A und B positiv, C negativ, so bestimmt die Gleichung

$$C\cos^2\zeta = A\cos^2\xi + B\cos^2\eta$$

einen elliptischen Kegel als Ort der Punkte, für welche auch die Incremente zweiter Ordnung verschwinden und daher die dritter Ordnung über Maximum oder Minimum entscheiden müssen; derselbe hüllt asymptotisch das einschalige und zweischalige Hyperboloid ein, auf dem die Punkte constanten positiven und negativen Zuwachses liegen. Das Letztere ist umgekehrt, wenn zwei Coefficienten negativ sind und einer positiv.

Liegen die Punkte A in einer Ebene, so liegen O und zwei der Axen, x und y, auch in derselben. Denn in diesem Falle kann durch parallele

Verschiebung der Grössen r^{n-1} ein geschlossenes Vieleck nur erhalten werden, wenn sie in einer Ebene liegen, und die Transformation von (3.) in (4.) wird erreicht, wenn man z normal zur Ebene nimmt und den Axen x und y in der Ebene eine passende Drehung giebt. Aus (2.) folgt, dass die Summe der Incremente nach zwei auf einander senkrechten Richtungen der Ebene einen stets positiven Werth, nämlich

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \frac{n^2}{2} t^2 \Sigma r^{n-2},$$

hat, weshalb absolutes Maximum unmöglich ist, ferner folgt, dass das Increment in normaler Richtung

$$\frac{n}{2} t^2 \Sigma r^{n-2}$$

beträgt, mithin in dieser Richtung Minimum für positive, Maximum für negative n stattfindet. In Gleichung (4.) ist daher

$$C = \frac{n}{2} \Sigma r^{n-2}, \qquad A + B = \frac{n^2}{2} \Sigma r^{n-2}.$$

Haben A und B verschiedenes Vorzeichen, so liegt die Hauptaxe der Hyperboloide in der Ebene, und in dieser sind zwei Hyperbeln und ihre gemeinschaftlichen Asymptoten der Ort constanten und verschwindenden Zuwachses.

Wenn die Punkte A in einer Geraden liegen, so enthält dieselbe O und eine der Axen, x, und es folgt aus Gleichung (2.)

$$\varepsilon = \frac{n}{2} \Sigma r^{n-2} (1 + (n-2) \cos^2 \xi).$$

Daher beträgt der Zuwachs in der Richtung der Geraden

$$\frac{n(n-1)}{2} t^2 \Sigma r^{n-2},$$

so dass in dieser Richtung Maximum nur für $1 > n > 0$, für alle anderen Werthe von n aber Minimum stattfindet. In normaler Richtung beträgt der Zuwachs

$$\frac{n}{2} t^2 \Sigma r^{n-2},$$

stimmt also im Vorzeichen mit n überein. Für $n < 1$ ist der Ort verschwindenden Zuwachses ein Rotationskegel, dessen Axenwinkel ξ durch

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{2-n}}$$

bestimmt ist, und der die beiden Rotationshyperboloide constanten Zuwachses asymptotisch einhüllt.

3. Einer besonderen Betrachtung bedarf der Fall $n = 0$, wo die Gleichung (1.) in

$$\Sigma \frac{\cos rt}{r} = 0$$

übergeht und das Maximum oder Minimum des Productes $r_1 r_2 r_3 \ldots$ der Abstände bedingt. Denn mit Σr^n ist auch $\Sigma \frac{r^n - 1}{n}$, folglich, wenn man zur Grenze $n = 0$ übergeht, auch $\Sigma \log r$, daher der Logarithmus des Productes der r, daher auch dieses Product selbst Minimum oder Maximum. In der That folgt aus

$$\frac{r'^2}{r^2} = 1 - 2t\frac{\cos rt}{r} + \frac{t^2}{r^2},$$

durch Bildung des Productes,

$$\left(\frac{r_1' r_2' r_3' \ldots}{r_1 r_2 r_3 \ldots}\right)^2 = 1 - 2t\Sigma\frac{\cos rt}{r} + t^2\left[\Sigma\frac{1}{r^2} + 4\Sigma\frac{\cos r_1 t \cdot \cos r_2 t}{r_1 r_2}\right] - \ldots.$$

Genügt also O den Bedingungen

$$\Sigma \frac{\cos rt}{r} = 0,$$

$$2\Sigma \frac{\cos r_1 t \cdot \cos r_2 t}{r_1 r_2} = -\Sigma \frac{\cos^2 rt}{r^2},$$

so hat man

$$\left(\frac{r_1' r_2' r_3' \ldots}{r_1 r_2 r_3 \ldots}\right)^2 = 1 + t^2\Sigma\frac{1 - 2\cos^2 rt}{r^2} + \ldots,$$

daher

$$\frac{r_1' r_2' r_3' \ldots}{r_1 r_2 r_3 \ldots} = 1 + \tfrac{1}{2}t^2\Sigma\frac{1 - 2\cos^2 rt}{r^2} + \ldots.$$

Auf den Zuwachs

$$(5.) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2}t^2\Sigma\frac{1 - 2\cos^2 rt}{r^2}$$

lassen sich nun wörtlich die vorhergehenden Betrachtungen anwenden. Die Summe der Incremente nach drei auf einander senkrechten Richtungen ist

$$\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' = \tfrac{1}{2}t^2\Sigma\frac{1}{r^2},$$

also beständig positiv, weshalb kein absolutes Maximum des Productes möglich ist. Bringt man ε auf die Form der Gleichung (4.), also

$$\varepsilon = t^2(A\cos^2\xi + B\cos^2\eta + C\cos^2\zeta),$$

so haben A, B, C die Werthe:

$$A = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{r^2},$$

$$B = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1 - 2\cos^2\beta}{r^2},$$

$$C = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1 - 2\cos^2\gamma}{r^2}.$$

Wenn die Punkte A in einer Ebene liegen, so ist der Zuwachs in normaler Richtung

$$\tfrac{1}{2}t^2\Sigma\frac{1}{r^2},$$

mithin das Product der Abstände in dieser Richtung stets Minimum. Dagegen beträgt die Summe der Incremente nach zwei senkrechten Richtungen der Ebene stets Null. Daher ist

$$C=\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{r^2}, \qquad A+B=0.$$

In der Ebene giebt es zwei gleichseitige Hyperbeln und ihre gemeinschaftlichen Asymptoten als Orte constanten und verschwindenden Zuwachses.

Wenn die Punkte A in einer Geraden liegen, so ist

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}t^2\Sigma\frac{1-2\cos^2\xi}{r^2},$$

$$A=-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{r^2}, \qquad B=C=\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{r^2}.$$

Das Product der Abstände ist also in der Richtung der Geraden Maximum (alle Abstände positiv gerechnet), in jeder Normalen Minimum. Der Zuwachs ε verschwindet auf einem Rotationskegel, dessen Axenwinkel 45^0 beträgt.

§. 14.

1. Um die vorstehenden Betrachtungen an einigen Beispielen zu erläutern, bedarf es eines Hilfssatzes:

Wenn die Summe $\Sigma\cos^2 rt$ in Bezug auf drei Gerade im Raume oder zwei Gerade einer Ebene denselben Werth hat, so ist sie im Allgemeinen auch in Bezug auf jede Gerade im Raume oder in der Ebene constant. Denn bei der Bezeichnung in §. 13, 2. kann man $\Sigma\cos^2 rt$ durch die Gleichung

$$\Sigma\cos^2 rt = \cos^2\xi\Sigma\cos^2\alpha+\cos^2\eta\Sigma\cos^2\beta+\cos^2\zeta\Sigma\cos^2\gamma$$

ausdrücken. Ist nun in Bezug auf drei beliebige durch O gehende Gerade t_1, t_2, t_3

$$c_1 = \cos^2\xi_1\Sigma\cos^2\alpha+\cos^2\eta_1\Sigma\cos^2\beta+\cos^2\zeta_1\Sigma\cos^2\gamma,$$
$$c_2 = \cos^2\xi_2\Sigma\cos^2\alpha+\cos^2\eta_2\Sigma\cos^2\beta+\cos^2\zeta_2\Sigma\cos^2\gamma,$$
$$c_3 = \cos^2\xi_3\Sigma\cos^2\alpha+\cos^2\eta_3\Sigma\cos^2\beta+\cos^2\zeta_3\Sigma\cos^2\gamma,$$

und bezeichnet R die Determinante der Grössen $\cos^2\xi_1$, $\cos^2\xi_2$, ..., so ist

$$R\Sigma\cos^2\alpha = \begin{vmatrix} c_1 & \cos^2\eta_1 & \cos^2\zeta_1 \\ c_2 & \cos^2\eta_2 & \cos^2\zeta_2 \\ c_3 & \cos^2\eta_3 & \cos^2\zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Ist $c_1 = c_2 = c_3 = c$ und subtrahirt man von der ersten Verticalreihe der Determinante die beiden folgenden, so erhält man

$$R\,\Sigma\cos^2\alpha = c\begin{vmatrix}\cos^2\xi_1 & \cos^2\eta_1 & \cos^2\zeta_1\\ \cos^2\xi_2 & \cos^2\eta_2 & \cos^2\zeta_2\\ \cos^2\xi_3 & \cos^2\eta_3 & \cos^2\zeta_3\end{vmatrix} = c.R.$$

Mithin ist

$$\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\beta = \Sigma\cos^2\gamma = \Sigma\cos^2 rt = c = \frac{k}{3},$$

wenn k die Anzahl der Punkte bezeichnet. Liegen die Punkte A und die Linien t in einer Ebene, so ist

$$\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\beta = c = \frac{k}{2}.$$

Wenn aber die Determinante R verschwindet, so bleiben $\Sigma\cos^2\alpha$ u. s. w. unbestimmt. Bezeichnen x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes auf t_1 in der Entfernung der Längeneinheit, so drückt, bei analoger Bedeutung von $x_2, y_2, \ldots$, die Gleichung

$$R = \begin{vmatrix}x_1^2 & y_1^2 & z_1^2\\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2\\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2\end{vmatrix} = 0$$

aus, dass die drei Geraden t_1, t_2, t_3 auf einer Kegelfläche zweiten Grades liegen, d. i. auf dem Orte constanter Summe $\Sigma\cos^2 rt$. In der Ebene entsprechen ihr zwei Gerade.

2. Der Mittelpunkt O jedes regelmässigen Polyeders mit dessen Eckpunkten A genügt der Bedingung $\Sigma r^{n-1}\cos rt = r^{n-1}\Sigma\cos rt = 0$. Denn da die Normalebenen der r das zugeordnete regelmässige Polyeder bilden, so sind die gleichen r den gleichen Flächen dieses Polyeders proportionale Normalen, und es verschwindet daher die Summe ihrer Projectionen auf jede Gerade *). Bedeutet k die Anzahl der Ecken, so ist in §. 13 Gleichung (2.) $\Sigma\cos^2 rt = \frac{k}{3}$ zu setzen, da diese Summe für $t = r_1, r_2, r_3, \ldots$ denselben Werth haben muss, ferner beim Würfel die Normalen der Seitenflächen die drei Hauptrichtungen sind, für welche $\Sigma\cos^2\alpha = \Sigma\cos^2\beta = \Sigma\cos^2\gamma = \frac{8}{3} = \frac{k}{3}$ ist, bei den übrigen Polyedern aber der §. 14, 1. angegebene Ausnahmefall unmöglich ist. Man erhält

$$\varepsilon = \frac{n(n+1)}{6}\,k t^2 r^{n-2}.$$

*) Vergl. *Baltzer* Elemente, Trigon. §. 6, 4.

Für den Fall $n = 0$ ergiebt sich aus §. 13 Gleichung (5.)

$$\varepsilon = \frac{k}{6}\,\frac{t^2}{r^2}.$$

Im Mittelpunkte O ist daher für $-1 < n < 0$ die Potenzsumme der Abstände absolutes Maximum, in allen anderen Fällen Minimum, mit Ausnahme von $n = -1$, wo man erst durch das Increment dritter Ordnung über Maximum und Minimum entscheiden kann; das Product der Abstände ist Minimum.

3. Der Mittelpunkt O jedes regelmässigen ebenen Vielecks mit dessen Eckpunkten A erfüllt die Bedingung $\Sigma r^{n-1}\cos rt = r^{n-1}\Sigma\cos rt = 0$, da die gleichen Abstände r parallel verschoben ein regelmässiges Vieleck von gleicher Seitenzahl geben. Unter der Voraussetzung, dass t in seiner Ebene bleibt, ist in §. 13 Gleichung (2.) $\Sigma\cos^2 rt = \frac{k}{2}$ zu setzen, wodurch sich

$$\varepsilon = \frac{n^2}{4} k t^2 r^{n-2},$$

also eine stets positive Grösse ergiebt, weshalb die Potenzsumme der Abstände in der Ebene stets Minimum ist. Um das Increment für ein beliebiges t zu finden, hat man in §. 13 Gleichung (4.)

$$A = B = \frac{n^2}{4} k r^{n-2},$$

$$C = \frac{kn}{2} r^{n-2}$$

zu setzen.

Für $n = 0$ verschwindet nach §. 13 Gleichung (5.) in der Ebene auch das Increment zweiter Ordnung. Es ist also $A = B = 0$, $C = \frac{k}{2}\,\frac{1}{r^2}$, der Zuwachs im Raume beträgt

$$\varepsilon = \frac{k}{2}\,\frac{t^2}{r^2}\cos^2\zeta.$$

In der Ebene muss daher das Increment dritter Ordnung über Maximum und Minimum entscheiden. Nun erhält man als Coefficient von t^3 in der Entwickelung von $\left(\frac{r_1' r_2' r_3' \cdots}{r_1 r_2 r_3 \cdots}\right)^2$,

$$-2 \cdot \left\{ \Sigma \frac{\cos r_1 t}{r_1}\,\frac{1}{r_2^2} + 4\Sigma \frac{\cos r_1 t . \cos r_2 t . \cos r_3 t}{r_1 r_2 r_3} \right\},$$

wo die Summation über alle Combinationen von je zwei und je drei Indices auszudehnen ist. Da das Increment δ der Wurzel die Hälfte des obigen ist und für $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots$ der erste Theil der Summe verschwindet, so hat man

$$\delta = -4\frac{t^3}{r^3}\Sigma\cos r_1 t . \cos r_2 t . \cos r_3 t.$$

Man erhält z. B. für das gleichseitige Dreieck, wenn $r_1 t = u$ gesetzt wird,

$$\delta = -4\frac{t^3}{r^3}\cos u\cos(120^0+u)\cos(120^0-u)$$
$$= \frac{t^3}{r^3}\cos u(3-4\cos^2 u).$$

Das Product der Abstände, $r_1 r_2 r_3$, des Mittelpunktes von den Ecken ist daher in den Richtungen OA_1, OA_2, OA_3 Maximum, in den ihnen entgegengesetzten Minimum, während in den Richtungen senkrecht zu OA_1, OA_2, OA_3 auch das Increment dritter Ordnung verschwindet, so dass um O sechs Felder liegen, für die der Zuwachs abwechselnd positiv und negativ ist.

4. In einem rechtwinkligen Parallelopipedon genügt der Durchschnittspunkt O der Diagonalen der Bedingung $\Sigma r^{n-1}\cos rt = r^{n-1}\Sigma\cos rt = 0$ in Bezug auf die drei Normalen der Seitenflächen, also in Bezug auf jede Gerade. Die Hauptaxen x, y, z gehen parallel den Seitenkanten a, b, c, und man hat

$$\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2 = \cdots = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$
$$\Sigma\cos^2\alpha = \frac{8a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Berücksichtigt man noch die Gleichung: $a^2+b^2+c^2 = 4r^2$ und die analogen Ausdrücke für $\Sigma\cos^2\beta$ und $\Sigma\cos^2\gamma$, so erhält man

$$A = n.r^{n-4}((n-1)a^2+b^2+c^2),$$
$$B = n.r^{n-4}(a^2+(n-1)b^2+c^2),$$
$$C = n.r^{n-4}(a^2+b^2+(n-1)c^2).$$

Ob Minimum oder Maximum stattfindet, hängt also, ausser von n, auch von dem Grössenverhältnisse der Kanten ab. Für $n = 0$ ist

$$A = \frac{16(-a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

und analoge Ausdrücke gelten für B und C.

5. Im Rechtecke ist O der Durchschnitt seiner Diagonalen, und die Hauptaxen x und y seiner Ebene gehen den Seiten a und b parallel. Man hat daher

$$\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2 = \cdots = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \qquad \cos^2\beta_1 = \cdots = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

zu setzen, wodurch man erhält

$$A = \frac{n}{2}r^{n-4}(b^2+(n-1)a^2),$$
$$B = \frac{n}{2}r^{n-4}(a^2+(n-1)b^2).$$

Für $n = 0$, also für das Product der Abstände, ist

$$A = 8\frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}, \qquad B = 8\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

daher der Zuwachs nach beliebiger Richtung der Ebene

$$\varepsilon = 8\frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}\, t^2\cos^2 2\xi.$$

6. Wenn man die Normale OH einer bei O rechtwinkligen dreiseitigen Pyramide $OA_1A_2A_3$ rückwärts um $OA_4 = OH$ verlängert, so erfüllt O mit den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 die Bedingung $\Sigma\frac{\cos rt}{r} = 0$ in Bezug auf die Geraden OA_1, OA_2, OA_3, daher in Bezug auf jede Gerade. Unter Berücksichtigung von:

$$\frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}$$

erhält man als Incremente des Productes der Abstände nach den Richtungen OA_1, OA_2, OA_3, OA_4,

$$\varepsilon_1 = t^2\Big(-\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\Big),$$

$$\varepsilon_2 = t^2\Big(\ \frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\Big),$$

$$\varepsilon_3 = t^2\Big(\ \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_3^2}\Big),$$

$$\varepsilon_4 = -t^2r_4^2\Big(\frac{1}{r_1^4}+\frac{1}{r_2^4}+\frac{1}{r_3^4}\Big).$$

Analoges gilt für das Product der Abstände, $OA_1.OA_2.OA_3$, in der Ebene, wenn man die Normale OH eines bei O rechtwinkligen Dreieckes A_1OA_2 rückwärts um $OA_3 = OH$ verlängert.

§. 15.

1. Der Fall, dass die Punkte A auf einer Geraden liegen, bedarf einer besonderen Betrachtung, wenn man den Strecken OA_1, OA_2, ... bei entgegengesetzter Richtung entgegengesetztes Vorzeichen zuschreibt; denn bisher wurden alle r als positiv betrachtet, da, ausser in diesem Falle, zu einer Unterscheidung des Vorzeichens kein Grund vorlag. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Productes

$$(1.) \qquad OA_1.OA_2 \ldots OA_k,$$

dessen Minimum- und Maximumpunkte mehrere merkwürdige Eigenschaften besitzen. Dieses Product behält sein Vorzeichen, so lange O in demselben

Intervalle zwischen zwei Nachbarpunkten A bleibt und erhält, durch Null hindurchgehend, das entgegengesetzte, wenn O in das benachbarte Intervall übergeht. Die Bedingung seines Minimums oder Maximums

$$(2.) \qquad \frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OA_2}+\cdots+\frac{1}{OA_k}=0$$

drückt aus, dass in Bezug auf diesen Punkt O der „Mittelpunkt der harmonischen Mittel“ *) im Unendlichen liegt. Da nun die Function

$$X=\frac{1}{OA_1-x}+\frac{1}{OA_2-x}+\cdots+\frac{1}{OA_k-x}$$

$k-1$ reelle Wurzeln hat, nämlich

$$x_1=OO_1, \qquad x_2=OO_2, \qquad \ldots \qquad x_{k-1}=OO_{k-1},$$

wo die Punkte O_1, O_2, ... O_{k-1} in den Intervallen A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{k-1}A_k$ liegen, und da das Product (1.) in den auf einander folgenden Intervallen entgegengesetzte Vorzeichen hat, so hat es in O_1, O_2, ... O_{k-1} abwechselnd Minimum und Maximum.

2. Wenn man in dem Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{O_1A_1}+\frac{1}{O_1A_2}+\cdots+\frac{1}{O_1A_k}=0,\\
&\frac{1}{O_2A_1}+\frac{1}{O_2A_2}+\cdots+\frac{1}{O_2A_k}=0,\\
&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&\frac{1}{O_{k-1}A_1}+\frac{1}{O_{k-1}A_2}+\cdots+\frac{1}{O_{k-1}A_k}=0
\end{aligned}$$

die zweite Gleichung von der ersten abzieht, so erhält man die neue Relation

$$\frac{1}{O_1A_1.O_2A_1}+\frac{1}{O_1A_2.O_2A_2}+\cdots+\frac{1}{O_1A_k.O_2A_k}=0.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung O_2 mit O_3 und zieht die erhaltene von der vorstehenden ab, so ergiebt sich

$$\frac{1}{O_1A_1.O_2A_1.O_3A_1}+\frac{1}{O_1A_2.O_2A_2.O_3A_2}+\cdots+\frac{1}{O_1A_k.O_2A_k.O_3A_k}=0,$$

u. s. w.

3. Der Zähler der Function X ist eine Summe von k Gliedern,

$$\Sigma(OA_2-x)(OA_3-x)\ldots(OA_k-x),$$

---

*) „centre des moyennes harmoniques“ bei *Poncelet*, s. Bd. 3, p. 238 dieses Journals.

wo in jedem Gliede ein Index fehlt. Da seine $k-1$ Wurzeln OO_1, OO_2, ... OO_{k-1} sind, und x^{k-1} den Coefficienten $\pm k$ erhält, so ist bekanntlich

$$\Sigma(OA_2-x)(OA_3-x)\dots(OA_k-x) = k(OO_1-x)(OO_2-x)\dots(OO_{k-1}-x).$$

Hieraus ergeben sich als Coefficientengleichungen die folgenden Relationen zwischen den Abständen der Punkte O_1, O_2, ... und der Punkte A_1, A_2, ... von einem beliebigen Punkte O der Geraden:

$$\begin{aligned}
\Sigma OA_2.OA_3\dots OA_k &= k.OO_1.OO_2\dots OO_{k-1},\\
2\Sigma OA_3.OA_4\dots OA_k &= k\Sigma OO_2.OO_3\dots OO_{k-1},\\
3\Sigma OA_4.OA_5\dots OA_k &= k\Sigma OO_3.OO_4\dots OO_{k-1},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
(k-2)\Sigma OA_{k-1}.OA_k &= k\Sigma OO_{k-2}.OO_{k-1},\\
(k-1)\Sigma OA_k &= k\Sigma OO_{k-1}.
\end{aligned}$$

In diesen Productensummen bedeutet

$$\Sigma a_{m+1}\dots a_k$$

die Summe aller Producte, in denen m Indices fehlen.

Aus den vorstehenden Gleichungen kann man durch bestimmte Wahl des willkürlichen Punktes O eine grosse Anzahl neuer Relationen herleiten.

Setzt man in der ersten derselben statt O einen der Punkte A, etwa A_1, so erhält man:

$$A_1A_2.A_1A_3\dots A_1A_k = k.A_1O_1.A_1O_2\dots A_1O_{k-1}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man:

$$(k-1)(A_1A_2+A_1A_3+\dots+A_1A_k) = k(A_1O_1+A_1O_2+\dots+A_1O_{k-1}).$$

Bildet man den letzteren Ausdruck auch für $O=A_2$, A_3, ... A_k und addirt die erhaltenen k Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{ccccc}
A_1O_1 & + & A_1O_2 & + \dots + & A_1O_{k-1}\\
+A_2O_1 & + & A_2O_2 & + \dots + & A_2O_{k-1}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
+A_kO_1 & + & A_kO_2 & + \dots + & A_kO_{k-1}
\end{array}\right\} = 0,$$

d. h. die Summe der Abstände der sämmtlichen Punkte O von den sämmtlichen Punkten A giebt Null.

In dem einfachsten Falle, dass drei Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben sind, deren Reihenfolge in positiver Richtung liegt, findet in O_1 Minimum, in O_2 Maximum des Productes $OA_1.OA_2.OA_3$ statt. Aus den vorstehenden Glei-

chungen ergeben sich folgende Relationen:

$$\begin{aligned} OA_2.OA_3+OA_3.OA_1+OA_1.OA_2 &= 3OO_1.OO_2, \\ 2(OA_1+OA_2+OA_3) &= 3(OO_1+OO_2), \\ A_1A_2.A_1A_3 &= 3A_1O_1.A_1O_2, \\ A_2A_1.A_2A_3 &= 3A_2O_1.A_2O_2, \\ A_3A_1.A_3A_2 &= 3A_3O_1.A_3O_2, \\ 2(O_1A_1+O_1A_2+O_1A_3) &= 3O_1O_2, \\ O_1A_1+O_1A_2+O_1A_3 &= -(O_2A_1+O_2A_2+O_2A_3). \end{aligned}$$

§. 16.

1. Wenn drei Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben sind, und man mit r_1, r_2, r_3 ihre Abstände von O, mit α_1, α_2, α_3 die Winkel r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2 bezeichnet, so folgt, weil r_1^{n-1}, r_2^{n-1}, r_3^{n-1} an einander gesetzt ein Dreieck bilden, dessen Winkel die Winkel α zu 180^0 ergänzen, die Beziehung

$$r_1^{n-1} : r_2^{n-1} : r_3^{n-1} = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_3 \text{ *)}.$$

Jeder Abstand OA theilt also den von den beiden anderen eingeschlossenen Winkel in zwei Theile, deren Sinus sich umgekehrt verhalten, wie die $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Abstände.

Die Dreiecksfläche $A_1A_2A_3$ wird in drei Dreiecke zerlegt, deren Verhältniss gleich dem der $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der gegenüberliegenden Abstände ist.

$$A_1OA_2 : A_2OA_3 : A_3OA_1 = r_3^{n-2} : r_1^{n-2} : r_2^{n-2};$$

denn es ist z. B. $A_1OA_2 : A_2OA_3 = r_1\sin\alpha_3 : r_3\sin\alpha_1 = r_3^{n-2} : r_1^{n-2}$.

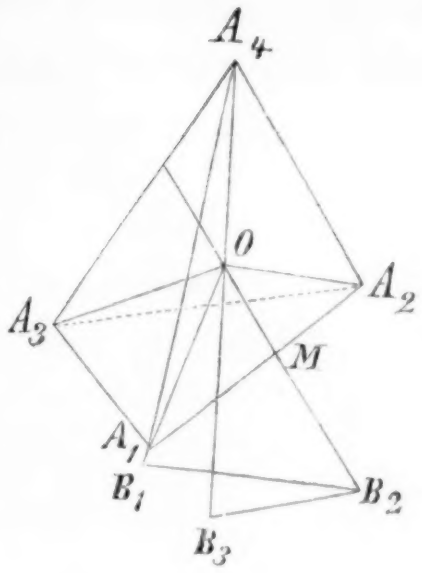
Verlängert man OA_1, OA_2, OA_3, so werden die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in Abschnitte getheilt, die sich umgekehrt wie die $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Abstände verhalten; denn schneidet OA_3 die Seite A_1A_2 in M_3, so ist $M_3A_1 : M_3A_2 = A_1OA_3 : A_2OA_3 = r_2^{n-2} : r_1^{n-2}$. Für $n=2$ folgt als bekannte Eigenschaft des Schwerpunktes Gleichheit der Dreiecke A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_1, deren jedes gleich dem Dreieck ist, das r_1, r_2, r_3 an einander gesetzt geben, sowie Gleichheit der Abschnitte auf den Seiten.

Für $n=1$ ergiebt sich $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=120^0$, indem r_1^0, r_2^0, r_3^0 an einander gesetzt ein gleichseitiges Dreieck geben.

---

*) s. *Steiner* in Bd. 13, pag. 362 dieses Journals.

2. Ist O der Punkt des Minimums oder Maximums für vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 im Raume, und setzt man der Grösse und Richtung nach $r_1^{n-1} = OB_1$, $r_2^{n-1} = B_1B_2$, $r_3^{n-1} = B_2B_3$, $r_4^{n-1} = B_3O$ an einander, so muss OA_4 die Verlängerung von B_3O bilden. Da B_1B_2 parallel mit OA_2 ist, so liegen r_1, r_2 und B_1B_2 in einer Ebene, welche von der Ebene, in welcher B_2B_3, B_3O, OA_3 und OA_4, also der Ebene r_3r_4, in der Geraden OB_2 geschnitten wird. Aus dem Dreieck B_1OB_2 folgt aber, da $\angle B_1B_2O = \angle A_2OB_2$ ist,



$$\sin B_2OA_1 : \sin B_2OA_2 = r_2^{n-1} : r_1^{n-1},$$

d. h. die Ebene zweier Abstände theilt den Winkel der beiden anderen in zwei Theile, deren Sinus sich umgekehrt verhalten, wie die $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Abstände, für $n=1$ mithin in zwei gleiche Theile.

Ferner theilt jede Ebene durch O und eine Pyramidenkante die gegenüberliegende Pyramidenkante in zwei Abschnitte, die sich umgekehrt verhalten, wie die $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Abstände. Denn schneide OB_2 die Kante A_1A_2 in M, so ist

$$MA_1 : MA_2 = \frac{MA_1}{MO} : \frac{MA_2}{MO} = \frac{\sin MOA_1}{\sin MA_1O} : \frac{\sin MOA_2}{\sin MA_2O} = \frac{r_2^{n-1}}{r_2} : \frac{r_1^{n-1}}{r_1} = r_2^{n-2} : r_1^{n-2}$$

Der Punkt O ist die gemeinschaftliche Spitze von vier Pyramiden, welche auf den Seitenflächen der gegebenen Pyramide stehen, und deren Verhältniss gleich dem der $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der gegenüberliegenden Abstände ist; z. B.

$$OA_1A_3A_4 : OA_2A_3A_4 = MA_1 : MA_2 = r_2^{n-2} : r_1^{n-2}.$$

Für $n=2$ haben diese vier Pyramiden gleiches Volumen, und zwar ist jede gleich der Pyramide $OB_1B_2B_3$, welche die r an einander gesetzt bilden. Es ist nämlich allgemein das Volumen v der Pyramide $OB_1B_2B_3$

$$v = \tfrac{1}{6} r_2^{n-1} r_3^{n-1} r_4^{n-1} \sin r_2r_3 \sin \widehat{r_4\ r_2r_3}.$$

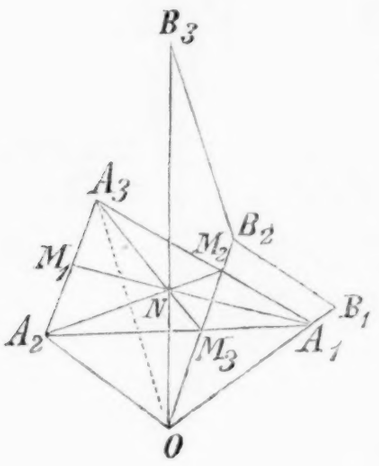
Das Volumen einer der vier Pyramiden, $v_1 = OA_2A_3A_4$, ist

$$v_1 = \tfrac{1}{6} r_2r_3r_4 \sin r_2r_3 \sin \widehat{r_4\ r_2r_3}, \quad \text{daher}$$

$$v_1 = \frac{v}{r_2^{n-2} \cdot r_3^{n-2} \cdot r_4^{n-2}}.$$

Bildet man die analogen Ausdrücke für v_2, v_3, v_4, so erhält man ebenfalls

das oben angegebene Verhältniss derselben, und für $n=2$ folgt, dass v gleich jeder der Pyramiden v_1, v_2, v_3, v_4 ist.



3. Ist O der Punkt einer gegebenen Ebene, für welchen die Potenzsumme der Abstände von drei ausser ihr liegenden Punkten A_1, A_2, A_3 Minimum oder Maximum ist, und setzt man der Grösse und Richtung nach $r_1^{n-1}=OB_1$, $r_2^{n-1}=B_1B_2$, $r_3^{n-1}=B_2B_3$ an einander, so muss OB_3 eine Normale der Ebene sein. Die Ebene der Geraden OA_3 und OB_3 schneidet die Ebene von OA_1 und OA_2 in der Geraden OB_2, durch welche der Winkel A_1OA_2 in zwei Theile getheilt wird, deren Sinusverhältniss ist:

$$\sin A_1OB_2 : \sin B_2OA_2 = B_1B_2 : OB_1 = r_2^{n-1} : r_1^{n-1}\ *).$$

Schneidet ferner OB_2 die Dreiecksseite A_1A_2 in M_3, so folgt, gerade wie im vorigen Falle,

$$M_3A_1 : M_3A_2 = r_2^{n-2} : r_1^{n-2}.$$

Ist endlich N der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt von A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, so folgt

$$ONA_1A_3 : ONA_2A_3 = M_3A_1 : M_3A_2 = r_2^{n-2} : r_1^{n-2}.$$

Dies lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Jede Ebene durch die Normale in O und einen Abstand theilt den Winkel der beiden anderen Abstände in zwei Winkel, deren Sinus sich umgekehrt wie die $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen, und die gegenüberliegende Dreiecksseite in zwei Abschnitte, die sich umgekehrt wie die $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Abstände verhalten; und die Normale ist gemeinschaftliche Kante dreier Pyramiden, deren Verhältniss gleich dem der $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der gegenüberliegenden Abstände ist.

---

*) Den Fall $n=1$, wo also die Summe $r_1+r_2+r_3$ ein Minimum ist und der Winkel zweier Abstände von der Ebene des dritten und der Normale halbirt wird, s. *Sturm* in *Gergonne*'s Annalen Bd. 14, p. 13, und *Querret* ebendaselbst Bd. 13, p. 329.

IV. Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von Geraden in der Ebene oder Ebenen im Raume.

§. 17.

1. Bezeichnet r den rechtwinkligen Abstand eines beliebigen Punktes O von einer der gegebenen Geraden oder Ebenen, r' den eines anderen Punktes O', in der Entfernung $OO' = t$, so ist

$$r' = r - t\cos rt,$$

wobei hinsichtlich des Vorzeichens die in §. 2 gegebene Regel zu beachten ist. Durch Potenzirung mit einer beliebigen Zahl n folgt nach dem binomischen Satze:

$$r'^n = r^n - nr^{n-1}t\cos rt + \frac{n.n-1}{1.2}r^{n-2}t^2\cos^2 rt - \cdots$$

und hieraus durch Summation

$$\Sigma r'^n = \Sigma r^n - nt\Sigma r^{n-1}\cos rt + t^2\left[\frac{n.n-1}{1.2}\Sigma r^{n-2}\cos^2 rt - \cdots\right].$$

Da nun, mit Ausschluss des Falles $0 < n < 1$, das erste Glied der Klammer positiv ist und t so klein genommen werden kann, dass dieses Glied alle folgenden überwiegt, so ist für $\Sigma r^{n-1}\cos rt = 0$ der Zuwachs von Σr^n ein positiver, mithin Σr^n ein Minimum. Dagegen ist für $0 < n < 1$ das erste Glied der Klammer stets negativ, daher für $\Sigma r^{n-1}\cos rt = 0$ auch der Zuwachs von Σr^n negativ, Σr^n also ein Maximum.

Für den Fall $n = 0$ bedingt $\Sigma\frac{\cos rt}{r} = 0$ ein Maximum des Productes der Abstände r (vergl. §. 13, 3). Denn aus

$$\frac{r'}{r} = 1 - t\frac{\cos rt}{r}$$

folgt durch Bildung des Productes:

$$\frac{r_1' r_2' r_3' \cdots}{r_1 r_2 r_3 \cdots} = 1 - t\Sigma\frac{\cos rt}{r} + t^2\Sigma\frac{\cos r_1 t.\cos r_2 t}{r_1 r_2} - \cdots.$$

Unter der Bedingung dass

$$\Sigma\frac{\cos rt}{r} = 0,$$

$$\Sigma\frac{\cos^2 rt}{r^2} = -2\Sigma\frac{\cos r_1 t.\cos r_2 t}{r_1 r_2}$$

erhält man

$$\frac{r_1' r_2' r_3' \ldots}{r_1 r_2 r_3 \ldots} = 1 - \tfrac{1}{2} t^2 \Sigma \frac{\cos^2 rt}{r^2} + \ldots .$$

Da also der Zuwachs beständig negativ ist, so ist das Product $r_1 r_2 r_3 \ldots$ Maximum.

Berücksichtiget man noch, dass die Bedingungsgleichung $\Sigma r^{n-1} \cos rt = 0$ dieselbe ist, wie die in §. 13, 1. erhaltene, so hat man folgendes Resultat:

Ist für einen Punkt O die Summe der Projectionen der $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen seiner Abstände von Geraden oder Ebenen in Bezug auf jede Gerade gleich Null, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Abstände im Falle $0 < n < 1$ ein Maximum, für alle anderen Werthe von n ein Minimum. Für denselben Punkt O ist auch die Summe der n^{ten} Potenzen seiner Abstände von den Fusspunkten jener Senkrechten Minimum oder Maximum. Endlich ist im Falle $n = 0$ das Product der Abstände des Punktes O von den Geraden oder Ebenen ein Maximum, das Product der Abstände von den Fusspunkten jener Abstände Minimum oder Maximum (s. §. 13, 3).

Für denselben Punkt O ist bei Geraden in der Ebene auch die Potenzsumme der nicht rechtwinklig, sondern unter einem beliebigen Winkel u genommenen Abstände ϱ Maximum oder Minimum, sowie auch die seiner Abstände von den Endpunkten der ϱ auf den Geraden. Denn mit Σr^n ist auch $\Sigma \varrho^n = \frac{\Sigma r^n}{\cos^n u}$ Minimum oder Maximum; und bildet die durch O gelegte Gerade τ mit t ebenfalls den Winkel u, so ist mit $\Sigma r^{n-1} \cos rt = 0$ die Gleichung $\Sigma \varrho^{n-1} \cos \varrho \tau = 0$ identisch. Dreht man also das System der gegebenen Geraden in seiner Ebene um den Punkt O, so wird es von dem festen Strahlenbüschel der τ beständig in Punkten geschnitten, für welche die Potenzsumme der Abstände von O Minimum oder Maximum ist.

Liegt O auf einer vorgeschriebenen Geraden oder Ebene, so muss in Bezug auf diese Gerade oder in Bezug auf jede Gerade dieser Ebene $\Sigma r^{n-1} \cos rt = 0$ sein.

2. Aus $\Sigma r^{n-1} \cos rt = 0$ ergiebt sich eine bemerkenswerthe Relation. Multiplicirt man die Gleichung $r' = r - t \cos rt$ mit r^{n-1}, so erhält man durch Summation

$$\Sigma r' . r^{n-1} = \Sigma r^n .$$

Mithin ist für jeden beliebigen Punkt O' die Summe $\Sigma r' . r^{n-1}$ constant (mit

Ausschluss des Falles $n = 1$). Hat man z. B. ein Vieleck, das einem Kreise, oder ein Polyeder, das einer Kugel mit dem Halbmesser a umschrieben ist, so erhält man, wenn man O' zum Mittelpunkt nimmt, also $r' = a$ setzt, $a\Sigma r^{n-1} = \Sigma r^n$; es ist also für jedes n der Quotient $\Sigma r^n : \Sigma r^{n-1}$ constant, nämlich gleich dem Halbmesser. Schneiden sich sämmtliche Geraden oder Ebenen mit Ausnahme der ersten in einem Punkte im senkrechten Abstande h von dieser, so ist

$$h.r_1^{n-1} = \Sigma r^n.$$

3. Schneidet OO' die gegebenen Geraden oder Ebenen in den Punkten P_1, P_2, ..., so ist $\cos rt = \frac{r}{OP}$, mithin kann man statt $\Sigma r^{n-1}\cos rt = 0$ auch schreiben

$$\Sigma \frac{r^n}{OP} = 0,$$

welche Summe also beständig Null bleibt, wenn man die schneidende Gerade beliebig um den Punkt O dreht *). Ist $n = 0$, also für O das Product der Abstände ein Maximum, so folgt $\Sigma \frac{1}{OP} = 0$ (s. §. 15). Diese letztere Relation gilt z. B. für jede Gerade durch den Mittelpunkt eines regelmässigen Vielecks, durch die Mitte der Diagonale eines Vierecks, zu welcher dasselbe symmetrisch ist, durch den Schwerpunkt eines Dreiecks oder einer dreiseitigen Pyramide (s. den folgenden Paragraphen).

4. Im Falle $n = 1$ giebt es keinen Punkt O des Minimums oder Maximums, sondern, wie bekannt **), giebt es im Allgemeinen für gegebene Gerade parallele Gerade und für gegebene Ebenen parallele Ebenen von der Eigenschaft, dass für jeden Punkt einer solchen die Summe der Abstände, Σr, constant bleibt. Denn in der Gleichung

$$\Sigma r' = \Sigma r - t\Sigma\cos rt$$

findet entweder der besondere Fall statt, dass $\Sigma\cos rt$ in Bezug auf jede beliebige Gerade t verschwindet, daher Σr für jeden Punkt constant ist, wie z. B. bei einem gleichseitigen Vieleck; oder es lässt sich eine Richtung paralleler Geraden oder eine Stellung paralleler Ebenen angeben, für die $\Sigma\cos rt = 0$ ist.

---

*) s. *Poncelet* in Band 3, p. 241 dieses Journals. Der „Mittelpunkt der harmonischen Mittel" liegt also in Bezug auf O im Unendlichen, wenn $\frac{1}{OP_1}$, ... die Coefficienten r_1^n, ... erhalten.

**) Vergl. *Baltzer* Elemente, Plan. §. 10, 8. und Stereometrie §. 8, 16.

§. 18.

1. Wenn drei Gerade a_1, a_2, a_3 sich in den Punkten A_3, A_1, A_2 schneiden, und M_1 der Punkt der Geraden a_1 ist, für welchen die Potenzsumme der Abstände von a_2 und a_3 Minimum oder Maximum ist, so hat man die Bedingungsgleichung

$$r_2^{n-1}\cos r_2 a_1 + r_3^{n-1}\cos r_3 a_1 = 0,$$

folglich

$$r_2^{n-1} : r_3^{n-1} = \sin A_2 : \sin A_3 = a_2 : a_3,$$

$$M_1A_2 : M_1A_3 = \frac{r_3}{\sin A_2} : \frac{r_2}{\sin A_3} = a_3^{\frac{n}{n-1}} : a_2^{\frac{n}{n-1}} = r_3^n : r_2^n.$$

Die Abschnitte der Geraden a_1 verhalten sich demnach wie die $\frac{n}{n-1}^{\text{ten}}$ Potenzen der anliegenden Dreiecksseiten. Zur Bestimmung von r_2 und r_3 sei noch die Fläche f des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gegeben, so hat man $2f = a_2r_2 + a_3r_3$, und folglich

$$r_2 = \frac{2f \cdot a_2^{\frac{1}{n-1}}}{a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}}, \qquad r_3 = \frac{2f \cdot a_3^{\frac{1}{n-1}}}{a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}}.$$

2. Ist O der Punkt des Minimums oder Maximums dreier Geraden a_1, a_2, a_3, so folgt, weil das Dreieck, welches r_1^{n-1}, r_2^{n-1}, r_3^{n-1} an einander gesetzt geben, mit dem gegebenen Dreiecke gleichwinklig, ihm also ähnlich ist.

$$r_1^{n-1} : r_2^{n-1} : r_3^{n-1} = a_1 : a_2 : a_3.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit $2f = a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 = a_1h_1 = a_2h_2 = a_3h_3$, wo h_1, h_2, h_3 die Höhen des Dreiecks bezeichnen, als Werthe der r:

$$r_1 = h_1 \frac{a_1^{\frac{n}{n-1}}}{a_1^{\frac{n}{n-1}} + a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}},$$

$$r_2 = h_2 \frac{a_2^{\frac{n}{n-1}}}{a_1^{\frac{n}{n-1}} + a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}},$$

$$r_3 = h_3 \frac{a_3^{\frac{n}{n-1}}}{a_1^{\frac{n}{n-1}} + a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Als Minimalsumme folgt

$$r_1^n + r_2^n + r_3^n = \frac{2^n . f^n}{\left(a_1^{\frac{n}{n-1}} + a_2^{\frac{n}{n-1}} + a_3^{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}}.$$

Aus der allgemeinen Gleichung $\Sigma \frac{r^n}{OP} = 0$ (§. 17, 3.) folgt, wenn man die Gerade t parallel einer Dreiecksseite A_2A_3 legt, abgesehen vom Vorzeichen.

$$OP_3 : OP_2 = r_3^n : r_2^n = M_1A_2 : M_1A_3.$$

Daher liegt O auf der Geraden A_1M_1. Mithin bestimmt sich O als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dreier Geraden A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, jede von einer Ecke des Dreiecks nach dem Minimum- (Maximum) Punkte der gegenüberliegenden Seite. Dies folgt auch aus der Bemerkung, dass, vermöge der oben angegebenen Werthe von r_1, r_2, r_3, O der Schwerpunkt der Punkte A_1, A_2, A_3 ist, wenn jeder als Gewicht die Potenz $\frac{n}{n-1}$ der gegenüberliegenden Dreiecksseite hat; M_1, M_2, M_3 sind dann die Schwerpunkte je zweier Punkte A. Für $n = 0$ ist O der Schwerpunkt der gleich schweren Punkte A_1, A_2, A_3: für jede durch denselben gelegte Gerade gilt daher die Relation

$$\frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \frac{1}{OP_3} = 0^*), \quad (\S.\ 17,\ 3.),$$

und ferner ist das Product seiner Abstände von den Dreiecksseiten ein Maximum, das der Abstände von den Fusspunkten jener relatives Minimum oder Maximum.

Sind S_1, S_2, S_3 die Fusspunkte von r_1, r_2, r_3 oder auch die Durchschnittspunkte der unter beliebigem Winkel genommenen Entfernungen mit den Seiten, so ist (nach §. 17, 1.) O zugleich der Punkt des Minimums oder Maximums für S_1, S_2, S_3, folglich nach §. 16, 1:

$$S_1OS_2 : S_2OS_3 : S_3OS_1 = r_3^{n-2} : r_1^{n-2} : r_2^{n-2} = a_3^{\frac{n-2}{n-1}} : a_1^{\frac{n-2}{n-1}} : a_2^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Für $n = 0$ folgt, dass das Verhältniss der Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze der Schwerpunkt und deren Ecken die Projectionen desselben auf die Dreiecksseiten sind, gleich dem Verhältnisse der Quadrate der gegenüberliegenden Dreiecksseiten ist. Ist O der Schwerpunkt eines rechtwinkligen

*) s. *Müller* in *Grunerts* Archiv 16, p. 1.

Dreiecks, so ist das der Hypotenuse gegenüberliegende Dreieck gleich der Summe der beiden anderen.

3. Ist O_4 der Punkt einer Ebene f_4, für welchen die Potenzsumme der Abstände von drei Ebenen f_1, f_2, f_3 Minimum oder Maximum ist, so muss er der Bedingung genügen

$$r_1^{n-1}\cos r_1 t + r_2^{n-1}\cos r_2 t + r_3^{n-1}\cos r_3 t = 0.$$

Schneiden sich diese vier Ebenen in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, die den Ebenen von gleichem Index gegenüber liegen, und nimmt man als t eine durch O_4 parallel mit A_2A_3 gelegte Gerade, welche A_1A_3 in F, A_1A_2 in G schneidet, so geht obige Gleichung in die einfachere $r_2^{n-1}\cos\alpha_2 = r_3^{n-1}\cos\alpha_3$ über, wo α_2 und α_3 die spitzen Winkel bedeuten, die r_2 und r_3 mit FG bilden. Wird ferner A_2A_3 von A_1O_4 in M_1 geschnitten, so hat man

$$A_1A_3A_4O : A_1A_2A_4O = f_2r_2 : f_3r_3 = M_1A_3 : M_1A_2 = O_4F : O_4G = \frac{r_2}{\cos\alpha_2} : \frac{r_3}{\cos\alpha_3}.$$

Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung:

$$f_2 : f_3 = r_2^{n-1} : r_3^{n-1},$$

$$M_1A_3 : M_1A_2 = f_2^{\frac{n}{n-1}} : f_3^{\frac{n}{n-1}}.$$

Demnach bestimmt sich der Punkt O_4 als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dreier Geraden A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, jede von einer Ecke des Dreiecks nach dem Punkte der gegenüberliegenden Seite, welcher dieselbe im Verhältniss der $\frac{n}{n-1}^{\text{ten}}$ Potenzen der anstossenden Pyramidenflächen theilt, d. i. nach dem Punkte des Minimums oder Maximums dieser Pyramidenkante in Bezug auf die anstossenden beiden Flächen.

4. Es ist nun aber leicht zu sehen, dass für jeden Punkt der Geraden A_4O_4 in Bezug auf eine zur Ebene f_4 parallele Gerade t die Bedingung

$$r_1^{n-1}\cos r_1 t + r_2^{n-1}\cos r_2 t + r_3^{n-1}\cos r_3 t = 0.$$

folglich auch, wegen $r_4 t = 90^0$,

$$r_1^{n-1}\cos r_1 t + r_2^{n-1}\cos r_2 t + r_3^{n-1}\cos r_3 t + r_4^{n-1}\cos r_4 t = 0$$

erfüllt ist, dass mithin der Minimumpunkt O auf der Geraden A_4O_4 liegen muss. Daher ergiebt sich der Punkt O für vier Ebenen als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der vier Geraden A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3, A_4O_4, jede von einer Ecke der Pyramide nach dem Punkte des Minimums (oder Maximums) der gegenüberliegenden Seitenfläche. Die $n-1^{\text{ten}}$ Potenzen seiner Abstände sind

den zugehörigen Seitenflächen proportional,

$$r_1^{n-1} : r_2^{n-1} : r_3^{n-1} : r_4^{n-1} = f_1 : f_2 : f_3 : f_4 .$$

Nimmt man hierzu die Gleichung

$$3v = f_1 r_1 + f_2 r_2 + f_3 r_3 + f_4 r_4 = f_1 h_1 ,$$

wo v das Volumen und h_1 die zu f_1 gehörige Höhe der Pyramide bezeichnet, so erhält man

$$r_1 = \frac{3v \cdot f_1^{\frac{1}{n-1}}}{f_1^{\frac{n}{n-1}} + f_2^{\frac{n}{n-1}} + f_3^{\frac{n}{n-1}} + f_4^{\frac{n}{n-1}}} = h_1 \frac{f_1^{\frac{n}{n-1}}}{f_1^{\frac{n}{n-1}} + f_2^{\frac{n}{n-1}} + f_3^{\frac{n}{n-1}} + f_4^{\frac{n}{n-1}}} .$$

Analoge Ausdrücke gelten für die übrigen r; als Minimalsumme folgt hieraus

$$r_1^n + r_2^n + r_3^n + r_4^n = \frac{3^n \cdot v^n}{\left(f_1^{\frac{n}{n-1}} + f_2^{\frac{n}{n-1}} + f_3^{\frac{n}{n-1}} + f_4^{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1}} .$$

Die Werthe der Abstände r_1, r_2, r_3, r_4 zeigen, dass O der Schwerpunkt der vier Durchschnittspunkte der gegebenen Ebenen ist, wenn jeder als Gewicht die $\frac{n}{n-1}^{\text{te}}$ Potenz der gegenüberliegenden Seitenfläche hat. Die Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 sind dann die Schwerpunkte je dreier, die Punkte M die Schwerpunkte je zweier der Punkte A. Für $n=0$ ist also O der Schwerpunkt der gleich schweren Punkte A. Für jede durch ihn gelegte Gerade, welche die Flächen der Pyramide in P_1, P_2, P_3, P_4 schneidet, gilt daher die Relation (s. §. 17, 3.)

$$\frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \frac{1}{OP_3} + \frac{1}{OP_4} = 0 \text{ *)};$$

ferner ist das Product seiner senkrechten Abstände von den Seitenflächen ein Maximum und das seiner Abstände von den Fusspunkten dieser Senkrechten Minimum oder Maximum.

Der Punkt O ist der Scheitel von vier Pyramiden, die sich wie die $\frac{n}{n-1}^{\text{ten}}$ Potenzen der Seitenflächen der gegebenen Pyramide verhalten, auf denen sie stehen, wie z. B.

$$OA_1A_4A_3 : OA_1A_4A_2 = M_1A_3 : M_1A_2 = f_2^{\frac{n}{n-1}} : f_3^{\frac{n}{n-1}} .$$

Nach §. 17, 1. ist O aber auch Punkt des Minimums oder Maximums für die

*) s. *Müller* in *Grunerts* Archiv 16, p. 1.

Fusspunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Senkrechten r. Da dieselben die Eckpunkte von vier Pyramiden mit der gemeinschaftlichen Spitze O bilden, die sich nach §. 16. 2. wie die $n-2^{\text{ten}}$ Potenzen der gegenüberliegenden r verhalten, so hat man

$$OS_1S_2S_3 : OS_1S_2S_4 = r_4^{n-2} : r_3^{n-2} = f_4^{\frac{n-2}{n-1}} : f_3^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Für $n = 0$ folgt:

Die vier dreiseitigen Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide und deren übrigen Ecken die Projectionen des Schwerpunktes auf die Seitenflächen sind, verhalten sich wie die Quadrate der gegenüberliegenden Seitenflächen.

Leipzig, 1863.